Pravila

Kolokvij se piše 120 min te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima (sve papire koji se predaju potrebno je potpisati). Studentima koji su na svakom od dva kolokvija postigli barem 20 bodova, a ukupno barem 80 bodova priznaje se pismeni dio ispita. Sve tvrdnje potrebno je detaljno obrazložiti, inače neće biti bodovane. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i pribora za pisanje.

Zadatak 1 (15 bodova).
Odredite spektar te karakteristični i minimalni polinom operatora $A \in L(\mathbb{R}^5)$ koji je zadan matricom

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2 (25 bodova).
Operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadan je s $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ i njegov je karakteristični polinom $k_A(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda-2)$. Odredite bazu u kojoj je matrica operatora A blok-dijagonalna, zapišite matricu A u toj bazi te koristeći dobiveno odredite Jordanovu formu matrice danog operatora.

Zadatak 3 (20 bodova).
Dan je operator $A \in L(\mathbb{C}^6)$ za kojeg vrijedi: $k_A(\lambda) = (\lambda+3)^2(\lambda-4)^4$, $\deg \mu_A(\lambda) = 4$ i $d(A-4I) = 2$. Odredite sve moguće Jordanove forme matrice operatora A i odgovarajuće minimalne polinome te za svaku moguću Jordanovu formu odredite $d(A+3I)$.

Zadatak 4. (15 bodova) Odredite $A + A^2$ u Jordanovoj bazi ako je $A \in L(\mathbb{C}^3)$ dan s $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ te odredite karakteristični i minimalni polinom od A.

Zadatak 5.

a) **(10 bodova)** Ako je na $C_{[0,1]}$ zadan skalarni produkt

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx,$$

odredite parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da $f_1(x) = x^2$ i $f_2(x) = \lambda - 2x$ budu ortogonalni.

b) **(15 bodova)** Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(U)$ hermitski operator takav da je $A^2 = 0$. Dokažite da je tada $A = 0$.