ANALIZA VREMENSKIH NIZOVA

PRVI KOLOKVIJ 2019./2020.

Prije rješavanja izračunajte sljedeća dva broja i zapišite ih na papir na koji rješavate kolokvij:

$$\mathfrak{a} = (\text{predzadnja znamenka JMBAG-a} \mod 3) + 1,$$
$$\mathfrak{b} = (\text{zadnja znamenka JMBAG-a} \mod 3) + 1,$$

(mod 3 je ostatak dijeljenja s 3). Npr. student s JMBAG 0123456789 ima $\mathfrak{a} = 8 \mod 3 + 1 = 3$ i $\mathfrak{b} = 9 \mod 3 + 1 = 1$. Te brojeve koristite u zadacima tamo gdje se pojavljuju.

ZADATAK 1: [25 bodova]
Neka su $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ i $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ dva stacionarna procesa takva da je $Cov(X_t, Y_s) = 0$ za sve $t, s \in \mathbb{Z}$, te neka su $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Je li proces $\{V_t, t \in \mathbb{Z}\}$

$$V_t = c_1 X_{t+\mathfrak{a}} + c_2 Y_{t-\mathfrak{b}}$$

stacionaran? Odredite njegovu funkciju autokovarijanci.

ZADATAK 2: [15+10=25 bodova]
Neka je $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ proces definiran s $X_t = (-1)^{\mathfrak{a}+t} X$ za neku slučajnu varijablu $EX = 0$ i $EX^2 < \infty$.

(a) Je li $\{X_t\}$ slabo stacionaran?

(b) Pokažite da je $\{X_t\}$ deterministički proces.

ZADATAK 3: [15+10=25 bodova]
Neka je $\{X_t\}$ proces definiran s

$$X_t = (X_{t-1})^{\frac{1}{\mathfrak{a}}} e^{\mathfrak{b}t^2 + Y_t},$$

gdje je

$$Y_t = Y_{t-1} + U_t$$
$$U_t = U_{t-1} + Z_t - \frac{1}{\mathfrak{b}} Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2).$$

(a) Odredite niz transformacija kojima od $\{X_t\}$ možemo dobiti stacionaran ARMA proces.

(b) O kojem ARMA procesu se radi? Je li kauzalan i invertibilan?

ZADATAK 4: [15+10=25 bodova]
Neka je proces $\{X_t\}$ zadan s

$$X_t = Z_t + \frac{1}{1+\mathfrak{a}} Z_{t-1} X_{t-1-\mathfrak{b}},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim IID(0,1)$ i Z_t nezavisna od X_s za $s < t$. Može se pokazati da je $\{X_t\}$ strogo stacionaran.

(a) Izračunajte ACVF.

(b) Odredite linearni proces koji ima istu ACVF.

Rješenja

ZADATAK 1: [25 bodova]
Treba povjerite uvjete definicije stacionarnog procesa. Prva dva uvjeta jednostavno slijede. Za kovarijancu treba samo imati na umu da očekivanje ne mora biti 0. Zbog nekoreliranosti $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ lako se dobije

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(V_t, V_{t+h}) &= \mathrm{E}\left[(c_1 X_{t+\mathfrak{a}} + c_2 Y_{t-\mathfrak{b}} - c_1 \mathrm{E}\, X_{t+\mathfrak{a}} - c_2 \mathrm{E}\, Y_{t-\mathfrak{b}})\,(c_1 X_{t+h+\mathfrak{a}} + c_2 Y_{t+h-\mathfrak{b}} - c_1 \mathrm{E}\, X_{t+h+\mathfrak{a}} - c_2 \mathrm{E}\, Y_{t+h-\mathfrak{b}})\right] \\ &= c_1^2 \gamma_X(h) + c_2^2 \gamma_Y(h)\end{aligned}$$

što daje ACVF (neovisno o $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$)i povlači stacionarnost.

ZADATAK 2: [15+10=25 bodova]

(a) Prva dva uvjeta jednostavno, očekivanje je 0 i onda

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathrm{E}\, X_t X_{t+h} = (-1)^{2(\mathfrak{a}+t)}(-1)^h\, \mathrm{E}\, X^2 = (-1)^h\, \mathrm{E}\, X^2$$

što ne ovisi o t pa je stacionaran.

