Pravila

Kolokvij se piše 120 min te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima (sve papire koji se predaju potrebno je potpisati). Studentima koji su na oba kolokvija ukupno postigli barem 80 bodova priznaje se pismeni dio ispita. Sve tvrdnje potrebno je detaljno obrazložiti, inače neće biti bodovane. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i pribora za pisanje.

Zadatak 1 (5+10+10 bodova).
Dan je skup $R = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ i preslikavanje $\varphi\colon R \to \mathbb{Z}$ definirano s

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}\right) = x + y.$$

(a) Pokažite da je R prsten.

(b) Ispitajte je li φ homomorfizam prstena.

(c) Ispitajte je li $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$ ideal u R.

Zadatak 2 (10 + 10 + 10 bodova).

(a) Odredite sve idempotentne elemente u prstenu $\mathbb{Z}_{12}$.

(b) Ispitajte je li ideal $I = (x^2 + 9)$ prost i maksimalan ideal u $\mathbb{C}[x]$.

(c) Ispitajte je li polinom $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ ireducibilan nad $\mathbb{Q}$ te je li polinom $g(x) = x^2 + 6x - 21$ ireducibilan nad $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$.

Zadatak 3 (10 bodova).
Odredite stupanj i bazu proširenja $\mathbb{Q}(i\sqrt{5}, \sqrt[3]{2})$ nad $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Zadatak 4 (15 bodova).
Neka je stupanj proširenja polja L nad poljem K jednak 11 i neka je $\alpha \in L$ i $\alpha \notin K$. Dokažite ili opovrgnite: Polje $K(\alpha)$ jednako je polju L.

Zadatak 5 (20 bodova). Odredite Galoisovu grupu polinoma $f(x) = x^4 - 49$ nad poljem $\mathbb{Q}$.