M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 7

6.12.2022.

predavač: prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Minimalni polinom i spektar

V je konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem K
$\mathcal{L}(A)$ je potprostor od $L(V)$ razapet potencijama operatora $A \in L(V)$

Teorem

Neka je $A \in L(V)$ i $\deg \mu_A = m$. Tada vrijedi:

1) μ_A je polinom najmanjeg stupnja među svim netrivijalnim polinomima koji se poništavaju u A.
2) $\dim \mathcal{L}(A) = m = \deg \mu_A$ i $\{I, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$ je baza od $\mathcal{L}(A)$.
3) Za polinom P vrijedi $P(A) = 0$ ako i samo ako $\mu_A | P$.
4) Minimalni polinom μ_A je jedinsten normiran polinom stupnja m koji se poništava u A.

Definicija

Kažemo da je $\lambda \in K$ **svojstvena vrijednost** operatora $A \in L(V)$ ako postoji $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je $Av = \lambda v$. Svaki takav vektor v nazivamo **svojstveni vektor** obzirom na svojstvenu vrijednost λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora $A \in L(V)$ nazivamo **spektar operatora** A i označavamo sa $\sigma(A)$.

Ako je $\lambda \in \sigma(A)$ tada s V_λ označavamo skup svih vektora $v \in V$ takvih da je $Av = \lambda v$. Uočimo: $V_\lambda \neq \emptyset$, $0 \in V_\lambda$ i $V_\lambda \neq \{0\}$. Štoviše, $V_\lambda \leq V$ kojeg nazivamo svojstveni potprostor operatora A obzirom na svojstvenu vrijednost λ.

Teorem

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je spektar operatora A skup svih nultočaka njegovog minimalnog polinoma.

Definicija

Kažemo da je $\lambda \in K$ **svojstvena vrijednost** operatora $A \in L(V)$ ako postoji $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je $Av = \lambda v$. Svaki takav vektor v nazivamo **svojstveni vektor** obzirom na svojstvenu vrijednost λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora $A \in L(V)$ nazivamo **spektar operatora** A i označavamo sa $\sigma(A)$.

Ako je $\lambda \in \sigma(A)$ tada s V_λ označavamo skup svih vektora $v \in V$ takvih da je $Av = \lambda v$. Uočimo: $V_\lambda \neq \emptyset$, $0 \in V_\lambda$ i $V_\lambda \neq \{0\}$. Štoviše, $V_\lambda \leq V$ kojeg nazivamo svojstveni potprostor operatora A obzirom na svojstvenu vrijednost λ.

Teorem

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je spektar operatora A skup svih nultočaka njegovog minimalnog polinoma.

Definicija

Kažemo da je $\lambda \in K$ **svojstvena vrijednost** operatora $A \in L(V)$ ako postoji $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je $Av = \lambda v$. Svaki takav vektor v nazivamo **svojstveni vektor** obzirom na svojstvenu vrijednost λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora $A \in L(V)$ nazivamo **spektar operatora** A i označavamo sa $\sigma(A)$.

Ako je $\lambda \in \sigma(A)$ tada s V_λ označavamo skup svih vektora $v \in V$ takvih da je $Av = \lambda v$. Uočimo: $V_\lambda \neq \emptyset$, $0 \in V_\lambda$ i $V_\lambda \neq \{0\}$. Štoviše, $V_\lambda \leq V$ kojeg nazivamo svojstveni potprostor operatora A obzirom na svojstvenu vrijednost λ.

Teorem

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je spektar operatora A skup svih nultočaka njegovog minimalnog polinoma.

Ako je $A \in M_n(K)$. Definiramo $k_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ i nazivamo ga **svojstveni ili karakteristični polinom** matrice A.

$k_A(\lambda)$ je normiran polinom n-tog stupnja.

Teorem (Hamilton - Cayley)

Svaka matrica $A \in M_n(K)$ poništava svoj karakteristični polinom: $k_A(A) = 0$.

Analogno definiramo svojstveni ili karakteristični polinom operatora $A \in L(V)$:

$$k_A(\lambda) = k_{A(e)}(\lambda),$$

gdje je e proizvoljna baza od V.

Ako je $A \in M_n(K)$. Definiramo $k_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ i nazivamo ga **svojstveni ili karakteristični polinom** matrice A.

$k_A(\lambda)$ je normiran polinom n-tog stupnja.

Teorem (Hamilton - Cayley)

Svaka matrica $A \in M_n(K)$ poništava svoj karakteristični polinom: $k_A(A) = 0$.

Analogno definiramo svojstveni ili karakteristični polinom operatora $A \in L(V)$:

$$k_A(\lambda) = k_{A(e)}(\lambda),$$

gdje je e proizvoljna baza od V.

Ako je $A \in M_n(K)$. Definiramo $k_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ i nazivamo ga **svojstveni ili karakteristični polinom** matrice A.

$k_A(\lambda)$ je normiran polinom n-tog stupnja.

Teorem (Hamilton - Cayley)

Svaka matrica $A \in M_n(K)$ poništava svoj karakteristični polinom: $k_A(A) = 0$.

Analogno definiramo svojstveni ili karakteristični polinom operatora $A \in L(V)$:

$$k_A(\lambda) = k_{A(e)}(\lambda),$$

gdje je e proizvoljna baza od V.

Ako je $A \in M_n(K)$. Definiramo $k_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ i nazivamo ga **svojstveni ili karakteristični polinom** matrice A.

$k_A(\lambda)$ je normiran polinom n-tog stupnja.

Teorem (Hamilton - Cayley)

Svaka matrica $A \in M_n(K)$ poništava svoj karakteristični polinom: $k_A(A) = 0$.

Analogno definiramo svojstveni ili karakteristični polinom operatora $A \in L(V)$:

$$k_A(\lambda) = k_{A(e)}(\lambda),$$

gdje je e proizvoljna baza od V.

$\deg k_A = \dim V$

Teorem

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada vrijedi:

1) $k_A(A) = 0$.
2) Minimalni polinom μ_A dijeli karakteristični polinom k_A. Posebno, $\deg \mu_A \leq \dim V$.
3) $\sigma(A) = \{\lambda \in K : k_A(\lambda) = 0\}$.

$\deg k_A = \dim V$

Teorem

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada vrijedi:

1) $k_A(A) = 0$.
2) Minimalni polinom μ_A dijeli karakteristični polinom k_A. Posebno, $\deg \mu_A \leq \dim V$.
3) $\sigma(A) = \{\lambda \in K : k_A(\lambda) = 0\}$.

Zadatak 1

Odredite svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore i svojstvene potprostore operatora $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ čija je matrica u kanonskoj bazi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2

Odredite svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore i svojstvene potprostore operatora $A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ čija je matrica u kanonskoj bazi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3

Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora $A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ čija je matrica u kanonskoj bazi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4

Neka je V vektorski prostor nad poljem K dimenzije n i $A \in L(V)$.
Dokažite da linearni operator

$$A = aI_n, \ \ a \in K \setminus \{0\}$$

ima minimalni polinom prvog stupnja.

Napomena

Operator aI_n, $a \in K \setminus \{0\}$, jedini je linearan operator na vektorskom prostoru dimenzije n čiji je minimalni polinom prvog stupnja.

Zadatak 5

Odredite svojstvene vrijednosti, spektar te karakteristični i minimalni polinom matrice:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(e)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$