Kolokvij 1

15.12.2021.

Pravila

Kolokvij se piše 120 min te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima (sve papire koji se predaju potrebno je potpisati). Studentima koji su na svakom od dva kolokvija postigli barem 20 bodova, a ukupno barem 80 bodova priznaje se pismeni dio ispita. Sve tvrdnje potrebno je detaljno obrazložiti, inače neće biti bodovane. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i pribora za pisanje.

Zadatak 1. Dan je skup $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 = -x_1\}$ i realan vektorski prostor $\mathbb{C}^2$.

(a) **(10 bodova)** Pokažite da je V realan vektorski prostor te odredite neku bazu e i dimenziju od V.

(b) **(10 bodova)** Pokažite da je operator $A\colon V \to \mathbb{C}^2$ definiran s $A(x_1, x_2, x_3) = (x_2, ix_1 + x_3)$ linearan.

(c) **(10 bodova)** Odredite dimenziju od $L(V, \mathbb{C}^2)$ i matrični zapis operatora A u paru baza (f, e), pri čemu je $f = \{(1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\}$ baza od $\mathbb{C}^2$, a e baza od V iz (a).

(d) **(15 bodova)** Odredite jezgru, sliku, rang i defekt operatora A te koristeći dobiveno zaključite je li operator A monomorfizam, epimorfizam i izomorfizam.

Zadatak 2. Neka su W_1 i W_2 potprostori od $\mathbb{R}^{10}$ takvi da je $\dim W_1 = \dim W_2 = 6$.

(a) **(10 bodova)** Dokažite da je tada $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

(b) **(10 bodova)** Odredite sve moguće dimenzije presjeka $W_1 \cap W_2$.

Zadatak 3 (25 bodova).
Neka su $e = \{(1,0,0), (0,2,0), (0,0,-1)\}$ i $e' = \{(1,2,1), (0,2,-1), (3,0,1)\}$ baze realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ te $f = \{2, i\}$ i $f' = \{4, 2-i\}$ baze realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}$. Odredite matrice operatora $A \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ definiranog s $Ae_1 = 2f_1 - 2f_2$, $Ae_2 = f_2$ i $Ae_3 = 3f_1 + f_2$ u parovima baza (f, e), (f', e') i (f', e).

Zadatak 4 (10 bodova).
Neka je $e = \{1, 5 - x, 2 + x - 2x^2\}$ baza vektorskog prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ i neka je e' dualna baza baze e. Odredite $e'_1(2x^2)$, $e'_2(2x^2)$ i $e'_3(2x^2)$.