Analiza vremenskih nizova

Dijelovi predavanja

Danijel Grahovac

Posljednja promjena: 24. veljače 2022.

Sadržaj

I Uvod

I.1. Osnovni pojmovi

Vremenski niz je niz podataka

$$x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n},$$

prikupljenih u uzastopnim vremenskim trenucima $T_0 = \{t_1, \dots, t_n\}$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ i $x_{t_i} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Zbog načina na koji prikupljamo podatke, skup vremenskih trenutaka T_0 će najčešće biti konačan skup pa govorimo o vremenskom nizu u **diskretnom vremenu**. Moguće je da vrijednost nekog procesa poznajemo u svakom trenutku pa u tom slučaju govorimo o vremenskom nizu u **neprekidnom vremenu** (npr. broj ljudi u trgovini tijekom radnog dana može biti poznat u svakom trenutku). U ovom kolegiju prvenstveno se bavimo vremenskim nizovima u diskretnom vremenu.

Skup T_0 može označavati dane, mjesece, godine, sate, minute, sekunde i sl. Vremenski trenuci mogu biti raspoređeni:

- ekvidistantno: $t_2 - t_1 = \cdots = t_n - t_{n-1}$,
- neekvidistantno.

Gotovo uvijek ćemo promatrati samo ekvidistantno raspoređene. U tom slučaju možemo bez smanjenja općenitosti podatke označiti kao

$$x_1, \dots, x_n.$$

Problem analize niza podataka $x_1, \dots, x_n$ već smo susreli u statistici. Tamo pretpostavljamo da je niz $x_1, \dots, x_n$ realizacija jednostavnog slučajnog uzorka $(X_1, \dots, X_n)$ – n.j.d. niza slučajnih varijabli. Ako u tom zahtjevu oslabimo pretpostavku jednake distribuiranosti, tada regresijske metode mogu biti prikladne za analizu (očekivanje se mijenja u ovisnosti o drugim varijablama). Ključna karakteristika vremenskih podataka jest da je narušena pretpostavka nezavisnosti a često i jednake distribuiranost.

Svrha analiza vremenskog niza je

- modelirati i razumjeti stohastički mehanizam koji dovodi do realizacije kojom raspolažemo,
- predviđati buduće vrijednosti na osnovu poznatih podataka.

R **Praktikum.** Vremenski nizovi u R-u.

Raspolažemo s vremenskim nizom u diskretnom vremenu $\{x_t, t \in T_0\}$ i tražimo model za te podatke – matematički objekt koji bi kao rezultat mogao dati opažene podatke. Ako bi primjerice mogli izvesti model koristeći neke fizikalne zakone (klasična mehanika – diferencijalne jednadžbe), tada bi vrlo precizno mogli znati vrijednost promatrane pojave u svakom trenutku (npr. putanja projektila). Takav model bi bio u potpunosti **deterministički**.

Međutim, nijedna pojava nije u potpunosti deterministička ili postoji toliko nepoznatih čimbenika koja je nemoguće obuhvatiti determinističkim modelom ili mnoštvo čimbenika čini da se pojava doima slučajnom (npr. trajektorija kamena koji se kotrlja niz padinu, čestica peludi u čaši vode). Iz tih razloga promatramo **stohastičke modele** kojima je moguće procijeniti *vjerojatnost* da buduća vrijednost bude unutar nekih granica. Stohastički model za vremenski niz bit će slučajni proces.

Definicija I.1.1 Slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$, $T \subseteq \mathbb{R}$, je familija slučajnih varijabli definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Prisjetimo se

- za svaki $t \in T$, X_t je slučajna varijabla,
- za svaki $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ je funkcija na T (trajektorija).

Svaki podatak vremenskog niza x_{t_i}, $i = 1, \ldots, n$, smatrat ćemo realizacijom jedne slučajne varijable X_{t_i}, odnosno vremenski niz $\{x_t, t \in T_0\}$ smatramo realizacijom (ili dijelom realizacije) slučajnog procesa $\{X_t, t \in T\}$, $T_0 \subseteq T$. Slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ nazivamo **model vremenskog niza**. Često ćemo i za njega reći samo vremenski niz.

Skup T može biti diskretan ili primjerice $[0, \infty)$. Uglavnom ćemo promatrati modele kod kojih je $T \subseteq \mathbb{Z}$.

Modelirati vremenski niz znači odrediti slučajni proces za kojeg vjerujemo da mu je vremenski niz jedna realizacija ili njezin dio. Odrediti slučajni proces razmatramo u distribucijskom smislu. Distribucija slučajnog procesa je određena svim konačnodimenzionalnim distribucijama, odnosno distribucijama slučajnih vektora $(X_{s_1}, \ldots, X_{s_m})$ za svaki izbor $\{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq T$. Konačnodimenzionalne distribucije određuju sva vjerojatnosna svojstva procesa.

Uočimo da je modeliranje vrlo težak problem. Na osnovu poznavanje jedne trajektorije ili njenog dijela treba odrediti slučajni proces. To će biti nemoguće bez pretpostavki na strukturu procesa.

■ **Primjer I.1.1** U klasičnoj statistici niz $(x_1, \ldots, x_n)$ modeliramo jednostavnim slučajnim uzorkom $(X_1, \ldots, X_n)$, odnosno nizom nezavisnih i jednako distribuiranih (n.j.d.) slučajnih varijabli. U tom slučaju možemo dosta toga reći o distribuciji iz koja dolazi uzorak jer zapravo imamo n realizacija iz iste distribucije. Statističke metode za ovakav problem su dobro razvijene.

S druge strane, ako znamo distribuciju, što možemo reći o X_{n+1}? Poznavanje $X_1, \ldots, X_n$ nam u tome nikako ne pomažu zbog nezavisnosti. Stoga, zavisnost, iako otežava analizu, može dati bolju predikciju.

Model ćemo birati tako da proces ima iste karakteristike koje uočavamo u podacima. To se prvenstveno odnosi na zavisnosti i ponašanje kroz vrijeme. Zato prvo proučavamo neke standardne mjere kojima možemo dobiti uvid u strukturu zavisnosti. Prije toga spomenut ćemo još dvije moguće generalizacije prethodnog problema.

■ **Primjer I.1.2** Raspolažemo podacima **višedimenzionalnog vremenskog niza** $\{\boldsymbol{x}_t, t \in T_0\}$, gdje je $\boldsymbol{x}_t = (x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(k)}) \in \mathbb{R}^k$. Model za ovakve podatke je vektorski slučajni proces $\{\boldsymbol{X}_t, t \in T\}$ – familija slučajnih vektora $\boldsymbol{X}_t = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(k)})$.

■ **Primjer I.1.3** Zadani su podaci oblika $\{x_t, t \in T_0\} \subseteq \mathbb{R}$, gdje je $T_0 \subseteq \mathbb{R}^k$. Primjerice, za podatke o lokaciji i jačini potresa na području Hrvatske je $k = 2$ i t predstavlja koordinatu mjesta potresa. Modeli za ovakve podatke su slučajna polja.

I.2. Stacionarni procesi

Važnu klasu modela vremenskih nizova čine stacionarni procesi – procesi koji u nekom smislu ne mijenjaju distribucijska svojstva kroz vrijeme. Zasigurno da mnogi vremenski nizovi koje susrećemo ne izgledaju kao realizacije stacionarnih procesa. Međutim, kasnije ćemo argumentirati kako se većina njih može prikladnim transformacijama svesti na nizove koji *izgledaju* kao realizacija stacionarnog procesa.

Prvo poopćenje n.j.d. niza koje na neki način ostavlja pretpostavku jednake distribuiranost, ali uz mogućnost zavisnosti, je stroga stacionarnost.

Definicija I.2.1 Slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ je **strogo stacionaran** (ili stacionaran u užem smislu) ako za svaki $h > 0$ procesi $\{X_t, t \in T\}$ i $\{X_{h+t}, \ ,t \in T\}$ imaju jednake konačnodimenzionalne distribucije, odnosno

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{h+t_1}, \dots, X_{h+t_n}),$$

za sve $t_1, \dots, t_n \in T$ i $n \in \mathbb{N}$.

Uočimo da su posebno i jednodimenzionalne distribucije jednake pa je $X_t \stackrel{d}{=} X_s$ za sve $t, s \in T$.

Ograničit ćemo se na diskretno vrijeme i to $T = \mathbb{Z}$. Naime, strogo stacionarne procese zgodno je promatrati kao niz s dva kraja koji počinje u beskonačno dalekoj prošlosti i nastavlja se u beskonačno daleku budućnost. To neće predstavljati problem jer se svaki strogo stacionaran proces $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ može uključiti u dvostrani strogo stacionaran proces $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ tako da definiramo

$$P(Y_{-m} \le x_1, Y_{-m+1} \le x_2, \dots, Y_n \le x_{m+n+1}) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_{m+n+1} \le x_{m+n+1}).$$

Na taj način dobijemo strogo stacionaran proces $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ takav da su konačnodimenzionalne distribucije od $\{Y_t, t \in \mathbb{N}\}$ i $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ jednake. Proces $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ shvaćamo kao nastavak procesa $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ koji počinje u beskonačno dalekoj prošlosti.

Za provjeriti strogu stacionarnost slučajnog procesa trebalo bi provjeriti sve konačnodimenzionalne distribucije što je često vrlo teško, pogotovo na osnovu podataka. Stoga se drugi tip stacionarnosti definira u terminima momentnih karakteristika.

Definicija I.2.2 Neka je $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ slučajni proces takav da je $\mathrm{E}X_t^2 < \infty$ za sve $t \in \mathbb{Z}$.

- **Funkcija očekivanja** procesa $\{X_t\}$ je funkcija $\mu : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definirana s
$$\mu(t) = \mathrm{E}X_t.$$
- **Funkcija autokovarijanci** (ACV, ACVF) procesa $\{X_t\}$ je funkcija $\gamma : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s
$$\gamma(t,s) = \mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \mathrm{E}\left((X_t - \mathrm{E}X_t)(X_s - \mathrm{E}X_s)\right) = \mathrm{E}(X_t X_s) - \mathrm{E}X_t\,\mathrm{E}X_s.$$
- **Funkcija autokorelacija** (ACR, ACRF) procesa $\{X_t\}$ je funkcija $\rho : \mathbb{Z}^2 \to [-1,1]$ definirana s
$$\rho(t,s) = \mathrm{Corr}(X_t, X_s) = \frac{\mathrm{Cov}(X_t, X_s)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,X_t\,\mathrm{Var}\,X_s}} = \frac{\gamma(t,s)}{\sqrt{\gamma(t,t)\gamma(s,s)}}.$$

Propozicija I.2.1 Za funkciju autokovarijanci γ vrijede sljedeća svojstva

(i) $\gamma(t,t) = \mathrm{Var}\,X_t$,

(ii) $\gamma(t,s) = \gamma(s,t)$,

(iii) $|\gamma(t,s)| \leq \sqrt{\gamma(t,t)\gamma(s,s)}$.

Dokaz. (i) i (ii) je očito, dok (iii) slijedi iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti
$$|\gamma(t,s)| = |\mathrm{E}\left((X_t - \mathrm{E}X_t)(X_s - \mathrm{E}X_s)\right)| \leq \sqrt{\mathrm{E}(X_t - \mathrm{E}X_t)^2\,\mathrm{E}(X_s - \mathrm{E}X_s)^2} = \sqrt{\gamma(t,t)\gamma(s,s)}.$$
■

Iz prethodnog odmah slijede i odgovarajuća svojstva za funkciju autokorelacija:

(i) $\rho(t,t) = 1$,

(ii) $\rho(t,s) = \rho(s,t)$,

(iii) $|\rho(t,s)| \leq 1$.

Podsjetimo se da $|\rho(t,s)|$ govori o jačini linearne veze između X_t i X_s te da je $X_t = aX_s + b$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ako i samo ako je $|\rho(t,s)| = 1$. Ako su X_t i X_s nezavisne, onda su i nekorelirane $\rho(t,s) = 0$. Obrat ne vrijedi, ali ako (X_t, X_s) ima dvodimenzionalnu normalnu distribuciju i $\rho(t,s) = 0$, onda su X_t i X_s nezavisne.

Definicija I.2.3 Slučajni proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je (**slabo**) **stacionaran** (stacionaran u užem smislu, invarijantan u smislu korelacije, stacionaran drugog reda) ako vrijedi

(i) $\mathrm{E}X_t^2 < \infty$ za sve $t \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\mu(t) = \mathrm{E}X_t = c \in \mathbb{R}$ za sve $t \in \mathbb{Z}$ (konstantno očekivanje),

(iii) $\gamma(t,s) = \gamma(t+h, s+h)$ za sve $t, s, h \in \mathbb{Z}$.

S obzirom da ćemo se ubuduće baviti uglavnom slabo stacionarnim procesima, nadalje **pod stacionaran uvijek mislimo slabo stacionaran**.

