M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 5

22.11.2022.

predavač: prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Definicija

Ako su V i W vektorski prostori nad poljem K. Kažemo da je linearan operator $A\colon V \to W$ **izomorfizam** ako je A bijekcija s V na W. Ako takav A postoji, kažemo da je V izomorfan W ili da su V i W izomorfni i pišemo $V \cong W$.

Napomena

"Biti izomorfan" je relacija ekvivalencije.

Definicija

Linearan operator koji je injekcija zovemo **monomorfizam**.

Definicija

Linearan operator koji je surjekcija zovemo **epimorfizam**.

Definicija

Ako su V i W vektorski prostori nad poljem K. Kažemo da je linearan operator $A\colon V \to W$ **izomorfizam** ako je A bijekcija s V na W. Ako takav A postoji, kažemo da je V izomorfan W ili da su V i W izomorfni i pišemo $V \cong W$.

Napomena

"Biti izomorfan" je relacija ekvivalencije.

Definicija

Linearan operator koji je injekcija zovemo **monomorfizam**.

Definicija

Linearan operator koji je surjekcija zovemo **epimorfizam**.

Definicija

Ako su V i W vektorski prostori nad poljem K. Kažemo da je linearan operator $A\colon V \to W$ **izomorfizam** ako je A bijekcija s V na W. Ako takav A postoji, kažemo da je V izomorfan W ili da su V i W izomorfni i pišemo $V \cong W$.

Napomena

”Biti izomorfan” je relacija ekvivalencije.

Definicija

Linearan operator koji je injekcija zovemo **monomorfizam**.

Definicija

Linearan operator koji je surjekcija zovemo **epimorfizam**.

Definicija

Ako su V i W vektorski prostori nad poljem K. Kažemo da je linearan operator $A\colon V \to W$ **izomorfizam** ako je A bijekcija s V na W. Ako takav A postoji, kažemo da je V izomorfan W ili da su V i W izomorfni i pišemo $V \cong W$.

Napomena

"Biti izomorfan" je relacija ekvivalencije.

Definicija

Linearan operator koji je injekcija zovemo **monomorfizam**.

Definicija

Linearan operator koji je surjekcija zovemo **epimorfizam**.

Napomena

$A \in L(V, W)$ je monomorfizam ako i samo ako je $Av = 0$ jedino za $v = 0$.

Napomena

Neka je V vektorski prostor nad poljem K. Izomorfizam s V u V nazivamo **regularan operator**. Skup svih regularnih operatora s V s V označavamo s $GL(V)$. $GL(V)$ je grupa s obzirom na množenje operatora.

Napomena

$A \in L(V,W)$ je monomorfizam ako i samo ako je $Av = 0$ jedino za $v = 0$.

Napomena

Neka je V vektorski prostor nad poljem K. Izomorfizam s V u V nazivamo **regularan operator**. Skup svih regularnih operatora s V s V označavamo s $GL(V)$. $GL(V)$ je grupa s obzirom na množenje operatora.

Teorem

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem K i $A \in L(V, W)$.

(1) Operator A je izomorfizam ako i samo ako je za svaku bazu $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ od V skup $Ae = \{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ baza od W.

(2) Operator A je izomorfizam ako i samo ako postoje baza e od V i baza f od W takve da je $A(f, e)$ jedinična matrica.

Teorem

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem K. Vektorski prostori V i W su izomorfni ako i samo ako je $\dim V = \dim W$.

Teorem

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem K i $A \in L(V, W)$.

(1) Operator A je izomorfizam ako i samo ako je za svaku bazu $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ od V skup $Ae = \{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ baza od W.

(2) Operator A je izomorfizam ako i samo ako postoje baza e od V i baza f od W takve da je $A(f, e)$ jedinična matrica.

Teorem

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem K. Vektorski prostori V i W su izomorfni ako i samo ako je $\dim V = \dim W$.

Definicija

Neka je $A \in L(V, W)$. Definiramo:

$$\mathsf{Im}(A) = \{Av \colon v \in V\} \subseteq W \text{ i } \mathsf{Ker}(A) = \{v \in V \colon Av = 0\} \subseteq V.$$

$\mathsf{Im}(A)$ se zove **slika operatora** A, a $\mathsf{Ker}(A)$ **jezgra operatora** A.

Definicija

Za $A \in L(V, W)$ definiramo:

$$r(A) = \dim(\mathsf{Im}(A)) \text{ i } d(A) = \dim(\mathsf{Ker}(A)).$$

Broj $r(A)$ zovemo **rang operatora** A, a broj $d(A)$ **defekt operatora** A.

Definicija

Neka je $A \in L(V, W)$. Definiramo:

$$\mathrm{Im}(A) = \{Av \colon v \in V\} \subseteq W \;\text{ i }\; \mathrm{Ker}(A) = \{v \in V \colon Av = 0\} \subseteq V.$$

$\mathrm{Im}(A)$ se zove **slika operatora** A, a $\mathrm{Ker}(A)$ **jezgra operatora** A.

Definicija

Za $A \in L(V, W)$ definiramo:

$$r(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) \;\text{ i }\; d(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A)).$$

Broj $r(A)$ zovemo **rang operatora** A, a broj $d(A)$ **defekt operatora** A.

Teorem rangu i defektu

Neka je $A \in L(V, W)$ i V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Tada je

$$\dim V = r(A) + d(A).$$

Zadatak 1

Neka je $A \in L(V, W)$. Pokažite da je $\mathrm{Ker}\, A \leq V$ i $\mathrm{Im}\, A \leq W$.

Zadatak 2

Neka je $A \in L(V, W)$. Pokažite da je A monomorfizam ako i samo ako je $\mathrm{d}(A) = 0$.

Zadatak 3

Neka je $A \in L(V, W)$ i W konačnodimenzionalan vektorski prostor. Pokažite da je A epimorfizam ako i samo ako je $\mathrm{r}(A) = \dim W$.

Napomena *

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem K, $\dim V = \dim W$ i $A \in L(V, W)$. Tada je A monomorfizam $\Longleftrightarrow$ $d(A) = 0 \Longleftrightarrow r(A) = \dim V \Longleftrightarrow r(A) = \dim W \Longleftrightarrow$ je A epimorfizam.

Zadatak 4

Odredite jezgru, sliku, rang i defekt operatora $A : \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\} \to \mathbb{C}^2$ definiranog s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ix_3, -x_2).$$

Također, ispitajte je li operator A monomorfizam, epimorfizam, izomorfizam.

Zadatak 5

Pokažite da je preslikavanje $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definirano s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$$

izomorfizam.

Zadatak 6

Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori te za one koji jesu odredite sliku i jezgru te rang i defekt:

a) $A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $A(z_1, z_2) = \overline{z_2}$.

b) $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $A(x) = (x, 2x, 0)$.

Zadatak 7

Neka je $\mathbb{C}$ realan vektorski prostor. Pokažite da je preslikavanje $A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirano s

$$A(z) = \mathsf{Re}(z)$$

linearan operator te odredite $\mathsf{Ker}(A)$ i $\mathsf{Im}(A)$.