PISMENI ISPIT

8.2.2023.

Pravila

Pismeni ispit se piše 2 sata. Da bi se pristupilo usmenom dijelu ispita, potrebno je skupiti barem 40 od 100 mogućih bodova na pismenom ispitu. Ispit se predaje s papirom sa zadacima i radnim listovima. Rezultati ispita će biti objavljeni na web stranici kolegija. Sve tvrdnje potrebno je detaljno obrazložiti, inače neće biti bodovane. Dozvoljeno je korištenje jedino pribora za pisanje i kalkulatora.

Zadatak 1. Dan je skup $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 = -x_1\}$ i realan vektorski prostor $\mathbb{C}^2$.

(a) **(10 bodova)** Pokažite da je V realan vektorski prostor te odredite neku bazu e i dimenziju od V.

(b) **(15 bodova)** Pokažite da je operator $A \colon V \to \mathbb{C}^2$ definiran s $A(x_1, x_2, x_3) = (x_2, ix_1 + x_3)$ linearan. Odredite jezgru, sliku, rang i defekt operatora A te koristeći dobiveno zaključite je li operator A monomorfizam, epimorfizam i izomorfizam.

(c) **(10 bodova)** Odredite dimenziju od $L(V, \mathbb{C}^2)$ i matrični zapis operatora A u paru baza (f, e), pri čemu je $f = \{(1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\}$ baza od $\mathbb{C}^2$, a e baza od V iz (a).

Zadatak 2 (15 bodova).
Neka su $e = \{(1,0,0), (0,2,0), (0,0,-1)\}$ i $e' = \{(1,2,1), (0,2,-1), (3,0,1)\}$ baze realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ te $f = \{2, i\}$ i $f' = \{4, 2-i\}$ baze realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}$. Odredite matrice operatora $A \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ definiranog s $Ae_1 = 2f_1 - 2f_2$, $Ae_2 = f_2$ i $Ae_3 = 3f_1 + f_2$ u parovima baza (f, e), (f', e') i (f', e).

Zadatak 3 (30 bodova).
Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadanog s

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

te odredite $\cos A$ u Jordanovoj bazi.

Zadatak 4 (10 bodova).
Ako je na $C_{[0,1]}$ zadan skalarni produkt $(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, odredite parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da $f_1(x) = x^2$ i $f_2(x) = \lambda - 2x$ budu ortogonalni.

Zadatak 5 (10 bodova).
Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(U)$ hermitski operator takav da je $A^2 = 0$. Dokažite da je tada $A = 0$.