M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 10

10.1.2023.

predavač: prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Zadatak 2

Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadanog s

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3

Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadanog s

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4

Linearan operator $A \in L(\mathbb{C}^6)$ ima karakteristični polinom

$$k_A(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 1)^3$$

i minimalni polinom

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2.$$

Odredite Jordanovu formu operatora A.

Zadatak 5

Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^{10})$ ako je poznato da vrijedi:

(a) $k_A(\lambda) = (\lambda+1)^5(\lambda-1)^5, \mu_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^4,$
$\mathrm{d}(A+I) = 3.$

(b) $k_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-2)^9, \deg(\mu_A(\lambda)) = 4,\ \mathrm{d}(A-2I) = 3.$

Zadatak 6

Odredite minimalni i karakteristični polinom operatora ako mu je poznata Jordanova forma:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 7

Odredite minimalni i karakteristični polinom operatora ako mu je poznata Jordanova forma:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Funkcije operatora

Napomena

Ako je matrica operatora A zapisana u Jordanovoj formi, onda je $f(A)$ dijagonalna s dijagonalnim blokovima oblika:

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & & \\ 0 & f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \\ 0 & 0 & f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}.$$

Napomena

Neka je $A \in L(V)$, V kdvp nad $\mathbb{C}$, $\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{p_t}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, za $i \neq j$ i $\deg \mu_A = p_1 + p_2 + \cdots + p_t = m$. Za svaku $f \in \mathcal{F}(A)$ vrijedi

$$f(A) = \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=0}^{p_l - 1} f^{(k)}(\lambda_l) P_{kl}.$$

Da bismo odredili P_{kl}, gornju jednakost raspisujemo za funkcije $f(\lambda) = \lambda^s$, $s = 0, 1, \ldots, m-1$.

Zadatak 1

Odredite $\sin A$ operatora A iz Zadatka 1 s prethodnih vježbi.

Zadatak 2

Neka je $f \in \mathcal{F}(A)$, $A \in L(V)$. Odredite $f(A)$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3

Odredite $A^3 - A$ i $\sqrt{A}$ u Jordanovoj i polaznoj bazi ako je operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ dan s

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$