M099 Vektorski prostori

Tema: Vježbe 8

13.12.2022.

predavač: prof.dr.sc. Ivan Matić

asistent: dr.sc. Darija Brajković Zorić

Invarijantni potprostori

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K i neka je $A \in L(V)$. Kažemo da je potprostor $W \leq V$ A-**invarijantan** ili **invarijantan s obzirom na operator** A ako vrijedi

$$Aw \in W, \ \ \forall w \in W,$$

odnosno ako je $AW \subseteq W$.

Napomena

Ako je $A \in L(V)$ i W A-invarijantan potprostor od V, onda je restrikcija $A|_W \in L(W)$.

Invarijantni potprostori

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem K i neka je $A \in L(V)$. Kažemo da je potprostor $W \leq V$ A**-invarijantan** ili **invarijantan s obzirom na operator** A ako vrijedi

$$Aw \in W, \ \ \forall w \in W,$$

odnosno ako je $AW \subseteq W$.

Napomena

Ako je $A \in L(V)$ i W A-invarijantan potprostor od V, onda je restrikcija $A|_W \in L(W)$.

Neka je $V = X \dot{+} Y$. Tada za svaki $v \in V$ postoje jedinstveni $x \in X$ i $y \in Y$ takvi da je

$$v = x + y.$$

Definiramo operator $P : V \to V$ s

$$P(v) = x.$$

Takav P nazivamo **projektor prostora V na potprostor X duž potprostora Y**.

Vrijedi $P \in L(V), \operatorname{Im} P = X, \operatorname{Ker} P = Y$.

Propozicija

Operator $P \in L(V)$ je projektor ako i samo ako je $P^2 = P$. Tada je $V = \mathrm{Im}P \dot{+} \mathrm{Ker}P$.

Zadatak 1

Neka je $A \in L(V)$ i $\lambda \in \sigma(A)$. Pokažite da je tada V_λ A-invarijantan.

Zadatak 2

Neka su $A, B \in L(V)$ i W svojstveni potprostor od A. Dokažite da ako A i B komutiraju, tada je W B-invarijantan.

Zadatak 3

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ te neka je A projektor. Dokažite:

(a) $x \in \mathrm{Im}(A) \Leftrightarrow Ax = x$.

(b) $V = \mathrm{Im}(A) \dot{+} \mathrm{Ker}(A)$.

Nilpotentni operatori

Neka je V vektorski prostor nad poljem K i $A \in L(V)$.

Definicija

Kažemo da je operator A **nilpotentan** ako postoji prirodan broj n takav da je $A^n = 0$.

Definicija

Neka je $A \in L(V)$ nilpotentan operator. Najmanji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $A^n = 0$ nazivamo **indeks nilpotentnosti operatora** A.

Propozicija

Neka je $A \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa nilpotentnosti k i neka je $v \in V$ takav da je $A^{k-1}v \neq 0$. Tada su vektori

$$v, Av, A^2v, \ldots, A^{k-1}v$$

linearno nezavisni. Posebno, ako je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, onda je $k \leq \dim V$.

Nilpotentni operatori indeksa $k < n = \dim V$

$$
\begin{aligned}
V &= (\mathrm{Ker}\, N^k \dot{-} \mathrm{Ker}\, N^{k-1}) \dot{+} (\mathrm{Ker}\, N^{k-1} \dot{-} \mathrm{Ker}\, N^{k-2}) \dot{+} \ldots \dot{+} \\
&\quad \dot{+} (\mathrm{Ker}\, N^2 \dot{-} \mathrm{Ker}\, N) \dot{+} \mathrm{Ker}\, N
\end{aligned}
$$

Zadatak 1

Neka je $A \in L(\mathbb{R}^4)$ zadan matricom u kanonskoj bazi. Pronađite bazu od $\mathbb{R}^4$ u kojoj je matrica od A blok dijagonalna s dijagonalnim blokovima koji su elementarne Jordanove klijetke.

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$