ANALIZA VREMENSKIH NIZOVA

Drugi kolokvij 2019./2020.

Prije rješavanja izračunajte sljedeća dva broja i zapišite ih na papir na koji rješavate kolokvij:

$$\mathfrak{a} = (\text{predzadnja znamenka JMBAG-a} \mod 3) + 1,$$
$$\mathfrak{b} = (\text{zadnja znamenka JMBAG-a} \mod 3) + 1,$$

(mod 3 je ostatak dijeljenja s 3). Npr. student s JMBAG 0123456789 ima $\mathfrak{a} = 8 \mod 3 + 1 = 3$ i $\mathfrak{b} = 9 \mod 3 + 1 = 1$. Te brojeve koristite u zadacima tamo gdje se pojavljuju.

Zadatak 1: [15+10=25 bodova]
Zadan je proces $\{X_t\}$

$$X_t = U_t W_t + (1 - U_t) W_{t-2\mathfrak{b}}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

gdje je $\{W_t\} \sim WN(0,1)$ i $\{U_t\}$ nezavisne jednako distribuirane Bernoullijeve, nezavisne od $\{W_t\}$, takve da je $P(U_t = 1) = 1 - P(U_t = 0) = 1/\mathfrak{a}$.

(a) Odredite ACVF procesa $\{X_t\}$. Je li $\{X_t\}$ stacionaran?

(b) Koji SARIMA proces ima takvu ACVF? Odredite njegovu spektralnu gustoću.

Zadatak 2: [9+9+7=25 bodova]
Neka je $\{X_t\}$ strogo stacionaran proces definiran s

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t^2 = \mathfrak{a} - 1 + \mathfrak{b}\frac{X_{t-1}^2}{\sigma_{t-1}^2},$$

gdje je $\{\varepsilon_t\} \sim IID(0,1)$ i ε_t nezavisna od X_{t-j} za $j \geq 1$ i nezavisna od σ_t.

(a) Izračunajte
$$\operatorname{Var}(X_{n+1} \mid X_n, X_{n-1}, \dots).$$
Ima li $\{X_t\}$ svojstvo uvjetne heteroskedastičnosti?

(b) Izračunajte
$$\operatorname{Var}(X_{n+2} \mid X_n, X_{n-1}, \dots).$$
Koristeći dobiveni rezultat, odgovorite: ako je $\{X_t\}$ model za dnevne log-povrate financijske imovine, hoće li veliki pad (ili rast) danas imati efekta na volatilnost za dva dana?

(c) Riješite (b) dio za $\{X_t\}$ $ARCH(1)$ proces. Usporedite i komentirajte.

Zadatak 3: [20 bodova]
Neka je model za kretanje mjesečne temperature $SARIMA(0,0,0,) \times (1,1,0)_{12}$ s koeficijentom $\varphi_1 = 1/\mathfrak{a}$. Podaci o temperaturama poznati su do prosinca 2019. godine (uključujući). U siječnju 2019. godine temperatura je bila 7, a u siječnju 2018. godine 5. Odredite odrezanu predikciju za siječanj 2020. godine.

Zadatak 4: [8+8+7+7=30 bodova]
Neka je $\{(X_t, Y_t)^T\}$ dvodimenzionalni proces zadan s

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix},$$

gdje je $\{(Z_{1,t}, Z_{2,t})^T\}$ dvodimenzionalan bijeli šum.

(a) Pokažite da $\{(X_t, Y_t)^T\}$ nije stacionaran.

(b) Neka je

$$U_t = X_t - 2Y_t.$$

Pokažite da $\{U_t\}$ postiže stacionarnost jednim diferenciranjem.

(c) Izrazite X_t i Y_t koristeći U_{t-1} (i bijeli šum). Zaključite da su $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ procesi koji postižu stacionarnost jednim diferenciranjem.

(d) Jesu li $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ kointegrirani?