Uočimo:

- Za $t, h \in \mathbb{Z}$ i $s = t$ (iii) glasi
$$\gamma(t,t) = \gamma(t+h, t+h) \iff \mathrm{Var}\,X_t = \mathrm{Var}\,X_{t+h},$$
odnosno, stacionaran proces ima konstantu varijancu.
- Stavimo li u (iii) $h = -t$, tada za sve $t, s, \in \mathbb{Z}$
$$\gamma(t,s) = \gamma(0, s-t),$$

pa $\gamma(t,s)$ ovisi samo o razlici $s-t$ i možemo je promatrati kao funkciju jedne varijable za koju ćemo koristiti istu oznaku. Funkcija autokovarijanci stacionarnog procesa je funkcija $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h}).$$

Analogno definiramo funkciju autokorelacija stacionarnog procesa $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ s

$$\rho(h) = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

- (iii) možemo ekvivalentno iskazati kao

  (iii') $\gamma(t, t+h)$ ne ovisi o t za sve $h \in \mathbb{Z}$.

Iz Propozicije I.2.1 slijedi da za funkciju autokovarijanci γ stacionarnog procesa vrijedi
(i) $\gamma(0) = \mathrm{Var} X_t$,
(ii) $\gamma(h) = \gamma(-h)$ za sve $h \in \mathbb{Z}$ (γ je parna funkcija),
(iii) $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ za sve $h \in \mathbb{Z}$.
Analogno za funkciju autokorelacija ρ stacionarnog procesa imamo
(i) $\rho(0) = 1$,
(ii) $\rho(h) = \rho(-h)$,
(iii) $|\rho(h)| \leq 1$ za sve $h \in \mathbb{Z}$.

Zadatak I.2.1 Pokažite da ako je $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ strogo stacionaran i $\mathrm{E}X_t^2 < \infty$ za sve $t \in \mathbb{Z}$, onda je $\{X_t\}$ i slabo stacionaran. ■

Zadatak I.2.2 Neka je $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ proces definiran s

$$X_t = \begin{cases} Z_t, & t = 2k \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_t^2 - 1), & t = 2k+1 \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

gdje je $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ n.j.d. niz i $Z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pokažite da je $\{X_t\}$ slabo stacionaran ali nije strogo stacionaran. ■

Zadatak I.2.3 Neka je $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ Gaussovski proces (sve konačnodimenzionalne distribucije su mu višedimenzionalne normalne). Pokažite da je $\{X_t\}$ slabo stacionaran ako i samo ako je strogo stacionaran. ■

Zadatak I.2.4 Mogu li funkcije
(a) $\gamma(h) = \sin h$,
(b)

$$\gamma(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ 2, & |h| = 1, \\ 0, & |h| \geq 2, \end{cases}$$

biti funkcije autokovarijanci nekog stacionarnog procesa? ■

Zadatak I.2.5 Je li zbroj dva nezavisna stacionarna procesa stacionaran proces? Vrijedi li isto za umnožak dva nezavisna stacionarna procesa? ■

Zadatak I.2.6 Neka je $\{X_t\}$ proces, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija i $\{Y_t\}$ proces definiran s $Y_t = g(X_t, X_{t-1})$.

(a) Pokažite da ako je $\{X_t\}$ strogo stacionaran proces, onda je i $\{Y_t\}$ strogo stacionaran.

(b) Ako je $\{X_t\}$ n.j.d niz takav da je $P(X_t = 1) = P(X_t = -1) = 1/2$ i $g(x,y) = x^2 - y$, je li $\{Y_t\}$ slabo stacionaran? Odredite funkciju autokorelacija procesa $\{Y_t\}$.

■

Zadatak I.2.7 Neka su $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ i $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ dva stacionarna procesa takva da je $Cov(X_t, Y_s) = 0$ za sve $t, s \in \mathbb{Z}$, te neka su $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ i $a, b \in \mathbb{Z}$. Je li proces $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$

$$Z_t = c_1 X_{t+a} + c_2 Y_{t+b}$$

stacionaran? Odredite njegovu funkciju autokovarijanci. ■

I.3. Primjeri

U ovom dijelu promotrit ćemo osnovne primjer procesa na koje ćemo se često vraćati. Za svaki primjer izračunati ćemo ACVF i ACRF te utvrditi je li proces stacionaran. Na osnovu podataka vremenskog niza ACVF i ACRF možemo samo procijeniti.

Definicija I.3.1 Za niz podataka $\{x_1, \ldots, x_n\}$ **uzoračka funkcija autokovarijanci** je definirana s

$$\widehat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-h} (x_{j+h} - \overline{x}_n)(x_j - \overline{x}_n), \qquad \text{za } 0 < h < n,$$

i $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(-h)$ za $-n < h < 0$, gdje je $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. **Uzoračka funkcija autokorelacija** je zadana s

$$\widehat{\rho}(h) = \frac{\widehat{\gamma}(h)}{\widehat{\gamma}(0)}, \qquad \text{za } -n < h < n.$$

Napomena I.3.1 (i) Uočimo da je $\widehat{\gamma}(h)$ za $h > 0$ približno jednako uzoračkoj kovarijanci parova podataka $(x_1, x_{1+h}), \ldots, (x_{n-h}, x_n)$. Razlika se pojavljuje u dijeljenju s n (umjesto s $n-h$) i oduzimanju prosjeka svih – $\overline{x}_n$ (umjesto prosjeka od $x_1, \ldots, x_{n-h}$, odnosno od $x_{h+1}, \ldots, x_n$). Dijeljenje s n stoji kako bi uzoračka matrica kovarijanci $\widehat{\Gamma} = [\widehat{\gamma}(i-j)]_{i,j=1,\ldots,n}$ bila pozitivno semidefinitna.

(ii) Procjena ima smisla samo za stacionarne procese jer u suprotnom su ACVF i ACRF funkcije dvije varijable. Za nestacionarne procese procjenu za $\gamma(t,s)$ je općenito nemoguće napraviti jer iz distribucije slučajnog vektora (X_t, X_s) imamo samo podatak (x_t, x_s). Ipak, ništa nas ne sprječava da izračunamo $\widehat{\gamma}$ i $\widehat{\rho}$ i za vremenske nizove iz nestacionarnih procesa. U tom slučaju, primjerice, sporo opadanje $\widehat{\gamma}$ ili $\widehat{\rho}$ u 0 s porastom h ukazuje na nestacionarnost.

(iii) Za velike h postoji malo podataka ($n-h$ parova) da je preporuka procjenu koristiti samo ako je $n > 50$ i $h \leq n/4$.

(iv) Graf parova $(h, \widehat{\rho}(h))$ naziva se **korelogram**. Zbog parnosti dovoljno je promatrati samo za $h \geq 0$. Obično promatramo samo $\widehat{\rho}$ kao normiranu verziju od $\widehat{\gamma}$.

(v) Ako uzorak dolazi iz n.j.d. niza, može se pokazati da onda za svaki $h \geq 1$

$$\sqrt{n}\widehat{\rho}(h) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

kad $n \to \infty$. Iz toga slijedi da je pouzdani interval pouzdanosti 95% jednak

$$\left[\frac{-1.96}{\sqrt{n}}, \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right].$$

I.3.1 N.j.d. šum

N.j.d. šum je niz n.j.d. slučajnih varijabli takvih da je $\mathrm{E}X_1^2 < \infty$, $\mathrm{E}X_1 = 0$ i $\mathrm{Var}X_1 = \sigma^2$. Oznaka $\{X_t\} \sim IID(0,\sigma^2)$. Očigledno se radi o stacionarnom procesu.

I.3.2 Bijeli šum

Bijeli šum je slučajni proces takav da je $\mathrm{E}X_t^2 < \infty$, $\mathrm{E}X_t = 0$, $\mathrm{Var}X_t = \sigma^2$ za sve $t \in \mathbb{Z}$, te je $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = 0$ za sve $t \neq s$. Oznaka $\{X_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$. Lako se vidi da je svaki bijeli šum stacionaran proces.

Zadatak I.3.1 Neka su $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ i $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nezavisni n.j.d. nizovi takvi da je $P(Y_1 = 0) = P(Y_1 = 1) = 1/2$ i $P(Z_1 = -1) = P(Z_1 = 1) = 1/2$. Pokažite da je proces $X_t = Y_t(1 - Y_{t-1})Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$ bijeli šum ali nije n.j.d. šum. ■

Zadatak I.3.2 Neka je $U \sim \mathscr{U}(0, 2\pi)$ i $X_t = \cos(tU)$, $t \in \mathbb{N}$. Pokažite da je $\{X_t\}$ bijeli šum. ■

Zadatak I.3.3 (a) Ako je $\{X_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$ i Gaussovski, je li tada $\{X_t\}$ n.j.d šum?
(b) Ako je $\{X_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$ i $X_t \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ za sve t, je li tada $\{X_t\}$ n.j.d šum? ■

I.3.3 Slučajna šetnja

Neka je $\{Y_t\} \sim IID(0,\sigma^2)$. Slučajna šetnja je proces $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ definiran s $X_0 = 0$ i

$$X_t = \sum_{i=1}^{t} Y_i, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Slučajna šetnja nije stacionaran proces.

I.3.4 Jednostavni pomični prosjek

Neka je $\{Y_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$. Jednostavni pomični prosjek je proces $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ definiran s

$$X_t = \frac{Y_t + Y_{t-1}}{2}.$$

Jednostavni pomični prosjek je stacionaran proces.

I.3.5 Slučajni kosinusni val

Slučajni kosinusni val je proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ zadan s

$$X_t = \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{f} + \Phi\right)\right),$$

gdje je $\Phi \sim \mathscr{U}(0,1)$ i $f > 0$ (frekvencija).

Zadatak I.3.4 Pokažite da je slučajni kosinusni val stacionaran proces. ■

I.3.6 $AR(1)$ proces

Autoregresivni proces reda 1 je proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ zadan s

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t,$$

gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ i $|\phi| < 1$. Oznaka $\{X_t\} \sim AR(1)$. Kasnije ćemo pokazati da je $AR(1)$ stacionaran proces.

Zadatak I.3.5 Odredite ACVF i ACRF stacionarnog $AR(1)$ procesa. ■

R **Praktikum.** Simulacije primjera. Procjene ACRF stvarnih podataka.

I.3.7 Zadaci

Zadatak I.3.6 Neka je $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ i $a, b, c \in \mathbb{R}$. Provjerite koji od sljedećih procesa su stacionarni i za svaki odredite funkciju očekivanja, ACVF i ACRF:

(a) $X_t = at + bZ_t + cZ_{t-1}$,
(b) $X_t = Z_1 \cos(ct) + Z_2 \sin(ct)$,
(c) $X_t = Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct)$,
(d) $X_t = a + bZ_0$.

■

Zadatak I.3.7 Neka je zadan proces

$$X_t = Z_t + \alpha Z_{t-1} Z_{t-2},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Provjerite je li $\{X_t\}$ stacionaran proces i odredite funkcije autokovarijanci i autokorelacija. Jesu li X_t i X_{t-1} nezavisne? ■

Zadatak I.3.8 Neka je $x_1, \ldots, x_n$ uzorak generiran iz $IID(0, \sigma^2)$ šuma. Koliki n treba uzeti ako želimo da procijenjeni 95%-tni pouzdani interval za autokorelacijsku funkciju na koraku 1 bude uži od 0.2? Vrijedi li isto i za procjenu autokorelacijske funkcije na koraku 2? ■

Zadatak I.3.9 — *. Ako je $x_1, \ldots, x_n$ vremenski niz opažen u trenucima $1, \ldots, n$ iz procesa $X_t = a + bt$, za $a, b \in \mathbb{R}$, pokažite da $\widehat{\rho}(k) \to 1$ kad $n \to \infty$ za svaki fiksni k. ■

I.4. Prostor $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$

Vremenske nizove moguće je proučavati i bez teorije Hilbertovih prostora ali ovaj pristup ima brojne prednosti koje uglavnom dolaze od geometrijske intuicije iz Euklidskih prostora. Ovdje će nas konkretno zanimati Hilbertov prostor kvadratno integrabilnih slučajnih varijabli.

Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. S $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ili kraće L^2, označavat ćemo skup svih slučajnih varijabli X definiranih na Ω takvih da je $\mathrm{E}X^2 < \infty$. Pri tome identificiramo slučajne varijable koje su jednake g.s. Preciznije, definiramo relaciju ekvivalencije $X \sim Y \iff X = Y$ g.s. i L^2 je onda familija klasa ekvivalencije definiranih ovom relacijom.

Zadatak I.4.1 Pokažite da je L^2 (realan) vektorski prostor uz standardne operacije zbrajanja funkcija i množenja skalarom. ■

Na prostoru L^2 definiramo skalarni produkt

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{E}(XY) \tag{I.4.1}$$

uz koji L^2 postaje unitaran prostor.

