ANALIZA VREMENSKIH NIZOVA

Drugi kolokvij 2019./2020.

Prije rješavanja izračunajte sljedeća dva broja i zapišite ih na papir na koji rješavate kolokvij:

$$\mathfrak{a} = (\text{predzadnja znamenka JMBAG-a} \mod 3) + 1,$$
$$\mathfrak{b} = (\text{zadnja znamenka JMBAG-a} \mod 3) + 1,$$

(mod 3 je ostatak dijeljenja s 3). Npr. student s JMBAG 0123456789 ima $\mathfrak{a} = 8 \mod 3 + 1 = 3$ i $\mathfrak{b} = 9 \mod 3 + 1 = 1$. Te brojeve koristite u zadacima tamo gdje se pojavljuju.

Zadatak 1: [15+10=25 bodova]
Zadan je proces $\{X_t\}$

$$X_t = U_t W_t + (1 - U_t) W_{t-2\mathfrak{b}}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

gdje je $\{W_t\} \sim WN(0,1)$ i $\{U_t\}$ nezavisne jednako distribuirane Bernoullijeve, nezavisne od $\{W_t\}$, takve da je $P(U_t = 1) = 1 - P(U_t = 0) = 1/\mathfrak{a}$.

(a) Odredite ACVF procesa $\{X_t\}$. Je li $\{X_t\}$ stacionaran?

(b) Koji SARIMA proces ima takvu ACVF? Odredite njegovu spektralnu gustoću.

Zadatak 2: [9+9+7=25 bodova]
Neka je $\{X_t\}$ strogo stacionaran proces definiran s

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t^2 = \mathfrak{a} - 1 + \mathfrak{b} \frac{X_{t-1}^2}{\sigma_{t-1}^2},$$

gdje je $\{\varepsilon_t\} \sim IID(0,1)$ i ε_t nezavisna od X_{t-j} za $j \geq 1$ i nezavisna od σ_t.

(a) Izračunajte

$$\operatorname{Var}(X_{n+1} \mid X_n, X_{n-1}, \dots).$$

Ima li $\{X_t\}$ svojstvo uvjetne heteroskedastičnosti?

(b) Izračunajte

$$\operatorname{Var}(X_{n+2} \mid X_n, X_{n-1}, \dots).$$

Koristeći dobiveni rezultat, odgovorite: ako je $\{X_t\}$ model za dnevne log-povrate financijske imovine, hoće li veliki pad (ili rast) danas imati efekta na volatilnost za dva dana?

(c) Riješite (b) dio za $\{X_t\}$ $ARCH(1)$ proces. Usporedite i komentirajte.

Zadatak 3: [20 bodova]
Neka je model za kretanje mjesečne temperature $SARIMA(0,0,0,) \times (1,1,0)_{12}$ s koeficijentom $\varphi_1 = 1/\mathfrak{a}$. Podaci o temperaturama poznati su do prosinca 2019. godine (uključujući). U siječnju 2019. godine temperatura je bila 7, a u siječnju 2018. godine 5. Odredite odrezanu predikciju za siječanj 2020. godine.

Zadatak 4: [8+8+7+7=30 bodova]
Neka je $\{(X_t, Y_t)^T\}$ dvodimenzionalni proces zadan s

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix},$$

gdje je $\{(Z_{1,t}, Z_{2,t})^T\}$ dvodimenzionalan bijeli šum.

(a) Pokažite da $\{(X_t, Y_t)^T\}$ nije stacionaran.

(b) Neka je

$$U_t = X_t - 2Y_t.$$

Pokažite da $\{U_t\}$ postiže stacionarnost jednim diferenciranjem.

(c) Izrazite X_t i Y_t koristeći U_{t-1}. Zaključite da su $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ procesi koji postižu stacionarnost jednim diferenciranjem.

(d) Jesu li $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ kointegrirani?

