M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 12

24.1.2023.

predavač: prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Teorem

Neka su X i Y konačnodimenzionalni unitarni prostori. Za svaki $A \in L(X, Y)$ postoji jedinstveni $A^* \in L(Y, X)$ takav da je

$$(Ax|y) = (x|A^*y), \ \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Vrijedi:

a) $A^{**} = A, \ \forall A \in L(X, Y)$.

b) $A \mapsto A^*$ je antilinearna bijekcija s $L(X, Y)$ u $L(Y, X)$.

c) Neka su X, Y i Z konačnodimenzionalni unitarni prostori. Za $A \in L(X, Y)$ i $B \in L(Y, Z)$ je $(BA)^* = A^*B^*$.

Operator A^* nazivamo **adjungirani operator** operatora A.

Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor. Kažemo da je operator $A \in L(U)$:

- **hermitski**, ako je $A^* = A$
- **antihermitski**, ako je $A^* = -A$
- **unitaran**, ako je $AA^* = A^*A = I$, tj. A je invertibilan u $L(U)$ i $A^{-1} = A^*$
- **normalan**, ako je $AA^* = A^*A$.

Primijetimo da su i hermitski i antihermitski i unitarni operatori normalni operatori.

Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor. Kažemo da je operator $A \in L(U)$:

- **hermitski**, ako je $A^* = A$
- **antihermitski**, ako je $A^* = -A$
- **unitaran**, ako je $AA^* = A^*A = I$, tj. A je invertibilan u $L(U)$ i $A^{-1} = A^*$
- **normalan**, ako je $AA^* = A^*A$.

Primijetimo da su i hermitski i antihermitski i unitarni operatori normalni operatori.

Propozicija

Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je $A \in L(U)$. Ako je operator A normalan i $Ax = \alpha x$, za $x \in U$ i $\alpha \in \mathbb{C}$, onda je $A^* x = \overline{\alpha} x$.

Zadatak 1

Neka je A normalan operator. Pokažite da je tada

$$\mathrm{Im}(A - \lambda I) \perp \mathrm{Ker}(A - \lambda I).$$

Zadatak 2

Neka je U konačnodimenzionalan unitarni prostor. Dokažite da je

$$\mathrm{Ker}(A^*A) = \mathrm{Ker}(A), \ \forall A \in L(U).$$

Teorem o ortogonalnoj projekciji

Neka je X unitaran prostor i Y konačnodimenzionalan potprostor od X. Tada je $X = Y \dot{+} Y^{\perp}$, tj. za svaki vektor $x \in X$ postoje jedinstveni vektori $y \in Y$ i $z \in Y^{\perp}$ takvi da je $x = y + z$. Nadalje, ako je X konačnodimenzionalan, vrijedi $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$.

Propozicija

Neka su X i Y konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(X, Y)$. Tada vrijedi:

$$\mathrm{Ker}A = (\mathrm{Im}A^*)^{\perp}, \ \ \mathrm{Im}A = (\mathrm{Ker}A^*)^{\perp},$$

$$\mathrm{Ker}A^* = (\mathrm{Im}A)^{\perp}, \ \ \mathrm{Im}A^* = (\mathrm{Ker}A)^{\perp}.$$

Teorem o ortogonalnoj projekciji

Neka je X unitaran prostor i Y konačnodimenzionalan potprostor od X. Tada je $X = Y \dot{+} Y^{\perp}$, tj. za svaki vektor $x \in X$ postoje jedinstveni vektori $y \in Y$ i $z \in Y^{\perp}$ takvi da je $x = y + z$. Nadalje, ako je X konačnodimenzionalan, vrijedi $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$.

Propozicija

Neka su X i Y konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(X, Y)$. Tada vrijedi:

$$\mathrm{Ker}A = (\mathrm{Im}A^*)^{\perp}, \ \ \mathrm{Im}A = (\mathrm{Ker}A^*)^{\perp},$$

$$\mathrm{Ker}A^* = (\mathrm{Im}A)^{\perp}, \ \ \mathrm{Im}A^* = (\mathrm{Ker}A)^{\perp}.$$

Zadatak 3

Neka je U konačnodimenzionalan unitarni prostor. Dokažite da je

$$\mathrm{Im}(A^*A) = \mathrm{Im}(A^*),\ \forall A \in L(U).$$

Zadatak 4

Neka je U konačnodimenzionalan unitarni prostor i $A \in L(U)$ hermitski. Dokažite da je tada $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Zadatak 5

Neka je U konačnodimenzionalan unitarni prostor. Dokažite da je $A \in L(U)$ unitaran operator ako i samo ako vrijedi

$$(Ax|Ay) = (x|y), \ \forall x, y \in U.$$