Zadatak I.4.2 Provjerite da je s (I.4.1) definiran skalarni produkt. ■

Svaki unitaran prostor je i normiran uz $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Norma na L^2 je onda

$$\|X\| = \sqrt{\mathrm{E}\langle X, X\rangle} = \sqrt{\mathrm{E}X^2}.$$

Konvergencija niza $\{X_n\}$ prema X u ovoj normi

$$\|X_n - X\|^2 = \mathrm{E}(X_n - X)^2 \to 0, \quad \text{kad } n \to \infty,$$

odgovara konvergenciji u srednjem reda 2. Pišemo $X_n \xrightarrow{L^2} X$.

Propozicija I.4.1 Ako su $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ nizovi u L^2 i $X,Y \in L^2$ tako da $\|X_n - X\| \to 0$ i $\|Y_n - Y\| \to 0$, tada vrijedi
(i) $\|X_n\| \to \|X\|$,
(ii) $\langle X_n, Y_n\rangle \to \langle X, Y\rangle$.

Prisjetimo se da je niz $\{x_n\}$ u normiranom prostoru Cauchyjev ako $\|x_m - x_n\| \to 0$ kad $m,n \to \infty$. Ako u unitarnom prostoru svaki Cauchyjev niz $\{x_n\}$ konvergira prema elementu x iz tog prostora kažemo da je prostor potpun. Potpun unitaran prostor nazivamo **Hilbertov prostor**.

Teorem I.4.2 L^2 je Hilbertov prostor.

Dokaz. Vidi [1, Section 2.10]. ∎

I.4.1 Teorem o projekciji

Neka su x_1, x_2 i y tri vektora u Hilbertovom prostoru $\mathbb{R}^3$ i pretpostavimo da tražimo linearnu kombinaciju $\widehat{y} = \alpha_1 x_1 + \alpha x_2$ koja je najbliža y u srednjekvadratnom smislu, odnosno koja minimizira $\|y - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2\|_2^2$. Geometrijski, $\widehat{y}$ je vektor u ravnini određenoj s x_1 i x_2 takav da je $y - \widehat{y}$ okomito na tu ravninu:

$$\langle y - \widehat{y}, x_1\rangle = 0 \ \text{ i } \langle y - \widehat{y}, x_2\rangle = 0$$

Dakle, $\widehat{y}$ je projekcija od y na ravninu određenu s x_1 i x_2. Teorem o projekciji garantira da ova geometrijska intuicija vrijedi u svakom Hilbertovom prostoru pa tako i u L^2.

Za potprostor $\mathscr{M}$ Hilbertovog prostora L^2 kažemo da je **zatvoren** ako svaki konvergentan niz u $\mathscr{M}$ ima limes u $\mathscr{M}$, odnosno $\{X_n\} \subseteq \mathscr{M}$ i $\|X_n - X\| \to 0$ povlači da je $X \in \mathscr{M}$. **Ortogonalni komplement** podskupa $\mathscr{M}$ od L^2 je skup

$$\mathscr{M}^\perp = \left\{X \in L^2 : \langle X, Y\rangle = 0 \text{ za sve } Y \in \mathscr{M}\right\}.$$

Teorem I.4.3 — Teorem o projekciji. Ako je $\mathscr{M}$ zatvoren potprostor Hilbertovog prostora L^2 i $X \in L^2$, tada postoji jedinstveni $\widehat{X} \in \mathscr{M}$ takav da je

$$\|X - \widehat{X}\| = \inf_{Y \in \mathscr{M}} \|X - Y\|.$$

Osim toga, $\widehat{X}$ je jedinstveno određen zahtjevima
(i) $\widehat{X} \in \mathscr{M}$,
(ii) $\langle X - \widehat{X}, Y\rangle = 0$ za sve $Y \in \mathscr{M}$.

Dokaz. Vidi [1, Theorem 2.3.1]. ∎

Element $\widehat{X}$ iz Teorema I.4.3 nazivamo (**ortogonalna**) **projekcija** od X na $\mathscr{M}$. Tako dolazimo do **operatora projekcije** $\Pi_{\mathscr{M}} : L^2 \to \mathscr{M}$ definiranog s

$$\Pi_{\mathscr{M}} X = \widehat{X}.$$

Uočimo da je za $X \in \mathscr{M}$, $\Pi_{\mathscr{M}} X = X$, te da zbog (ii) $I - \Pi_{\mathscr{M}}$ preslikava L^2 na $\mathscr{M}^\perp$.

Teorem o projekciji bit će ključan u svim problemima aproksimacije i predikcije slučajnih varijabli s konačnom varijancom.

II ARMA procesi

II.1. Linearni procesi

Klasa linearnih procesa uključuje između ostalog i ARMA procese i pruža opći okvir za izučavanje stacionarnih procesa.

Definicija II.1.1 Kažemo da je $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ **linearni proces** ako ima reprezentaciju

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{II.1.1}$$

gdje je $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma^2)$ i $\{\psi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ niz konstanti takav da je $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

Napomena II.1.1 (i) Nekad ćemo pretpostaviti da je $\{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$. U tom slučaju reći ćemo da se radi o linearnom procesu uz n.j.d. šum.

(ii) Desna strana u (II.1.1) je red slučajnih varijabli i definiran je u smislu konvergencije gotovo sigurno ili u srednjem (L^2). Naime, (II.1.1) shvaćamo kao

$$X_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=-n}^{n} \psi_j Z_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

gdje je limes u smislu konvergencije gotovo sigurno ili u srednjem. Pokažimo da je $\{X_t\}$ zaista dobro definiran u tom smislu. Kako je $\mathrm{E}|Z_t| \leq \sqrt{\mathrm{E}Z_t^2} = \sigma$, po teoremu o monotonoj konvergenciji imamo

$$\mathrm{E}|X_t| \leq \mathrm{E}\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{j=-n}^{n} |\psi_j||Z_{t-j}|\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=-n}^{n} |\psi_j| \mathrm{E}|Z_{t-j}| \leq \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty,$$

pa je $|X_t| < \infty$ g.s. Za L^2 konvergenciju označimo $S_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \psi_j Z_{t-j}$ i uočimo da je za $m \leq n$, $S_n(t) - S_m(t) = \sum_{m<|j|\leq n} \psi_j Z_{t-j}$. Sada slijedi da

$$\mathrm{E}(S_n(t) - S_m(t))^2 = \sum_{m<|j|\leq n} \sum_{m<|k|\leq n} \psi_j \psi_k \mathrm{E}(Z_{t-j} Z_{t-k}) = \sigma^2 \sum_{m<|j|\leq n} \psi_j^2 \to 0,$$

kad $m, n \to \infty$. Stoga je $\{S_n(t), n \in \mathbb{N}\}$ Cauchyjev niz pa i konvergentan u L^2 zbog potpunosti.

Za jednostavniji zapis linearnih procesa pomoći će nam sljedeći operator.

Definicija II.1.2 Za proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ **operator pomaka unazad** (eng. backward shift) definiran je s

$$BX_t = X_{t-1}.$$

Općenito za $j \in \mathbb{Z}$ je

$$B^j X_t = B^{j-1} X_{t-1} = X_{t-j}.$$

Linearni proces (II.1.1) možemo zapisati kao

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j Z_t = \psi(B) Z_t,$$

gdje je $\psi(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j B^j$. Operator $\psi(B)$ nazivamo **linearni filter** (filter u smislu da za *ulaz* $\{Z_t\}$ daje *izlaz* $\{X_t\}$). Linearni filter stacionarnog procesa je stacionaran proces o čemu govori sljedeća propozicija.

Propozicija II.1.2 Neka je $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ stacionaran proces s očekivanjem 0 i ACVF γ_Y. Ako je $\psi(B)$ linearni filter takav da je $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, tada je proces

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j} = \psi(B) Y_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

stacionaran s očekivanjem 0 i ACVF

$$\gamma_X(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma_Y(h+k-j), \quad h \in \mathbb{Z}. \tag{II.1.2}$$

Dokaz. Slično kao za linearne procese možemo pokazati da je $\{X_t\}$ dobro definiran. Osim toga, $\mathrm{E}X_t^2 < \infty$ jer je L^2 zatvoren pa je L^2-limes opet u L^2. Za ostala svojstva stacionarnosti, uočimo da je

$$\mathrm{E}X_t = \mathrm{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j}\right] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \mathrm{E}Y_{t-j} = 0,$$

pri čemu druga jednakost slijedi iz neprekidnosti norme i skalarnog produkta u odnosu na L^2-konvergenciju. Istim argumentom slijedi da je

$$\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{E}[X_{t+h} X_t] = \mathrm{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t+h-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k Y_{t-k}\right] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma_Y(h+k-j),$$

što ne ovisi o t pa je $\{X_t\}$ stacionaran i slijedi (II.1.2). ■

Zadatak II.1.1 Dopunite detalje u prethodnom dokazu, posebno vezano uz dobru definiranost procesa te ulazak očekivanja pod beskonačnu sumu. ■

Korolar II.1.3 Linearan proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionaran s očekivanjem 0 i ACVF

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}, \quad h \in \mathbb{Z}. \tag{II.1.3}$$

Dokaz. Slijedi iz Propozicije II.1.2 stavimo li da je $\{Y_t\} = \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ dok (II.1.3) slijedi iz (II.1.2)

$$\gamma(h) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma_Z(h+k-j) = \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \psi_{k+h}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

jer je

$$\gamma_Z(h+k-j) = \begin{cases} \sigma^2, & h+k-j=0, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} = \begin{cases} \sigma^2, & j=h+k, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

■

Dakle, svaki linearan proces je stacionaran. Osim toga, Propozicija II.1.2 puža način generiranja stacionarnih procesa. Za svaki stacionaran proces primjenom nekog linearnog filtera dobijemo novi stacionaran proces.

Iznenađujuća činjenica jest da vrijedi i obrat u određenom smislu. Naime, svaki stacionaran proces je (gotovo) linearan uz deterministički dio. Da bi iskazali ovaj rezultat uvodimo pojmove kojima ćemo se detaljnije baviti nešto kasnije.

Za slučajnu varijablu X i proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ **najbolji linearni prediktor** od X na osnovu $1, X_m, \dots, X_n$ je slučajna varijabla

$$\Pi_{m,n} X = \beta_0 + \beta_m X_m + \cdots \beta_n X_n, \quad \beta_0, \beta_m, \dots, \beta_n \in \mathbb{R},$$

koja minimizira $\mathrm{E}(X-Y)^2$ po svim linearnim kombinacijama od $1, X_m, \dots, X_n$. Prema teoremu o projekciji, $\Pi_{m,n} X$ je projekcija $\Pi_{\mathcal{M}} X$ od X na potprostor $\mathcal{M}$, gdje je $\mathcal{M} = \overline{sp}\{1, X_m, \dots, X_n\}$ pri čemu $\overline{sp}$ (eng. span) označava najmanji zatvoren potprostor razapet tim vektorima (u L^2 prostoru). Najbolja linearna predikcija na osnovu *beskonačno duge prošlosti* je L^2-limes

$$\Pi_n X = \lim_{m \to -\infty} \Pi_{m,n} X.$$

Radi se o projekciji na zatvoren potprostor razapet s $\{X_t, t \le n\}$, odnosno $\mathcal{M} = \overline{sp}\{X_t, t \le n\}$.

Kažemo da je proces $\{V_t, t \in \mathbb{Z}\}$ **deterministički** ako je za svaki $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{E}\,(V_{n+1} - \Pi_n V_{n+1})^2 = 0.$$

Riječima, budućnost je u potpunosti predvidiva na osnovu prošlosti (L^2 greška predikcije je nula).

■ **Primjer II.1.1** Slučajni proces $\{V_t, t \in \mathbb{Z}\}$, $V_t = V$ za neku slučajnu varijablu V takvu da je $\mathrm{E}V = 0$ i $\mathrm{E}V^2 < \infty$ je deterministički. Zaista, $\Pi_n V_{n+1} = V$ pa je $\mathrm{E}\,(V_{n+1} - \Pi_n V_{n+1})^2 = 0$.

Zadatak II.1.2 Neka je $\{V_t, t \in \mathbb{Z}\}$ slučajni proces zadan s $V_t = A\cos t + B\sin t$, gdje su A i B nezavisne slučajne varijable takve da je $\mathrm{E}A = \mathrm{E}B = 0$, $\mathrm{E}A^2 < \infty$, $\mathrm{E}B^2 < \infty$. Pokažite da je $\{V_t\}$ stacionaran i zatim pokažite da je deterministički.
[Uputa: izrazite V_{n+1} pomoću V_n i V_{n-1} korištenjem trigonometrijskih identiteta.] ■

Rješenje. Koristeći

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$
$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

za $\alpha = n$ i $\beta = 1$ slijedi

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= A\cos(n+1)+B\sin(n+1) = A\left(2\cos n\cos 1-\cos(n-1)\right)+B\left(2\sin n\cos 1-\sin(n-1)\right)\\ &= 2\cos 1\left(A\cos n+B\sin n\right)-\left(A\cos(n-1)+B\sin(n-1)\right) = 2\cos 1 V_n - V_{n-1}, \end{aligned}$$

pa je najbolja linearna predikcija $\Pi_n V_{n+1} = 2\cos 1 V_n - V_{n-1}$ i onda $\mathrm{E}\left(V_{n+1}-\Pi_n V_{n+1}\right)^2 = 0$.