Rješenja

ZADATAK 1:

Za $\mathfrak{a} = 1$ zadatak je gotovo trivijalan jer $U_t = 1$ g.s. pa je $X_t = W_t \sim WN(0, 1)$. To odgovara SARIMA procesu sa svim redovima jednakim 0 i proizvoljnim periodom, a spektralna gustoća je konstantna.

(a) Kako je $\mathrm{E}\, X_t = 0$ i $\mathrm{E}\, U_t = 1/\mathfrak{a}$, slijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= \mathrm{E}\, X_t X_{t+h} = \mathrm{E}\left[(U_t W_t + (1-U_t)W_{t-2\mathfrak{b}})\,(U_{t+h}W_{t+h} + (1-U_{t+h})W_{t+h-2\mathfrak{b}})\right] \\
&= \gamma_W(h)\,\mathrm{E}[U_tU_{t+h}] + \gamma_W(h-2\mathfrak{b})\,(\mathrm{E}[U_t] - \mathrm{E}[U_tU_{t+h}]) \\
&\quad + \gamma_W(h+2\mathfrak{b})\,(\mathrm{E}[U_{t+h}] - \mathrm{E}[U_tU_{t+h}]) + \gamma_W(h)\,(1 - \mathrm{E}[U_t] - \mathrm{E}[U_{t+h}] + \mathrm{E}[U_tU_{t+h}]) \\
&= \gamma_W(h)\,\mathrm{E}[U_tU_{t+h}] + \gamma_W(h-2\mathfrak{b})\left(\frac{1}{\mathfrak{a}} - \mathrm{E}[U_tU_{t+h}]\right) \\
&\quad + \gamma_W(h+2\mathfrak{b})\left(\frac{1}{\mathfrak{a}} - \mathrm{E}[U_tU_{t+h}]\right) + \gamma_W(h)\left(1 - \frac{2}{\mathfrak{a}} + \mathrm{E}[U_tU_{t+h}]\right) \\
&= \gamma_W(h)\left(1 - \frac{2}{\mathfrak{a}} + \mathrm{E}[U_tU_{t+h}]\right) + \left(\frac{1}{\mathfrak{a}} - \mathrm{E}[U_tU_{t+h}]\right)(\gamma_W(h-2\mathfrak{b}) + \gamma_W(h+2\mathfrak{b}))\,.
\end{aligned}$$

Nadalje, $\{W_t\} \sim WN(0, 1)$, a

$$\mathrm{E}[U_tU_{t+h}] = \begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{a}}, & h = 0, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

pa slijedi

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \frac{1}{\mathfrak{a}}, & |h| = 2\mathfrak{b}, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Slijedi da je $\{X_t\}$ stacionaran.

(b) Radi se o $SMA(1)_{2\mathfrak{b}}$ procesu, odnosno, $SARIMA(0,0,0) \times (0,0,1)_{2\mathfrak{b}}$. Spektralna gustoća je

$$f(\lambda) = \gamma(0) + 2\sum_{h=1}^{\infty} \cos(2\pi\lambda h)\gamma(h) = 1 + \frac{2}{\mathfrak{a}}\cos(4\mathfrak{b}\pi\lambda).$$

ZADATAK 2:

(a) Koristeći $\mathrm{E}\left[X_{n+1} \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right] = 0$ dobijemo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[X_{n+1} \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right] &= \mathrm{E}\left[X_{n+1}^2 \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right] = \mathrm{E}[\varepsilon_{n+1}^2]\,\mathrm{E}\left[(\mathfrak{a} - 1 + \mathfrak{b}X_n^2/\sigma_n^2) \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right] \\
&= \mathfrak{a} - 1 + \mathfrak{b}X_n^2/\sigma_n^2,
\end{aligned}$$

jer je X_n^2/σ_n^2 izmjeriva u odnosu na $X_n, X_{n-1}, \ldots$. Zaključujemo da postoji svojstvo uvjetne heteroskedastičnosti.