(b) Kako je $X_{n+1} = -X_n$, najbolje što linearno možemo reći od X_{n+1} na osnovu $X_n, X_{n-1}, \ldots$ je $-X_n$ pa je $\mathrm{E}(X_{n+1} - \Pi_n X_{n+1})^2$ i prcoces je deterministički.

ZADATAK 3: [15+10=25 bodova]
Treba prvo logaritmirati što daje

$$V_t := \log X_t = \frac{1}{\mathfrak{a}} \log X_{t-1} + \mathfrak{b} t^2 + Y_t = \frac{1}{\mathfrak{a}} V_{t-1} + \mathfrak{b} t^2 + Y_t.$$

$\{V_t\}$ nije stacionaran zbog t^2 ali i zbog nestacionarnosti od $\{Y_t\}$ koju ne možemo eliminirati oduzimanjem trenda. Zato diferenciramo

$$\Delta V_t = \frac{1}{\mathfrak{a}} \Delta V_{t-1} + \mathfrak{b} t^2 - \mathfrak{b}(t-1)^2 + Y_t - Y_{t-1} = \frac{1}{\mathfrak{a}} \Delta V_{t-1} + 2\mathfrak{b} t - \mathfrak{b} + U_t.$$

$\{\Delta V_t\}$ nije stacionaran zbog trenda, ali i zbog toga što $\{U_t\}$ nije stacionaran pa opet diferenciramo

$$\Delta^2 V_t = \frac{1}{\mathfrak{a}} \Delta^2 V_{t-1} + 2\mathfrak{b} + U_t - U_{t-1} = \frac{1}{\mathfrak{a}} \Delta^2 V_{t-1} + 2\mathfrak{b} + Z_t - \frac{1}{\mathfrak{b}} Z_{t-1}$$

što uz $W_t = \Delta^2 V_t$ daje

$$W_t = \frac{1}{\mathfrak{a}} W_{t-1} + 2\mathfrak{b} + Z_t - \frac{1}{\mathfrak{b}} Z_{t-1}.$$

- Ako je $\mathfrak{a} > 1$ to je $ARMA(1,1)$ proces s konstantnim članom koji je kauzalan u tom slučaju, a invertibilan je ako je $\mathfrak{b} > 1$.
- Ako je $\mathfrak{a} = 1$, postoji jedinični korijen pa treba još jednom diferencirati što daje

$$\Delta W_t = 2\mathfrak{b} + Z_t - \frac{1}{\mathfrak{b}} Z_{t-1}$$

  što je $MA(1)$ proces koji je invertibilan ako je $\mathfrak{b} > 1$.

ZADATAK 4: [15+10=25 bodova]
Lako se vidi da je očekivanje 0, pa imamo za $h \geq 1$

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \mathrm{E}\, Z_t X_{t-h} + \frac{1}{1+\mathfrak{a}}\, \mathrm{E}\, Z_{t-1} X_{t-1-\frac{1}{\mathfrak{b}}} X_{t-h} = 0,$$

po pretpostavci zadatka. Za $h = 0$ je zbog stacionarnosti

$$\operatorname{Var} X_t = \operatorname{E} X_t^2 = \operatorname{E} Z_t^2 + 2\frac{1}{1+\boldsymbol{\mathfrak{a}}} \operatorname{E} Z_{t-1} Z_{t-1} X_{t-1-\frac{1}{\mathfrak{b}}} + \frac{1}{(1+\boldsymbol{\mathfrak{a}})^2} \operatorname{E} Z_{t-1}^2 \operatorname{E} X_{t-1-\frac{1}{\mathfrak{b}}}^2 = 1+0+\frac{1}{(1+\boldsymbol{\mathfrak{a}})^2} 1 \cdot \operatorname{Var} X_t$$

iz čega slijedi

$$\operatorname{Var} X_t = \frac{(1+a)^2}{a^2+2a}.$$

pa je $\{X_t\} \sim WN\left(0, \frac{(1+a)^2}{a^2+2a}\right)$ što daje i odgovor pod (b) - za linearan proces uzmemo bijeli šum.