Sada imamo sve potrebno za iskaz Woldove dekompozicije.

Teorem II.1.4 — Woldova dekompozicija. Ako je $\{X_t, t\in\mathbb{Z}\}$ stacionaran (nedeterministički) proces, onda se može reprezentirati kao

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j Z_{t-j}+V_t, \quad t\in\mathbb{Z}, \tag{II.1.4}$$

gdje je
(a) $\psi_0 = 1$, $\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2<\infty$,
(b) $\{Z_t\}\sim WN(0,\sigma^2)$,
(c) $Cov(Z_s,V_t) = 0$ za sve $s,t\in\mathbb{Z}$,
(d) $Z_t = \Pi_t Z_t$, za sve $t\in\mathbb{Z}$,
(e) $V_t = \Pi_s V_t$, za sve $s,t\in\mathbb{Z}$,
(f) $\{V_t\}$ je deterministički proces.

Dokaz. Pogledati [1, Poglavlje 5.7]. ∎

Napomena II.1.5 (i) Woldova dekompozicija – svaki stacionaran proces je zbroj dva nekorelirana (nekorelirana zbog (c))) procesa: jednog determinističkog $\{V_t\}$ koji se može linearno izraziti iz proizvoljno daleke prošlosti procesa (o tome govori (e)), te jednog potpuno nedeterminističkog koji je (beskonačna) linearna kombinacija sadašnje i prošlih vrijednosti nekog bijelog šuma.
(ii) (d) i (e) nije očito jer je projekcija u odnosu na proces $\{X_t\}$ (a ne $\{Z_t\}$, odnosno $\{V_t\}$).
(iii) Može se pokazati da su $\{\psi_j\}$, $\{Z_t\}$ i $\{V_t\}$ jedinstveni.
(iv) Prvi član u Woldovoj dekompoziciji (II.1.4) je *približno* linearan proces. Razlika je samo u tome što $\{\psi_j\}$ iz Woldove dekompozicije zadovoljavaju samo $\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2<\infty$, a ne nužno i $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j|<\infty$.

Zadatak II.1.3 Ako je $\{X_t\}$ linearan proces, tada je ACVF apsolutno sumabilna:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\gamma(h)|<\infty.$$

Primjerom pokažite da ako je $\{X_t\}$ zadan s (II.1.1) i $\{\psi_j\}$ takav da je $\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2<\infty$, to ne mora vrijediti.
[Uputa: iskoristiti (II.1.3), a za primjer uzmite niz $\{\psi_j\}$ takav da je $\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2<\infty$ i $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j|=\infty$.] ■

Rješenje. Ako je $\{X_t\}$ linearan, onda po Korolaru II.1.3

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\gamma(h)| = \sigma^2\sum_{h=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j\psi_{j+h}\right| \le \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\psi_j|\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\psi_{j+h}| \le \sigma^2\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\psi_j|\right)^2.$$

S druge strane, ako je $\psi_j = 1/j$ tada je $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, ali $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| = \infty$ i $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| = \infty$ (može se pokazati da je proces ipak dobro definiran i da zaista vrijedi (II.1.3), takvo svojstvo je poznato i kao svojstvo duge memorije).

Zadatak II.1.4 — Svaka ACVF se može replicirati linearnim procesom s IID Gaussovskim šumom. Neka je $\{X_t\}$ stacionaran potpuno nedeterministički proces s ACVF γ. Pokažite da tada postoji niz $\{\psi_j\}$ takav da proces

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j W_{t-j},$$

gdje je $\{W_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$ Gaussovski šum, ima ACVF γ. ■

Rješenje. Prema Woldovoj dekompozicija postoje $\{\psi_j\}$ i $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ takvi da je $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$. Prema (II.1.3), $\{Y_t\}$ i $\{X_t\}$ imaju iste ACVF.

Zadatak II.1.5 — ACVF ne razlikuje procese. Odredite ACVF procesa:

(i) $X_t = Z_t + 0.3Z_{t-1} - 0.4Z_{t-2}$, gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0,1)$,

(ii) $Y_t = \widetilde{Z}_t - 1.2\widetilde{Z}_{t-1} - 1.6\widetilde{Z}_{t-2}$, gdje je $\{\widetilde{Z}_t\} \sim WN(0, 0.25)$.

Razmislite zašto je rješenje koje ćete dobiti problematično iz aspekta modeliranja vremenskog niza. ■

Rješenje. (i) Koeficijenti u linearnoj reprezentaciju su $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = 0.3$, $\psi_2 = -0.4$ i $\psi_j = 0$ inače, pa je prema (II.1.3)

$$\gamma(0) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+0} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 = 1^2 + 0.3^2 + (-0.4)^2 = 1.25,$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+1} = \psi_0\psi_1 + \psi_1\psi_2 = 0.3 + 0.3(-0.4) = 0.18,$$

$$\gamma(2) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+2} = \psi_0\psi_2 = -0.4,$$

i $\gamma(h) = 0$ za $h \geq 3$, $\gamma(h) == \gamma(-h)$ za $h < 0$.

(ii) Istim postupkom se dobije ista ACVF.

II.2. MA procesi

Woldova dekompozicija (Teorem II.1.4) pokazuje da linearnim procesima možemo reprezentirati gotovo svaki stacionaran proces. Svaki linearan proces možemo prikazati u obliku

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{-1} \psi_j Z_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j},$$

pri čemu prvi član sadrži *buduće* vrijednosti šuma ($j < 0$), a drugi član *sadašnje* ($j = 0$) i *prošle* ($j > 0$) vrijednosti šuma. Za linearan proces kod kojeg je $\psi_j = 0$ za $j < 0$ kažemo da je **kauzalan** ili *neovisan o budućnosti*. Uočimo da je reprezentacija iz Teorema II.1.4 kauzalna. To nam daje za pravo razmatrati linearne procese oblika

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{II.2.1}$$

Ako tražimo model za vremenski niz u klasi stacionarnih procesa, onda zbog Teorema II.1.4 ima smisla razmatrati linearne procese oblika (II.2.1). Kako je $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, onda $\psi_j \to 0$ kad $j \to \infty$ (za velike j, Z_{t-j} ne doprinosi X_t). Stoga, model prvo možemo tražiti među procesima (II.2.1) za koje je $\psi_j = 0$ za $j > q$ za neki $q > 1$.

Definicija II.2.1 Slučajan proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **proces pomičnih prosjeka reda** $q \in \mathbb{N}$ ako je

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

gdje je $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma^2)$ i $\theta_1, \ldots, \theta_q \in \mathbb{R}$, $\theta_q \neq 0$. Pišemo $\{X_t\} \sim MA(q)$ (eng. moving average).

Napomena II.2.1

(i) Vrijedi $\mathrm{E} X_t = 0$ za sve $t \in \mathbb{Z}$.

(ii) $MA(q)$ proces je stacionaran jer je linearan (Korolar II.1.3) s koeficijentima u linearnoj reprezentaciji $X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ danim s

$$\psi_j = 0 \text{ za } j < 0 \text{ i za } j > q,$$
$$\psi_0 = 1,\ \psi_j = \theta_j \text{ za } j = 1, \dots, q.$$

(iii) Proces $\{X_t\}$ definiran s (II.2.1) zvat ćemo $MA(\infty)$ proces.

(iv) Koristeći operator pomaka unazad, $MA(q)$ proces možemo zapisati kao

$$X_t = \theta(B) Z_t,$$

gdje je

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q, \qquad z \in \mathbb{C},$$

karakteristični MA polinom.

Zadatak II.2.1 Pokažite da je ACVF $MA(q)$ procesa jednaka

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|}, & |h| \leq q, \\ 0, & |h| > q, \end{cases} \tag{II.2.2}$$

gdje je $\theta_0 = 1$.
[Uputa: iskoristite (II.1.3) i općenitu činjenicu da je $\gamma(h) = \gamma(-h) = \gamma(|h|)$.] ■

Rješenje. Prema (II.1.3)

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} \psi_j \psi_{j+h}$$

i izraz slijedi jer je $\gamma(h) = \gamma(-h) = \gamma(|h|)$ i $\psi_{j+|h|} = 0$ za $j + |h| > q$.

■ **Primjer II.2.1 — $MA(1)$ proces.** Za $\theta \neq 0$, $MA(1)$ proces je definiran s

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

Prema (II.2.2) je

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{1-|h|} \theta_j \theta_{j+|h|}, & |h| \leq 1, \\ 0, & |h| > 1, \end{cases} = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2), & h = 0, \\ \sigma^2 \theta, & |h| = 1, \\ 0, & |h| > 1, \end{cases}$$

i

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ \frac{\theta}{1+\theta^2}, & |h| = 1, \\ 0, & |h| > 1. \end{cases}$$

Posebno, korelacija na koraku 1 je pozitivna ako je $\theta > 0$ i negativna ako je $\theta < 0$.

Zbog (II.2.2) ACVF (a onda i ACRF) iščezava nakon q koraka. Za stacionaran proces $\{X_t\}$ kažemo da je **q-koreliran** ako je $\gamma(h) = 0$ za $|h| > q$. Dakle, svaki $MA(q)$ proces je q koreliran. Međutim, vrijedi i obrat o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem II.2.2 Ako je $\{X_t\}$ stacionaran q-koreliran, $q \in \mathbb{N}$, s očekivanjem 0, tada se $\{X_t\}$ može reprezentirati kao $MA(q)$ proces.

Dokaz. Pogledati [1, Poglavlje 3.2]. ■

Dakle, svaki proces čija ACRF iščezava nakon q koraka može se reprezentairati kao $MA(q)$ proces u smislu da postoji bijeli šum i koeficijenti θ_j, $j = 1,\dots,q$, uz koje je taj proces $MA(q)$ proces. Proširenje prethodnog teorema na slučaj $q = \infty$ je u principu Woldova dekompozicija (linearni proces u Woldovoj dekompoziciji je $MA(\infty)$ proces).

R **Praktikum.** MA procesi.

II.3. AR procesi

Ideja AR procesa jest trenutnu vrijednost procesa prikazati kao linearnu kombinaciju nekoliko prošlih vrijednosti uz grešku – šum (regresija sam na sebe).

Definicija II.3.1 Slučajan proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **autoregresivni proces reda** $p \in \mathbb{N}$ ako je stacionaran i ako je

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{II.3.1}$$

gdje je $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma^2)$ i $\phi_1, \ldots, \phi_p \in \mathbb{R}$, $\phi_p \neq 0$. Pišemo $\{X_t\} \sim AR(p)$ (eng. autoregressive).

Koristeći operator pomaka unazad, (II.3.1) možemo zapisati kao

$$\phi(B)X_t = Z_t,$$

gdje je

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p, \quad z \in \mathbb{C},$$

karakteristični AR polinom.

Za početak, nije uopće jasno postoji li za dane $\phi_1, \ldots, \phi_p \in \mathbb{R}$ proces koji zadovoljava (II.3.1). Drugo, nije jasno ni da je takav proces stacionaran, ali ni je li jedinstven za dani bijeli šum $\{Z_t\}$. Ova pitanja razmotrit ćemo na primjeru $AR(1)$ procesa dok ćemo općenite tvrdnje vidjeti kod ARMA procesa kojih je AR specijalan slučaj.

■ **Primjer II.3.1 —** $AR(1)$ **proces.** Promotrimo $AR(1)$ jednadžbu

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t. \tag{II.3.2}$$

Iteriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} X_t &= Z_t + \phi X_{t-1} \\ &= Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 X_{t-2} \\ &\vdots \\ &= Z_t + \phi Z_{t-1} + \cdots + \phi^k Z_{t-k} + \phi^{k+1} X_{t-k-1}. \end{aligned}$$

Možemo naslutiti da bi kao rješenje imalo smisla razmotriti $MA(\infty)$ proces

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j} \tag{II.3.3}$$

koji će biti dobro definiran ako je $|\phi| < 1 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j < \infty$ (vidi t.II.1).