(b) Imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[X_{n+2} \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right] &= \mathrm{E}\left[\varepsilon_{n+2}^2\sigma_{n+2}^2 \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right] = \mathrm{E}\left[(\mathfrak{a} - 1 + \mathfrak{b}X_{n+1}^2/\sigma_{n+1}^2) \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right] \\
&= \mathfrak{a} - 1 + \mathfrak{b}\,\mathrm{E}\left[\varepsilon_{n+1}^2 \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right] \\
&= \mathfrak{a} - 1 + \mathfrak{b},
\end{aligned}$$

što ne ovisi o X_n pa velika promjena X_n ne utječe na X_{n+2}.

(c) Za $ARCH(1)$ proces dobijemo

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[X_{n+2} \mid X_n, X_{n-1}, \dots] &= \operatorname{Var}[\alpha_0 + \alpha_1 X_{n+1} \mid X_n, X_{n-1}, \dots] \\ &= \operatorname{Var}\left[\alpha_0 + \alpha_1\alpha_0 + \alpha_1^2 X_n \mid X_n, X_{n-1}, \dots\right] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\alpha_0 + \alpha_1^2 X_n^2\end{aligned}$$

pa velika promjena X_n ima efekta i na X_{n+2}.

Zadatak 3:

Jednadžba modela je $(1-\varphi_1 B^{12})(1-B^{12})X_t = Z_t$ iz čega slijedi

$$X_t = (1+\varphi_1)Xt - 12\varphi_1 X_{t-24} + Z_t$$

i

$$\Pi_n' X_{n+1} = (1+\varphi_1)Xn + 1 - 12\varphi_1 X_{n+1-24} + Z_t$$

Ako je trenutak n prosinac 2019., onda

- $n+1$ je siječanj 2020.,
- $n+1-12$ je siječanj 2019.,
- $n+1-24$ je siječanj 2018.

Na osnovu podataka iz zadatka imamo

$$\Pi_n' X_{n+1} = 7 + 2\varphi_1 = 7 + 2/\mathfrak{a}.$$

Za $\mathfrak{a} = 1$ proces je zapravo $SARIMA(0,0,0) \times (0,2,0)_{12}$ no prethodni izračun ostaje nepromijenjen.

Zadatak 4:

(a) Gledamo

$$\det \Phi(z) = \det(I - \Phi z) = \det \begin{bmatrix} 1 - z/2 & z \\ z/4 & 1 - z/2 \end{bmatrix} = 0$$

što daje nultočku $z = 1$ pa nije stacionaran.

(b) Definiciju procesa možemo zapisati i kao dvije jednadžbe

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{1}{2}X_{t-1} - Y_{t-1} + Z_{1,t}, \\ Y_t &= -\frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{2}Y_{t-1} + Z_{2,t}, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{1}{2}X_{t-1} - Y_{t-1} + Z_{1,t} + \frac{1}{2}X_{t-1} - Y_{t-1} - 2Z_{2,t} \\ &= X_{t-1} - 2Y_{t-1} + Z_{1,t} - 2Z_{2,t} \\ &= U_{t-1} + Z_{1,t} - 2Z_{2,t}, \end{aligned}$$

iz čega slijedi $U_t - U_{t-1} = Z_{1,t} - 2Z_{2,t}$ što je stacionaran proces jer je linearna kombinacija dva nezavisna bijela šuma.

(c) Uočimo da je

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{1}{2}(X_{t-1} - 2Y_{t-1}) + Z_{1,t} = \frac{1}{2}U_{t-1} + Z_{1,t}, \\ Y_t &= -\frac{1}{4}(X_{t-1} - 2Y_{t-1}) + Z_{2,t} = -\frac{1}{4}U_{t-1} + Z_{2,t}, \end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi jer $\{U_t\}$ postiže stacionarnost jednim diferenciranjem.

(d) $\{U_t\}$ je zajednički stohastički trend. I $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ su nestacionarni, postaju stacionarni diferenciranjem i ako promotrimo

$$X_t + 2Y_t = Z_{1,t} + 2Z_{2,t},$$

zaključujemo da je to stacionaran proces. Dakle, kointegrirani su.