M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 11

17.1.2023.

predavač: prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Unitarni prostori

Neka je V vektorski prostor nad poljem K i $K = \mathbb{R}$ ili $K = \mathbb{C}$.

Vektorski prostor na kojem je zadan skalarni produkt nazivamo **unitarni prostor**.

Vektorski prostor na kome je zadana norma zove se **normirani prostor**.

Neka je U unitaran prostor. Kažemo da su $u_1, u_2 \in U$ **ortogonalni** ako je $(u_1|u_2) = 0$ i pišemo $u_1 \perp u_2$. Za vektor $u \in U$ kažemo da je ortogonalan na podskup $S \subseteq U$ ako je $(u|v) = 0$, $\forall v \in S$ i pišemo $u \perp S$. Za $S, T \subseteq U$ kažemo da su međusobno ortogonalni ako je $(u, v) = 0$, $\forall u \in S, v \in T$.

Neka je $S \subseteq U$. Skup $S^\perp = \{u \in U : u \perp S\}$ nazivamo **ortogonalni komplement od** S.

Kažemo da je podskup $S \subseteq U$ **ortogonalan** ako je $(u_1|u_2) = 0$, $\forall u_1, u_2 \in S, u_1 \neq u_2$.

Kažemo da je skup S **ortonormiran** ako je ortogonalan i $\|u\| = 1$, $\forall u \in S$.

Zadatak 1

Neka je $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija zadana s

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Pokažite da je f skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 2

Neka je $f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ funkcija zadana s

$$f((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Ispitajte je li f skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$.

Zadatak 3

Funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana je s

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 x_2 - y_1 y_2.$$

Ispitajte je li f skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$.

Zadatak 4

S obzirom na skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ pronađite neki vektor koji je ortogonalan na vektore $u = (1, 1, 1)$ i $v = (1, 2, 0)$.

Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije

Neka je $x_1, x_2, x_3, \dots$ linearno nezavisan niz vektora u unitarnom prostoru U. Tada postoji ortonormiran niz $e_1, e_2, e_3, \dots$ u U takav da je $[\{x_1, x_2, \dots, x_k\}] = [\{e_1, e_2, \dots, e_k\}]$, $\forall k$. Uz dodatan uvjet da je $(e_k|x_k) > 0$, $\forall k$, ortonormiran niz je jedinstven.

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{\|x_1\|} x_1 \\
e_2 &= \frac{1}{\|e_2'\|} e_2', \quad e_2' = x_2 - (x_2|e_1)e_1 \\
&\vdots \\
e_k &= \frac{1}{\|e_k'\|} e_k', \quad e_k' = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k|e_i)e_i
\end{aligned}
$$

Zadatak 1

Ortonormirajte bazu

$$\{(1,1,1),(1,0,1),(2,0,0)\}$$

od $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 2

Na $C_{[-1,1]}$ je zadan skalarni produkt

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Ortonormirajte skup $\{f_1, f_2\}$, gdje je $f_1(x) = 1$ i $f_2(x) = x$.

Zadatak 3

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^5$ potprostor N je razapet vektorima $a = (1, 1, 0, 0, 0)$, $b = (0, 0, 1, 0, 0)$, $c = (-1, -1, -1, 0, 0)$ i $d = (0, 0, 0, 0, 2)$. Odredite ortonormiranu bazu za N i za $N^{\perp}$.

Zadatak 4

Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije ortonormirajte skup

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

u unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $(A, B) = tr(B^T A)$.