$|\phi| < 1$ Promotrimo prvo slučaj $|\phi| < 1$. Proces (II.3.3) je dobro definiran linearan proces pa onda i stacionaran. Uočimo da je zaista rješenje jednadžbe (II.3.2):

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j} = \phi \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} Z_{t-j} + Z_t = \phi \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-(j+1)} + Z_t = \phi X_{t-1} + Z_t.$$

To je i jedinstveno stacionarno rješenje. Zaista, neka je $\{Y_t\}$ drugo stacionarno rješenje. Onda isto kao gore možemo dobiti da vrijedi

$$Y_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \cdots + \phi^k Z_{t-k} + \phi^{k+1} Y_{t-k-1},$$

pa je

$$\mathrm{E}\left(Y_t - \sum_{j=0}^{k} \phi^j Z_{t-j}\right)^2 = \mathrm{E}\left(\phi^{k+1} Y_{t-k-1}\right)^2 = \phi^{2k+2} \mathrm{E} Y_{t-k-1}^2,$$

što konvergira u 0 kad $k \to \infty$ jer je $|\phi| < 1$ i $\mathrm{E} Y_{t-k-1}^2$ je konstanta neovisna o k jer je $\{Y_t\}$ stacionaran. Slijedi da je $\{Y_t\}$ L^2-limes $\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$, odnosno $\{Y_t\}$ i $\{X_t\}$su jednaki u L^2 odnosno g.s. smislu.

$|\phi| > 1$ Red u (II.3.3) ne konvergira u ovom slučaju, ali iz (II.3.2) imamo

$$X_{t+1} = \phi X_t + Z_{t+1}$$

iz čega slijedi

$$X_t = -\phi^{-1} Z_{t+1} + \phi^{-1} X_{t+1}.$$

Iteriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} X_t &= -\phi^{-1} Z_{t+1} + \phi^{-1}\left(-\phi^{-1} Z_{t+3} + \phi^{-1} X_{t+2}\right) \\ &\vdots \\ &= -\phi^{-1} Z_{t+1} - \phi^{-2} Z_{t+2} - \cdots - -\phi^{-k} Z_{t+k} + \phi^{-k} X_{t+k}. \end{aligned}$$

Kao u prethodnom slučaju pokaže se da je

$$X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j} Z_{t+j} = -\sum_{j=-\infty}^{-1} \phi^j Z_{t-j} \tag{II.3.4}$$

jedinstveno stacionarno rješenje od (II.3.2) u slučaju $|\phi| > 1$. Ovakvo rješenje je neprirodno jer sadašnje vrijednosti ovise o budućim vrijednostima šuma. Za praktične primjene to je nedopustivo jer bi takav model bio beskoristan za predviđanje. Zato ćemo ubuduće promatrati samo **kauzalne** $AR(1)$ procese kod kojih je $|\phi| < 1$.

$|\phi| = 1$ U ovom slučaju ne postoji stacionaran proces koji zadovoljava (II.3.2) (posebno, za $\phi = 1$ i n.j.d. šum to je slučajna šetnja). Iteriranjem iz (II.3.2) slijedi za $k \in \mathbb{N}$

$$X_t - \phi^{k+1} X_{t-k-1} = Z_t + \phi Z_{t-1} + \cdots + \phi^k Z_{t-k}.$$

Ako bi $\{X_t\}$ bio stacionaran, onda s jedne strane je

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(X_t - \phi^{k+1} X_{t-k-1}\right) &= \operatorname{Var} X_t + \phi^{2k+2} \operatorname{Var} X_{t-k-1} - 2\phi^{k+1} \operatorname{Cov}(X_t, X_{t-k-1}) \\
&= 2\gamma(0) - 2\phi^{k+1}\gamma(k+1) \\
&\leq 2\gamma(0) + 2|\gamma(k+1)| \\
&\leq 4\gamma(0),
\end{aligned}$$

dok je s druge strane

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=0}^{k} \phi^j Z_{t-j}\right) = (k+1)\phi^{2j} \operatorname{Var} Z_{t-j} = (k+1)\sigma^2.$$

Iz toga slijedi da je $4\gamma(0) \geq (k+1)\sigma^2$ za proizvoljni $k \in \mathbb{N}$ što povlači da je $\gamma(0) = \infty$ i daje kontradikciju sa stacionarnošću.

Zadatak II.3.1 Pokažite da je ACVF $AR(1)$ procesa s parametrom $|\phi| < 1$ jednaka

$$\gamma(h) = \phi^{|h|} \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

i ACRF

$$\rho(h) = \phi^{|h|}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

[Uputa: iskoristite (II.3.3) i (II.1.3).] ■

Rješenje. Kako je $\{X_t\}$ linearan s reprezentacijom (II.3.3) i koeficijentima $\psi_j = \phi^j$, onda iz (II.1.3) slijedi za $h \geq 0$ koristeći formulu za sumu geometrijskog reda

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi^{2j+h} = \sigma^2 \phi^h \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\phi^2)^j = \phi^h \frac{\sigma^2}{1-\phi^2},$$

dok za $h < 0$ iskoristimo $\gamma(h) = \gamma(-h) = \gamma(|h|)$. Izraz za ACRF slijedi iz $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$.

Zadatak II.3.2 Neka je $\{X_t\}$ jedinstveno stacionarno rješenje $AR(1)$ jednadžbe za $|\phi| > 1$ definirano s (II.3.4) i definirajmo

$$W_t = X_t - \phi^{-1} X_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Pokažite da je $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma_W^2)$ i izrazite σ_W^2 pomoću σ^2 i ϕ. Zaključite da je $\{X_t\}$ jedinstveno stacionarno rješenje $AR(1)$ jednadžbe

$$X_t = \phi^{-1} X_{t-1} + W_t.$$

[Uputa: izraz za ACVF od $\{W_t\}$ slijedi iz izraza za ACVF od $\{X_t\}$ koje se pak dobije iz (II.1.3).] ■

Rješenje. Jasno se vidi da je $\mathrm{E}W_t^2 < \infty$ i $\mathrm{E}W_t = 0$ za sve $t \in \mathbb{Z}$. Prvo uočimo da kako je $\{X_t\}$ linearan s reprezentacijom (II.3.4) i koeficijentima $\psi_j = -\phi^j$ za $j < 0$ i $\psi_j = 0$ za $j \geq 0$, slijedi iz (II.1.3) za $h \geq 0$

$$\begin{aligned}\gamma(h) = \gamma_X(h) &= \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{-h-1} \psi_j \psi_{j+h} = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{-h-1} \phi^{2j+h} \\ &= \sigma^2 \left(\phi^{-h-2} + \phi^{-h-4} + \phi^{-h-6} + \cdots\right) = \sigma^2 \phi^{-h} \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-2j} = \sigma^2 \phi^{-h} \frac{\phi^{-2}}{1-\phi^{-2}}.\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(W_t, W_{t+h}) &= \mathrm{E}\left[(X_t - \phi^{-1} X_{t-1})(X_{t+h} - \phi^{-1} X_{t+h-1})\right] \\ &= \gamma_X(h) - \phi^{-1}\gamma_X(h-1) - \phi^{-1}\gamma_X(h+1) + \phi^{-2}\gamma_X(h),\end{aligned}$$

što daje za $h \geq 1$

$$\operatorname{Cov}(W_t, W_{t+h}) = (1+\phi^{-2})\sigma^2\phi^{-h}\frac{\phi^{-2}}{1-\phi^{-2}} - \phi^{-1}\sigma^2\phi^{-h+1}\frac{\phi^{-2}}{1-\phi^{-2}} - \phi^{-1}\sigma^2\phi^{-h-1}\frac{\phi^{-2}}{1-\phi^{-2}} = 0,$$

i za $h = 0$

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(W_t, W_t) = \operatorname{Var} W_t &= (1+\phi^{-2})\gamma_X(0) - 2\phi^{-1}\gamma_X(1) = (1+\phi^{-2})\gamma_X(0) - 2\phi^{-2}\gamma_X(0) \\ &= (1-\phi^{-2})\sigma^2\frac{\phi^{-2}}{1-\phi^{-2}} = \sigma^2\phi^{-2}.\end{aligned}$$

Slijedi da je $\{W_t\}$ bijeli šum s varijancom $\sigma_W^2 = \sigma^2\phi^{-2}$.

Poruka prethodnog zadatka je da ništa ne gubimo promatranjem samo slučaja $|\phi| < 1$ jer se svaki nekauzalan $AR(1)$ proces može izraziti kao kauzalan ali uz drugi bijeli šum.

Zadatak II.3.3 Pokažite da proces

$$Y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j Z_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},\ \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

zadovoljava $AR(1)$ jednadžbu $Y_t = \frac{1}{2}Y_{t-1} + Z_t$. Kako je to u skladu s činjenicom koju smo pokazali, a to je da $AR(1)$ jednadžba ima jedinstveno stacionarno rješenje? ■

Rješenje. Lako se vidi da je

$$\frac{1}{2}Y_{t-1} + Z_t = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j Z_{t-1-j}\right) + Z_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} Z_{t-(j+1)} + Z_t = Y_t.$$

$AR(1)$ jednadžba ima jedinstveno *stacionarno* rješenje, a $\{Y_t\}$ očigledno nije stacionaran.

Praktikum. AR procesi.

II.4. ARMA procesi

ARMA procesi predstavljaju kombinaciju AR i MA procesa.

Definicija II.4.1 Slučajan proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **autoregresivni pomični prosjek reda** (p,q), $p,q \geq 0$ ako je stacionaran i ako je

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{II.4.1}$$

gdje je $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\} \sim WN(0, \sigma^2)$ i $\phi_1, \dots, \phi_p$, $\theta_1, \dots, \theta_q \in \mathbb{R}$, $\phi_p, \theta_q \neq 0$ i polinomi

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p,$$
$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q,$$

nemaju zajedničkih nultočki. Pišemo $\{X_t\} \sim ARMA(p,q)$.

Koristeći operator pomaka unazad, jednadžbu (II.4.1) možemo kraće zapisati kao

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Za $p = 0$ je $\phi(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ i $ARMA(p,q) = MA(q)$, dok je za $q = 0$, $\theta(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ i $ARMA(p,q) = AR(p)$. Za objašnjenje zahtjeva na nultočke vidjeti Zadatak II.4.5.

Neka su $\alpha(B)$ i $\beta(B)$ dva linearna filtera

$$\alpha(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j z^j,$$
$$\beta(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j z^j$$

takvi da je $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$ i $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\beta_j| < \infty$. Kompozicija ovih operatora je opet linearni filter $\psi(B) = \alpha(B)\beta(B)$ s koeficijentima $\{\psi_j\}$ koji se mogu odrediti iz

$$\alpha(z)\beta(z) = \psi(z),$$

izjednačavanjem odgovarajućih potencija. Lako je vidjeti da je

$$\psi_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \beta_{j-k}. \tag{II.4.2}$$

Pri tome vrijedi i

$$\alpha(B)\beta(B) = \beta(B)\alpha(B). \tag{II.4.3}$$

Zadatak II.4.1 Pokažite da (II.4.2) i (II.4.3) zaista vrijede. ■

Rješenje. Slijedi iz

$$\alpha(z)\beta(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k z^k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \beta_l z^l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \beta_l z^{k+l} == \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j,$$

jer uz z^j s lijeve strane stoji (II.4.2) što vidimo ako je $k+l=j$.

Teorem II.4.1 Stacionarno rješenje $\{X_t\}$ jednadžbe (II.4.1) postoji, i jedinstveno je u tom slučaju, ako i samo ako

$$\phi(z) \neq 0 \quad \text{za } |z| = 1, z \in \mathbb{C}.$$

Dokaz. (skica) Ako je $\phi(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je $|z| = 1$, onda postoji $\delta > 0$ takav da je $1/\phi(z)$ moguće razviti u red

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi_j z^j, \quad 1-\delta < |z| < 1+\delta,$$

i $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\chi_j| < \infty$. Označimo $\chi(B) := 1/\phi(B)$ neka je linearni filter određen nizom $\{\chi_j\}$. Primjenom na (II.4.1) slijedi

$$X_t = \chi(B)\phi(B)X_t = \chi(B)\theta(B)Z_t = \psi(B)Z_t,$$

gdje je $\psi(z) = \chi(z)\theta(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j$ red potencija linearnog filtera nastalog kompozicijom $\chi(B)$ i $\theta(B)$. Po Korolaru II.1.3, $\{X_t\}$ je stacionaran. Jedinstvenost slijedi kao kod $AR(1)$ procesa (vidi Primjer II.3.1), a slično se dokazuje i obrat. ■

Uvjet stacionarnosti prethodnog teorema možemo iskazati kao zahtjev da AR karakteristični polinom nema nultočki na jediničnoj kružnici. Često kažemo i da *ne postoji jedinični korijen* (eng. unit root).

Iz dokaza prethodnog teorema slijedi da svaki ARMA proces možemo zapisati kao

$$X_t = \psi(B)Z_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \tag{II.4.4}$$

gdje je $\psi(B)$ linearni filter određen s $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$.

