M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 6

29.11.2022.

predavač: prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Prelazak iz baze u bazu

Neka su $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ dvije baze od V. Postoji jedinstveni operator $T \in L(V)$ takav da je $Te = e'$, odnosno $Te_j = e'_j$, za $j = 1, 2, \ldots, n$. Operator T je izomorfizam i nazivamo ga **operator prijelaza iz baze e u bazu e'**.

Propozicija

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori i $A \in L(V, W)$. Neka su e i e' baze od V, f i f' baze od W i $T \in GL(V)$ i $S \in GL(W)$ pripadni operatori prijelaza: $Te = e'$, $Sf = f'$. Tada je

$$A(f', e') = S(f)^{-1} A(f, e) T(e).$$

Prelazak iz baze u bazu

Neka su $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ dvije baze od V. Postoji jedinstveni operator $T \in L(V)$ takav da je $Te = e'$, odnosno $Te_j = e'_j$, za $j = 1, 2, \ldots, n$. Operator T je izomorfizam i nazivamo ga **operator prijelaza iz baze e u bazu e'**.

Propozicija

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori i $A \in L(V, W)$. Neka su e i e' baze od V, f i f' baze od W i $T \in GL(V)$ i $S \in GL(W)$ pripadni operatori prijelaza: $Te = e'$, $Sf = f'$. Tada je

$$A(f', e') = S(f)^{-1} A(f, e) T(e).$$

Definicija

Kažemo da su matrice A i B **slične** ako postoji regularna matrica T takva da je

$$B = T^{-1}AT.$$

Definicija

Kažemo da su matrice A i B **ekvivalentne** ako postoje regularne matrice S i T takve da je

$$B = SAT.$$

Definicija

Kažemo da su matrice A i B **slične** ako postoji regularna matrica T takva da je

$$B = T^{-1}AT.$$

Definicija

Kažemo da su matrice A i B **ekvivalentne** ako postoje regularne matrice S i T takve da je

$$B = SAT.$$

Definicija

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$.
Definirano **trag linearnog operatora** s

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}A(e)$$

i **determinantu linearnog operatora** s

$$\det A = \det A(e),$$

gdje je e proizvoljna baza od V.

Zadatak 1

Dan je linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ kojemu je pridružena matrica

$$A(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

u paru kanonskih baza e i f. Odredite matricu operatora A u paru baza (f', e') ako je

$$e_1' = (1,1), \;\; e_2' = (1,0),$$

$$f_1' = (1,1,0), \;\; f_2' = (1,1,1), \;\; f_3' = (1,0,1).$$

Također, odredite $A(f', e)$ i $A(f, e')$.

Zadatak 2

Neka je $e = \{(1,0), (-1,1)\}$ baza za $\mathbb{R}^2$ i $A \in L(\mathbb{R}^2)$ kojemu je pridružena matrica

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite $A(e')$ ako je $e'_1 = e_1 + e_2$ i $e'_2 = 2e_1 - 3e_2$.

(b) Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi.

Zadatak 3

Dana je matrica operatora A u kanonskoj bazi e. Odredite matricu operatora A u bazi e'.

(a) $A(e) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \; e' = \{(1,1),(1,2)\}.$

(b) $A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; e' = \{(1,1,-2),(3,2,0),(1,0,-1)\}.$

Zadatak 4

Dan je linearan operator $A \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ kojemu je pridružena matrica

$$A(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

gdje je e kanonska baza od $\mathbb{R}^3$ i $f = \{1, i\}$. Odredite matricu operatora A u paru baza (f', e') i u paru baza (f', e), ako je $f' = \{1+i, 2i\}$ i $e' = \{(1,2,3), (-2,0,1), (1,2,-1)\}$.

Dualni operatori

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K. Svako preslikavanje s V u K zovemo **funkcional**. Vektorski prostor $V' = L(V, K)$ nazivamo **dualni prostor** vektorskog prostora V, a njegove elemente nazivamo **linearni funkcionali na** V.

Napomena

Ako je V konačnodimenzionalan, onda je i V' konačnodimenzionalan i vrijedi

$$\dim(V') = \dim L(V, K) = \dim V \cdot \dim K = \dim V.$$

Dualni operatori

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K. Svako preslikavanje s V u K zovemo **funkcional**. Vektorski prostor $V' = L(V, K)$ nazivamo **dualni prostor** vektorskog prostora V, a njegove elemente nazivamo **linearni funkcionali na** V.

Napomena

Ako je V konačnodimenzionalan, onda je i V' konačnodimenzionalan i vrijedi

$$\dim(V') = \dim L(V, K) = \dim V \cdot \dim K = \dim V.$$

Definicija

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem K i neka je $A \in L(V, W)$. Za $g \in W'$ definiramo preslikavanje $A'(g) \colon V \to K$ relacijom

$$[A'(g)](v) = g(Av), \;\; v \in V.$$

Na taj način smo definirali operator $A' \colon W' \to V'$ koji je linearan. Za $A' \in L(W', V')$ kažemo da je **dualan operator** linearnom operatoru $A \in L(V, W)$.

Zadatak 1

Neka je $e = \{1, 2t, 1 - t + t^2\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{P}_2(K)$. Nadalje, neka je e' dualna baza baze e.

(a) Odredite $e_1'(t^2)$, $e_2'(t^2)$ i $e_3'(t^2)$.

(b) Odredite dualnu bazu e'.

Definicija

Neka je S podskup vektorskog prostora V. Definiramo **anihilator** skupa S sa

$$S^\circ = \{f \in V' \colon f(x) = 0, \ \forall x \in S\}.$$

Zadatak 2

Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem K, te $S \subseteq V$. Dokažite da je

$$S^\circ \leq V'.$$

Zadatak 3

Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem K, te $S \subseteq V$. Dokažite da je

$$S^\circ = [S]^\circ.$$