



## Pravila

Pismeni ispit se piše 2 sata. Da bi se pristupilo usmenom dijelu ispita, potrebno je skupiti barem 40 od 100 mogućih bodova na pismenom ispitu. Ispit se predaje s papirom sa zadacima i radnim listovima. Rezultati ispita će biti objavljeni na web stranici kolegija. Sve tvrdnje potrebno je detaljno obrazložiti, inače neće biti bodovane. Dozvoljeno je korištenje jedino pribora za pisanje i kalkulatora.

---

### Zadatak 1 (20 bodova).

Dan je skup

$$L = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : (1 - i)\bar{z}_1 - z_3 = 0, 2z_2i = 0\}.$$

Ispitajte je li  $L$  realan vektorski potprostor od  $\mathbb{C}^3$  te je li  $L$  kompleksan vektorski potprostor od  $\mathbb{C}^3$ . Ukoliko je, odredite neku bazu i dimenziju od  $L$ , a ako nije, pokažite to kontraprimjerom.

---

### Zadatak 2 (20 bodova).

Dan je linearan operator  $A \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$  kojemu je pridružena matrica

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

gdje je  $e$  kanonska baza od  $\mathbb{R}^3$  i  $f = \{1, i\}$ . Odredite matricu operatora  $A$  u paru baza  $(f', e')$  i u paru baza  $(f', e)$ , ako je  $f' = \{2 - i, -i\}$  i  $e' = \{(0, 1, 2), (3, -2, 1), (-1, 1, 2)\}$ .

---

### Zadatak 3 (30 bodova).

Odredite  $\sqrt{A}$  u polaznoj bazi ako je operator  $A \in L(\mathbb{C}^3)$  zadan s

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

---

### Zadatak 4 (15 bodova).

Neka je  $A \in L(\mathbb{C}^8)$  za kojeg vrijedi:  $k_A(\lambda) = (\lambda + 2)^3(\lambda - 2)^5$ ,  $d(A - 2I) = 3$  i  $\deg \mu_A(\lambda) = 5$ . Odredite sve moguće Jordanove forme operatora  $A \in L(\mathbb{C}^8)$ .

---

### Zadatak 5 (15 bodova).

Neka je  $U$  konačnodimenzionalan unitarni prostor,  $A \in L(U)$  i  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Neka je  $\text{Im}(A - \lambda I) \perp \text{Ker}(A - \lambda I)$  te neka je  $x \in U$  i  $y$  iz jezgre operatora  $A - \lambda I$ . Dokažite ili opovrgnite: Tada je

$$(Ax|y) = \lambda(x|y).$$