Ovdje se pojavljuju dva problema:

(i) U linearnoj reprezentaciji (II.4.4) htjeli bi da je $\psi_j = 0$ za $j < 0$ (kauzalnost), odnosno da je X_t izražen kao linearna kombinacija samo sadašnje i prošlih vrijednosti šuma, a ne i budućih vrijednosti šuma.

(ii) U Zadatku II.1.5 navedena su dva $MA(2)$ procesa koji imaju istu ACVF. Ako bi šumovi bili n.j.d. Gaussovski to bi bili isti procesi (u smislu jednakosti konačnodimenzionalnih distribucija). To je svakako problem pa ćemo se ograničiti na jedan od tih procesa tako da uvedemo pojam *invertibilnosti* i zahtijevamo da Z_t može biti izražen kao linearna kombinacija samo sadašnje i prošlih vrijednosti procesa, a ne i budućih vrijednosti procesa.

Definicija II.4.2 Za $ARMA(p,q)$ proces $\{X_t\}$ kažemo da je **kauzalan** ako postoji niz konstanti $\{\psi_j\}$, $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\psi_j| < \infty$, takav da je

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Teorem II.4.2 $ARMA(p,q)$ proces je kauzalan ako i samo ako

$$\phi(z) \neq 0 \text{ za } |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}.$$

Uvjet za kauzalnost možemo riječima opisati kao zahtjev da sve nultočke karakterističnog AR polinoma leže izvan jediničnog kruga. Dokaz teorema se može vidjeti u [1, Teorem 3.1.1]. U primjeri i zadacima na kraju poglavlja možemo vidjeti gdje se uvjet pojavi kao bitan za kauzalnu reprezentaciju.

Definicija II.4.3 Za $ARMA(p,q)$ proces $\{X_t\}$ kažemo da je **invertibilan** ako postoji niz konstanti $\{\pi_j\}$, $\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\pi_j| < \infty$, takav da je

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Teorem II.4.3 $ARMA(p,q)$ proces je invertibilan ako i samo ako

$$\theta(z) \neq 0 \text{ za } |z| \leq 1, z \in \mathbb{C}.$$

Dokaz. Vidjeti [1, Teorem 3.1.2]. ■

■ **Primjer II.4.1** Za $AR(1)$ proces karakteristični AR polinom $\phi(z) = 1 - \phi_1 z$ ima nultočku

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\phi_1}.$$

Stacionarno rješenje postoji ako i samo ako je $|1/\phi_1| \neq 1 \Leftrightarrow |\phi_1| \neq 1$. Stacionarno i kauzalno rješenje postoji ako i samo ako je $|1/\phi_1| > 1 \Leftrightarrow |\phi_1| < 1$, kao što smo i pokazali u Primjeru II.3.1.

■ **Primjer II.4.2** Za procese iz Zadatka II.1.5 lako je izračunati:

(i) nultočke su $z_1 = -1.25$ i $z_2 = 2$, pa vrijedi $|z_1| > 1$ i $|z_2| > 1$ i proces je invertibilan,

(ii) nultočke su $z_1 = -1.25$ i $z_2 = 0.5$, pa vrijedi $|z_1| > 1$ i $|z_2| < 1$ i proces nije invertibilan.

Ubuduće ćemo se ograničiti na promatranje invertibilnih ARMA procesa što će eliminirati situaciju kao u Zadatku II.1.5.

II.4.1 Računanje ACVF i ACRF

Izračunati ACVF ili ACRF konkretnih ARMA procesa nije uvijek jednostavno. Na sljedećim zadacima ilustrirat ćemo dvije osnovne tehnike:

- odrediti reprezentaciju u obliku linearnog procesa i iskoristiti Korolar II.1.3,
- direktno iz ARMA jednadžbe.

Zadatak II.4.2 Za proces

$$X_t = \frac{1}{2}X_{t-2} + Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0,1),$$

odredite reprezentaciju u obliku linearnog procesa, te ACVF i ACRF. ■

Rješenje. Uočimo da je radi o $ARMA(2,1)$ procesu koji možemo zapisati kao

$$X_t - \frac{1}{2}B^2X_t = Z_t + \frac{1}{2}BZ_t \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}B^2\right)X_t = \left(1 + \frac{1}{2}B\right)Z_t,$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 1 - \frac{1}{2}z^2, \\ \theta(z) &= 1 + \frac{1}{2}z. \end{aligned}$$

Za linearnu reprezentaciju treba naći $\{\psi_j\}$ tako da je

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} = \psi(B)Z_t,$$

za $\psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j$. Lako se izračuna da je

$$\phi(z) = 0 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2} > 1,$$

pa su nultočke AR polinoma izvan jediničnog kruga što znači da je proces kauzalan. Stoga je $\psi_j = 0$ za $j < 0$. Formalno možemo pisati

$$X_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}Z_t,$$

i $\psi(z)$ tražimo tako da je

$$\psi(z) = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}, \quad |z| \leq 1.$$

Uočimo da je

$$\frac{1}{\phi(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} z^{2j}.$$

Ovdje smo iskoristili svojstvo geometrijskog reda $\frac{1}{1-q} = \sum_{j=0}^{\infty} q^j$. Primijetimo da se tu pojavljuje uvjet da su nultočke po modulu veće od 1, jer geometrijski red je konvergentan za $|q| < 1$, a ulogu q ovdje ima $z/\sqrt{2}$ u izrazu

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{z}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1 + \frac{z}{\sqrt{2}}}.$$

Naime općenito bi imali

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_2}}$$

za nultočke z_1, z_2 od ϕ i mora vrijediti $|z/z_i| < 1 \Leftrightarrow |z| < |z_i|$ da bi mogli razviti u (konvergentan) geometrijski red. Da bi radijus konvergencije reda bio barem $|z| \leq 1$ mora biti $|z_1| > 1$ i $|z_2| > 1$.)

Koeficijente $\{\psi_j\}$ tražimo tako da bude

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j &= \frac{\theta(z)}{\phi(z)} \\ &= \left(1+\frac{1}{2}z\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}z^{2j} \\ &= 1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4}z^4+\cdots \\ &+\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}z^3+\frac{1}{8}z^5+\cdots .\end{aligned}$$

Izjednačimo li koeficijente uz odgovarajuće potencije slijedi

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = \frac{1}{2}, \quad \psi_2 = \frac{1}{2}, \quad \psi_3 = \frac{1}{4}, \quad \ldots$$

odnosno općenito

$$\psi_j = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & j = 2k, \\ \frac{1}{2^{k+1}}, & j = 2k+1. \end{cases}$$

Sad kad imamo dostupnu linearnu reprezentaciju možemo iskoristiti Korolar II.1.3:

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}.$$

Za $h = 0$

$$\gamma(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \sum_{j \text{ paran}} \psi_j^2 + \sum_{j \text{ neparan}} \psi_j^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+2}} = \left(1+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}.$$

Ako je h paran, $h = 2l$, onda

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \sum_{j \text{ paran}} \psi_j \psi_{j+h} + \sum_{j \text{ neparan}} \psi_j \psi_{j+h} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k}\psi_{2k+2l} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k+1}\psi_{2k+1+2l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{k+l}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{2^{k+1+l}} \\ &= \frac{1}{2^l}\left(1+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{3}\frac{1}{2^l},\end{aligned}$$

a ako je h neparan, $h = 2l+1$,

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \sum_{j \text{ paran}} \psi_j \psi_{j+h} + \sum_{j \text{ neparan}} \psi_j \psi_{j+h} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k} \psi_{2k+2l+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{2k+1} \psi_{2k+1+2l+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{k+l+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+l+1}} \\
&= \frac{1}{2^l} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2^l}.
\end{aligned}$$

Dakle, za $h \geq 0$

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{5}{3}\frac{1}{2^l}, & h = 2l, \\ \frac{1}{2^l}, & h = 2l+1, \end{cases}$$

i

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{1}{2^l}, & h = 2l, \\ \frac{1}{2^l}\frac{3}{5}, & h = 2l+1. \end{cases}$$

Drugu metodu ilustrirat ćemo na sljedećem zadatku. Ona je prikladnija kad nije potrebno imati linearnu reprezentaciju. Prije toga, vrijedi istaknuti da općenito za kauzalan ARMA proces $\{X_t\}$

$$\mathrm{E} X_s Z_t = 0 \text{ za } s < t, \tag{II.4.5}$$

jer koristeći neprekidnost skalarnog produkta u L^2 imamo

$$\mathrm{E} X_s Z_t = \mathrm{E} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{s-j} Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \mathrm{E} Z_{s-j} Z_t = 0.$$

Zadatak II.4.3 Za proces

$$X_t = \frac{1}{2} X_{t-2} + Z_t + \frac{1}{2} Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0,1), \tag{II.4.6}$$

provjerite je li kauzalan i invertibilan te odredite ACVF. ■

Rješenje. Iz prethodnog zadatka znamo da je

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= 1 - \frac{1}{2} z^2, \\
\theta(z) &= 1 + \frac{1}{2} z,
\end{aligned}$$

i da je proces kauzalan. Za invertibilnost uočimo da je

$$\theta(z) = 0 \Leftrightarrow z = -2$$

pa je $|z| > 1$ iz čega slijedi invertibilnost.

Postupak računanja ACVF:

- jednadžbu (II.4.6) množimo s X_t i uzmemo očekivanje

$$\mathrm{E}X_t^2 = \frac{1}{2}\mathrm{E}X_{t-2}X_t + \mathrm{E}X_tZ_t + \frac{1}{2}\mathrm{E}X_tZ_{t-1} \tag{II.4.7}$$

  Uočimo da zbog (II.4.5) iz (II.4.6) slijedi

$$\mathrm{E}X_tZ_t = \frac{1}{2}\mathrm{E}X_{t-2}Z_t + \mathrm{E}Z_t^2 + \frac{1}{2}\mathrm{E}Z_{t-1}Z_t = 0+1+0 = 1.$$

  i slično

$$\mathrm{E}X_tZ_{t-1} = \frac{1}{2}\mathrm{E}X_{t-2}Z_{t-1} + \mathrm{E}Z_tZ_{t-1} + \frac{1}{2}\mathrm{E}Z_{t-1}^2 = 0+0+\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

  Konačno, kako je $\mathrm{E}X_t = 0$, iz (II.4.7) slijedi

$$\gamma(0) = \frac{1}{2}\gamma(2) + 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\gamma(2) + \frac{5}{4}.$$

- jednadžbu (II.4.6) množimo s X_{t-1} i uzmemo očekivanje

$$\begin{aligned} EX_tX_{t-1} &= \frac{1}{2}\mathrm{E}X_{t-2}X_{t-1} + \mathrm{E}Z_tX_{t-1} + \frac{1}{2}Z_{t-1}X_{t-1} \\ \gamma(1) &= \frac{1}{2}\gamma(1) + 0 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  iz čega slijedi

$$\gamma(1) = 1.$$

- jednadžbu (II.4.6) množimo s X_{t-2} i uzmemo očekivanje

$$\gamma(2) = \frac{1}{2}\gamma(0).$$

- jednadžbu (II.4.6) množimo s X_{t-3} i uzmemo očekivanje

$$\gamma(3) = \frac{1}{2}\gamma(1) \Rightarrow \gamma(3) = \frac{1}{2}.$$

- jednadžbu (II.4.6) množimo s X_{t-4} i uzmemo očekivanje

$$\gamma(4) = \frac{1}{2}\gamma(2) \Rightarrow \gamma(4) = \frac{1}{4}\gamma(0).$$

Kombiniramo li izraz za $\gamma(0)$ i $\gamma(2)$

$$\gamma(0) = \frac{1}{4}\gamma(0) + \frac{5}{4} \Rightarrow \gamma(0) = \frac{5}{3}.$$

Općenito, dolazimo do izraza kao u prethodnom zadatku.

Zadatak II.4.4 Odredite ACVF kauzalnog $ARMA(1,1)$ procesa

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$$

■

Rješenje. Treba uočiti da je očekivanje 0 jer je

$$\mathrm{E}X_t = \phi\,\mathrm{E}X_{t-1} + 0$$

pa zbog stacionarnosti mora biti $\mathrm{E}X_t = 0$. Množimo ARMA jednadžbu s X_t i uzmemo očekivanje pa slijedi

$$\mathrm{E}X_t^2 = \phi\,\mathrm{E}X_tX_{t-1} + \mathrm{E}X_tZ_t + \theta\,\mathrm{E}X_tZ_{t-1} = \phi\gamma(1) + \mathrm{E}X_tZ_t + \theta\,\mathrm{E}X_tZ_{t-1}.$$

Koristeći kauzalnost i (II.4.5) dobijemo

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X_tZ_t &= \phi\,\mathrm{E}X_{t-1}Z_t + \mathrm{E}Z_t^2 + \theta\,\mathrm{E}Z_{t-1}Z_t = 0 + \sigma^2 + 0 = \sigma^2, \qquad \text{(II.4.8)}\\ \mathrm{E}X_tZ_{t-1} &= \phi\,\mathrm{E}X_{t-1}Z_{t-1} + \mathrm{E}Z_tZ_{t-1} + \theta\,\mathrm{E}Z_{t-1}^2 = \phi\sigma^2 + 0 + \theta\sigma^2 = (\phi+\theta)\sigma^2,\end{aligned}$$

tako da iz prve jednadžbe slijedi

$$\gamma(0) = \phi\gamma(1) + \sigma^2 + \theta(\phi+\theta)\sigma^2.$$

Dalje množimo ARMA jednadžbu s X_{t-1} i dobijemo

$$\gamma(1) = \phi\gamma(0) + \mathrm{E}Z_tX_{t-1} + \theta\,\mathrm{E}Z_{t-1}X_{t-1} = \phi\gamma(0) + 0 + \theta\sigma^2$$

koristeći kauzalnost i (II.4.8) za $t-1$ umjesto t. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu za $\gamma(0)$ slijedi

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \frac{1+\theta^2+2\phi\theta}{1-\phi^2}\sigma^2,\\ \gamma(1) &= \frac{\theta+\phi+\phi^2\theta+\theta^2\phi}{1-\phi^2}\sigma^2.\end{aligned}$$

Množenjem s X_{t-2} slijedi zbog kauzalnosti

$$\gamma(2) = \phi\gamma(1)$$

i općenito za $h \geq 2$

$$\gamma(h) = \phi\gamma(h-1) = \cdots = \phi^{h-1}\gamma(1).$$

Zadatak II.4.5 Pokažite da je ACVF procesa

$$X_t = \frac{1}{2}X_{t-1} + Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}, \qquad \{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2),$$

jednaka

$$\gamma(h) = \begin{cases}\sigma^2, & h = 0,\\ 0, & h \neq 0.\end{cases}$$

■

Rješenje. Uvrstiti parametre u rješenje prethodnog zadatka.

Prethodni zadatak pokazuje da $\{X_t\}$ ima ACVF kao bijeli šum – $ARMA(0,0)$, iako izgleda kao $ARMA(1,1)$. Razlog je to što karakteristični polinomi imaju istu nultočku (zapravo su jednaki), pa ih u određenom smislu možemo *pokratiti*

$$\left(1-\frac{1}{2}B\right)X_t = \left(1-\frac{1}{2}B\right)Z_t.$$

Iz tog razloga smo u definiciji ARMA procesa naveli uvjet da karakteristični polinom nemaju zajedničkih nultočki. U suprotnom se red modela može reducirati.

Zadatak II.4.6 — $AR(1)+WN = ARMA(1,1)$. Neka je $\{Y_t, t\in\mathbb{Z}\}$ proces definiran s

$$Y_t = X_t + W_t$$

gdje je $\{W_t\}\sim WN(0,\sigma_W^2)$ i $\{X_t\}$ kauzalan $AR(1)$ proces

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t, \quad \{Z_t\}\sim WN(0,\sigma^2),$$

pri čemu je $\mathrm{E}\,W_t Z_s = 0$ za sve $t,s\in\mathbb{Z}$.

(i) Pokažite da je $\{Y_t\}$ stacionaran i odredite ACVF.

(ii) Pokažite da proces $U_t = Y_t - \phi Y_{t-1}$ ima korelacije samo na koraku 1.

(iii) Odredite $ARMA(1,1)$ proces koji po svojoj korelacijskoj strukturi odgovara $\{Y_t\}$.

Rješenje.

(i) Provjerimo svojstva stacionarnosti:

- $\mathrm{E}\,Y_t^2 \le \mathrm{E}\,X_t^2 + \mathrm{E}\,W_t^2 < \infty$.
- $\mathrm{E}\,Y_t = \mathrm{E}\,X_t + \mathrm{E}\,W_t = 0$.
- Za $h\in\mathbb{Z}$ je

$$\begin{aligned}\gamma_Y(t+h,t) &= \mathrm{E}\,Y_{t+h}Y_t = \mathrm{E}\left[(X_{t+h}+W_{t+h})(X_t+W_t)\right] \\ &= \mathrm{E}\,X_{t+h}X_t + \mathrm{E}\,X_{t+h}W_t + \mathrm{E}\,W_{t+h}X_t + \mathrm{E}\,W_{t+h}W_t.\end{aligned}$$

Zbog kauzalnosti $\{X_t\}$ možemo zapisati kao $X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j Z_{t-j}$. Po pretpostavci su $\{Z_t\}$ i $\{W_t\}$ nekorelirani, pa su onda i $\{X_t\}$ i $\{W_t\}$ nekorelirani i $\mathrm{E}\,X_{t+h}W_t = 0$ i $\mathrm{E}\,W_{t+h}X_t = 0$. Slijedi

$$\gamma_Y(t+h,t) = \gamma_X(h) + \mathrm{E}\,W_{t+h}W_t = \begin{cases}\gamma_X(h), & h\ne 0,\\ \gamma_X(0)+\sigma_W^2, & h=0,\end{cases}$$

pa je $\{Y_t\}$ stacionaran i možemo pisati $\gamma_Y(h) = \gamma_Y(t+h,t)$.

(ii) Računamo

$$\begin{aligned}\gamma_U(t+h,t) &= \mathrm{E}\,U_{t+h}U_t = \mathrm{E}\,Y_{t+h}Y_t - \phi\,\mathrm{E}\,Y_{t+h}Y_{t-1} - \phi\,\mathrm{E}\,Y_{t+h-1}Y_t + \phi^2\,\mathrm{E}\,Y_{t+h-1}Y_{t-1} \\ &= (1+\phi^2)\gamma_Y(h) - \phi\gamma_Y(h+1) - \phi\gamma_Y(h-1),\end{aligned}$$

što po (i) daje

$$\gamma_U(t+h,t) = \begin{cases}(1+\phi^2)(\gamma_X(0)+\sigma_W^2) - \phi\gamma_X(1) - \phi\gamma_X(-1), & h=0,\\ (1+\phi^2)\gamma_X(-1) - \phi(\gamma_X(0)+\sigma_W^2) - \phi\gamma_X(-2), & h=-1,\\ (1+\phi^2)\gamma_X(1) - \phi\gamma_X(2) - \phi(\gamma_X(0)+\sigma_W^2), & h=1,\\ (1+\phi^2)\gamma_X(h) - \phi\gamma_X(h+1) - \phi\gamma_X(h-1), & \text{inače.}\end{cases}$$

Uvrstimo li izraz za ACVF $AR(1)$ procesa

$$\gamma_X(h) = \frac{\sigma_Z^2}{1-\phi^2}\phi^{|h|}$$

dobije se

$$\gamma_U(t+h,t) = \begin{cases}\sigma_Z^2 + (1+\phi^2)\sigma_W^2, & h=0,\\ -\phi\sigma_W^2, & |h|=1,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

(iii) Neka je $\{\widetilde{Y}_t\}$ općeniti $ARMA(1,1)$ proces

$$\widetilde{Y}_t - \widetilde{\phi}\widetilde{Y}_{t-1} = V_t + \theta V_{t-1}, \quad \{V_t\} \sim WN(0, \sigma_V^2).$$

Treba odrediti $\widetilde{\phi}$, θ i σ_V^2 tako da je $\gamma_{\widetilde{Y}}(h) = \gamma_Y(h)$. Prvo, kako je $\{U_t\}$ koreliran samo na koraku jedan, slijedi $\widetilde{\phi} = \phi$ i ACVF od $\{V_t + \theta V_{t-1}\}$ treba biti jednaka kao ACVF od $Y_t - \phi Y_{t-1} = U_t$. ACVF $MA(1)$ procesa $\{V_t + \theta V_{t-1}\}$ je

$$\gamma_{\{V_t+\theta V_{t-1}\}}(0) = \sigma_V^2(1+\theta^2), \quad \gamma_{\{V_t+\theta V_{t-1}\}}(1) = \sigma_V^2\theta.$$

Izjednačavanjem slijedi

$$\sigma_V^2(1+\theta^2) = \sigma_Z^2 + (1+\phi^2)\sigma_W^2, \quad \sigma_V^2\theta = -\phi\sigma_W^2.$$

Rješavanjem po θ i σ_V^2 dobijemo odgovarajuće parametre.

R **Praktikum.** ARMA procesi.

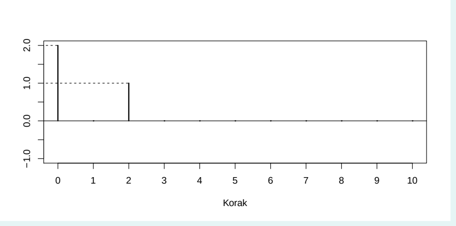
II.4.2 Zadaci

Zadatak II.4.7 Je li proces

$$X_t = X_{t-1} - \frac{3}{16}X_{t-2} + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

stacionaran? Ako da, odredite reprezentaciju u obliku linearnog procesa. Kako bi mogli reprezentirati proces $\{Z_t\}$ u obliku $AR(\infty)$ procesa? ■

Zadatak II.4.8 Odredite stacionaran proces s očekivanjem 0 čija funkcija autokovarijanci izgleda kao na slici. Argumentirajte. Što možete reći o jedinstvenosti takvog procesa?



■

Zadatak II.4.9 Zadan je proces

$$X_t = 0.5X_{t-1} + Z_t - 1.4Z_{t-1} + 0.45Z_{t-2},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$.

(a) Je li proces kauzalan i invertibilan?

(b) Odredite funkciju autokovarijanci. O kakvom procesu se radi? Argumentirajte tvrdnju.

(c) Odredite reprezentaciju procesa $\{X_t\}$ u obliku linearnog procesa.

■

II.5. Nestacionarnost i transformacije

Da bi vremenski niz modelirali nekim ARMA procesom moramo biti uvjereni niz *izgleda* kao realizacija stacionarnog procesa. Tu nema egzaktnog odgovora i uvijek bi mogli naći argumente zašto je neki niz realizacija nestacionarnog procesa. Ali ako nešto želimo predviđati, neki oblik konstantnosti u vremenu mora postojati. Čak i nizovi koji su realizacija stacionarnog procesa mogu izgledati kao da to nisu. S druge strane, neke oblike nestacionarnosti možemo ukloniti različitim transformacijama. Ovdje ćemo obraditi neke načine pojavljivanja nestacionarnosti i transformacije kojima možemo doći do stacionarnog procesa, odnosno niza koji izgleda kao realizacija nekog stacionarnog procesa.

II.5.1 Deterministički trend

Za slučajan proces $\{X_t\}$ kažemo da ima **deterministički trend** ako je

$$X_t = \mu_t + Y_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{II.5.1}$$

gdje je $\{Y_t\}$ stacionaran proces s očekivanjem 0, a $\mu : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ (deterministička) funkcija koja nije konstanta. Zbog toga $\{X_t\}$ nije stacionaran, ali $\{X_t - \mu_t, t \in \mathbb{Z}\}$ jest.

U primjenama oblik trenda pretpostavlja se na osnovu izgleda vremenskog niza, najčešće:

- linearni trend: $\mu_t = \beta_0 + \beta_1 t$,
- polinomijalni trend: $\mu_t = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_k t^k$, $k \in \mathbb{N}$,
- kosinusni: $\mu_t = \beta \cos(2\pi f t + \Phi)$, β – amplituda, f – frekvencija, Φ – faza.

Pretpostavljeni trend mora imati smisla i u okviru problema koji su proučava (primjerice, zašto vjerujemo da postoji linearni rast zauvijek). Ako uočimo da vremenski niz izgleda kao stacionarne varijacije oko neke funkcije vremena, onda ima smisla razmotriti postojanje trenda. Postavlja se pitanje kako procijeniti trend.

Uočimo da (II.5.1) ima oblik regresijskog modela, gdje je X_t zavisna varijabla, μ_t funkcija nezavisne varijable t i Y_t odgovara greški, ali greške $\{Y_t\}$ ne moraju biti nekorelirane kao u klasičnoj regresiji. Je li onda procjena metodom najmanjih kvadrata jednako *dobra*?

Klasični linearni regresijski model matrično možemo zapisati kao

$$\boldsymbol{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{II.5.2}$$

gdje je

- $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor grešaka, $\mathrm{E}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ i $\mathrm{Cov}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma^2 I$, gdje $\mathrm{Cov}\,\boldsymbol{\varepsilon}$ označava matricu kovarijanci slučajnog vektora

$$\mathrm{Cov}\,\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)]_{i,j=1,\ldots,n},$$

- $\boldsymbol{Y}$ vektor zavisne varijable s realizacijama $\boldsymbol{y}$,
- X je matrica

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix},$$

- $\boldsymbol{\beta}$ vektor parametara $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \ldots, \beta_p]^T$.

Procjenitelj metodom najmanjih kvadrata (LS, eng. least squares)

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \boldsymbol{y} \tag{II.5.3}$$

je u tom slučaju najbolji linearni nepristran procjenitelj (eng. best linear unbiased estimator – BLUE) (vidjeti Gauss-Markovljev teorem).

Pretpostavimo sada da greške mogu biti korelirane i označimo

$$\Gamma = \mathrm{Cov}\,\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)]_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Takvu situaciju imamo u (II.5.1) ako je trend linearan ili polinomijalan. Matrica Γ je simetrična pozitivno definitna matrica pa postoji matrica A takva da je

$$A\Gamma A^T = \sigma^2 I$$

za neki $\sigma^2 > 0$ (zbog simetričnosti i pozitivne definitnosti postoji U takva da je $U\Gamma U^T = \Lambda$, Λ dijagonalna, iz čega slijedi $\Lambda^{-1/2} U \Gamma U^T \Lambda^{-1/2} = I \Rightarrow A = \Lambda^{-1/2} U$). Primijenimo li A na (II.5.2), dobijemo transformirani model

$$A\boldsymbol{Y} = AX\boldsymbol{\beta} + A\boldsymbol{\varepsilon},$$

u kojem je matrica kovarijanci grešaka

$$\mathrm{Cov}\,A\boldsymbol{\varepsilon} = A\,\mathrm{Cov}\,\boldsymbol{\varepsilon} A^T = A\Gamma A^T = \sigma^2 I$$

pa analogno (II.5.3) možemo definirati procjenu

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \left((AX)^T AX\right)^{-1} (AX)^T A\boldsymbol{y} = \left(X^T A^T AX\right)^{-1} X^T A^T A\boldsymbol{y}.$$

Kako je $A\Gamma A^T = \sigma^2 I$, onda je $\Gamma = \sigma^2 A^{-1}\left(A^T\right)^{-1} \Rightarrow \Gamma^{-1} = \sigma^{-2} A^T A$ pa slijedi

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \left(\sigma^2 X^T \Gamma^{-1} X\right)^{-1} X^T \sigma^2 \Gamma^{-1} \boldsymbol{y} = \left(X^T \Gamma^{-1} X\right)^{-1} X^T \Gamma^{-1} \boldsymbol{y}.$$

Tako dobivenu procjenu nazivamo **procjena generaliziranom metodom najmanjih kvadrata** (GLS, eng. generalized least squares). Ako je $\Gamma = \sigma^2 I$, svodi se na običnu procjenu metodom najmanjih kvadrata.

Problem je što u praktičnim situacijama nikad ne znamo Γ, a ne možemo ni procijeniti Γ prije nego što oduzmemo trend i dođemo do reziduala. Uobičajeni postupak je onda prvo napraviti procjenu metodom najmanjih kvadrata, zatim se na rezidualima procijeni $\widehat{\Gamma}_1$, a onda provede generalizirana metoda najmanjih kvadrata koristeći $\widehat{\Gamma}_1$. To dovodi do nove procjene za Γ i postupak se ponavlja do konvergencije.

Ipak, može se pokazati da je procjena metodom najmanjih kvadrata za primjerice linearne trendove i određene stacionarne procese $\{Y_t\}$ u (II.5.1) asimptotski efikasna. U svakom slučaju, treba biti pažljiv sa zaključcima iz regresijske analize. Iz aspekta regresije govorimo o *regresiji s koreliranim greškama* pri čemu se greške obično modeliraju nekim ARMA procesom.

R **Praktikum.** Deterministički trend. Primjer modeliranja trenda temperature.

II.5.2 Diferenciranje i ARIMA procesi

Diferenciranjem procesa možemo eliminirati razne oblike nestacionarnosti. Ideja je jednostavna: umjesto vrijednosti niza, promatramo promjene po vremenskim trenucima.

Definicija II.5.1 Za slučajan proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ **operator diferenciranja** Δ je definiran s

$$\Delta X_t = (1-B)X_t = X_t - X_{t-1}.$$

Primjenom $d \in \mathbb{N}$ puta imamo $\Delta^d X_t = (1-B)^d X_t$

Uočimo da se radi o linearnom filteru. Sljedeći zadatak pokazuje da se uz dovoljno diferenciranja svaki polinomijalni trend (posebno i linearni) može eliminirati.

Zadatak II.5.1 Neka je $X_t = p_t + Y_t$, gdje je $\{Y_t\}$ stacionaran i $p_t = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j$ polinom stupnja $n \in \mathbb{N}$. Proces $\{X_t\}$ nije stacionaran, ali pokažite da je $\{\Delta^n X_t\}$ stacionaran proces. ■

Rješenje. Prvo uočimo kako diferenciranje djeluje na polinom:

$$\Delta p_t = p_t - p_{t-1} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j (t-1)^j = \underbrace{\alpha_n t^n - \alpha_n (t-1)^n}_{\text{polinom stupnja } \leq n-1} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j t^j - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j (t-1)^j}_{\text{polinom stupnja } \leq n-1}.$$

Dakle, Δp_t je polinom stupnja manjeg ili jednakog $n-1$ pa je onda $\Delta^n p_t$ konstanta. Osim toga,

$$\Delta^n = (1-B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k B^k,$$

što je linearni filter. Prema Propoziciji II.1.2, linearni filter stacionarnog procesa je stacionaran pa je $\{\Delta^n Y_t\}$ stacionaran. Slijedi da je i $\{\Delta^n X_t\}$ stacionaran proces.

■ **Primjer II.5.1** Neka je $\{X_t\}$ slučajna šetnja $X_t = X_{t-1} + Z_t$, $\{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$. Tada je

$$\Delta X_t = Z_t$$

stacionaran proces. Dakle, jednim diferenciranjem od slučajne šetnje dobijemo stacionaran proces i to n.j.d. šum.

Zadatak II.5.2 Definirajmo procese

$$X_t = Y_t + Z_t,$$

gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ i

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1} + U_t,\ Y_0 = 0, \\ U_t &= U_{t-1} + W_t,\ U_0 = 0, \end{aligned}$$

gdje je $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ nezavisna od $\{Z_t\}$ Pokažite da $\{X_t\}$ nije stacionaran, ali da je $\{\Delta^2 X_t\}$ zbroj $MA(2)$ procesa i bijelog šuma pa stoga stacionaran.
[Uputa: za pokazati nestacionarnost izračunajte varijancu, za drugi dio zadatka raspišite.] ■

Rješenje. Nije stacionaran jer

$$\operatorname{Var} X_t = \operatorname{Var} Y_t + \sigma^2 = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{t} U_i\right) + \sigma^2 = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{i} W_i\right) + \sigma^2,$$

što nije konstanta. Diferenciranjem slijedi

$$\begin{aligned} \Delta^2 X_t &= \Delta(X_t - X_{t-1}) = \Delta(Y_t + Z_t - Y_{t-1} - Z_{t-1}) = \Delta(U_t + Z_t - Z_{t-1}) \\ &= U_t + Z_t - Z_{t-1} - U_{t-1} - Z_{t-1} + Z_{t-2} \\ &= \underbrace{Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}}_{MA(2)\text{ proces}} + \underbrace{W_t}_{\text{bijeli šum}}, \end{aligned}$$

pa je $\{\Delta^2 X_t\}$ stacionaran jer je zbroj dva stacionarna procesa.

Za procese čijim diferenciranjem dolazimo do nekog ARMA procesa imamo poseban naziv.

Definicija II.5.2 Neka je $d \in \mathbb{N}_0$. Slučajni proces $\{X_t\}$ je **integrirani ARMA proces reda** (p, d, q) ako je

$$Y_t = \Delta^d X_t$$

kauzalan $ARMA(p, q)$ proces. Pišemo $\{X_t\} \sim ARIMA(p, d, q)$.

Koristeći standardne oznake za karakteristične polinome možemo pisati

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B) Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2). \tag{II.5.4}$$

Proces $\{X_t\}$ je stacionaran ako i samo ako je $d = 0$ kad se svodi na $ARMA(p, q)$ proces.

Uočimo da uz $\widetilde{\phi}(z) = \phi(z)(1-z)^d$ možemo (II.5.4) zapisati kao

$$\widetilde{\phi}(B) X_t = \theta(B) Z_t.$$

Na prvi pogled to izgleda kao ARMA proces, ali bitna razlika je što $\widetilde{\phi}$ ima nultočku 1 (jedinični korijen). Za ARIMA procese kod kojih je $d \geq 1$ često kažemo da imaju **stohastički trend**. Naziv *integrirani* dolazi od toga što *diferenciranjem* dobijemo stacionaran proces.

R **Praktikum.** Diferenciranje i ARIMA procesi.

S obzirom da diferenciranje efikasno transformira nestacionarne nizove u stacionarne, postavlja se pitanje zašto ne bismo svaki vremenski niz diferencirali i to više puta kako bi eliminirali sve nestacionarnosti. Odgovor slijedi iz sljedećeg primjera.

■ **Primjer II.5.2** Neka je $X_t = X_{t-1} + Z_t$, $\{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$ slučajna šetnja. Uočimo da je

$$\operatorname{Var} \Delta X_t = \operatorname{Var} Z_t = \sigma^2.$$

Diferenciranjem dva puta dobijemo

$$\Delta^2 X_t = \Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

što je $MA(1)$ proces koji je neinvertibilan (nultočka MA polinoma je 1) i za koji je $\mathrm{Var}\,\Delta^2 X_t = 2\sigma^2$. Dakle, dodatno diferenciranje je povećalo varijancu i stvorilo dodatnu zavisnost ($MA(1)$ – i to neinvertibilan – proces umjesto n.j.d. šuma). Previše diferenciranja (*prediferenciranje*) zato nije dobro.

Problem prediferenciranja posebno je važan za podatke vremenskog niza jer treba znati kada stati s diferenciranjem na osnovu podataka. Osim toga, pitanje je treba li uopće diferencirati, odnosno postoji li jedinični korijen u AR polinomu ako se razmatra ARIMA model.

Pretpostavimo da razmatramo model oblika

$$X_t = \mu_t + \alpha X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \psi_j \Delta X_{t-j} + Z_t,$$

gdje je μ_t trend, $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$, dok $\sum_{j=1}^{p} \psi_j \Delta X_{t-j}$ aproksimira ARMA komponentu koja ostaje nakon diferenciranja. **Prošireni Dickey-Fuller test jediničnog korijena** (**ADF test**) testira hipoteze

$$H_0 : \alpha = 1 \text{ (postoji jedinični korijen)},$$
$$H_1 : |\alpha| < 1 \text{ (ne postoji jedinični korijen)}.$$

Važno je uočiti:

- hipoteza H_0 povlači da proces nije stacionaran,
- hipoteza H_1 ne povlači da je proces stacionaran – proces može biti nestacionaran i ako nema jedinični korijen, npr. zbog trenda kao $X_t = 2t + 0.5X_{t-1} + Z_t$ koji nije stacionaran ali ni nema jedinični korijen.

Dakle, ADF test nije test o stacionarnosti već nam prvenstveno govori ima li smisla diferencirati niz. Osim ADF testa koriste se još i Phillips-Perronov test i Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) koji imaju nešto drugačije hipoteze.

ADF test može pomoći pri odlučivanju je li uzrok nestacionarnosti deterministički ili stohastički trend (jedinični korijen). Odgovor nije uvijek jednoznačan i treba imati na umu da to nisu jedine alternative.

R **Praktikum.** Testovi o postojanju jediničnog korijena. Deterministički ili stohastički trend.

II.5.3 Transformiranje potencijom i logaritmom

Za danu vrijednost $\lambda \in \mathbb{R}$ niz ili proces možemo transformirati funkcijom

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ \log x, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Transformacija je poznata i kao Box-Cox transformacija. U prvom izrazu glavni dio je x^λ, a oduzimanje 1 i dijeljenje s λ stoji kako bi familija transformacija bila neprekidna po λ jer $g_\lambda(x) \to \log x = g_0(x)$ kad $\lambda \to 0$.

Transformacija se može primijeniti samo za pozitivne podatke. Svakako najvažnija transformacija iz ove klase je **logaritmiranje** koja odgovara $\lambda = 0$), a uz nju još se ponekad koriste i

- $\lambda = 1/2$ – korjenovanje koje može biti prikladno za brojeće podatke,
- $\lambda = -1$ – recipročne vrijednosti.

Ipak, osim logaritamske, ostale se vrlo rijetko koriste i treba imati posebno opravdanje za njihovu primjenu.

Pretpostavimo da imamo proces $\{X_t\}$ takav da je

$$\mathrm{E}X_t = \mu_t \;\text{ i }\; \sqrt{\mathrm{Var}\,X_t} = |\mu_t|\sigma,$$

odnosno, standardna devijacija proporcionalna je očekivanju. Primjer procesa koji ima takvo svojstvo je $X_t = \mu_t Z_t$, gdje su $\{Z_t\}$ n.j.d. pozitivne takve da je $\mathrm{E}Z_t = 1$ i $\mathrm{Var}\,Z_t = \sigma^2$. Promjenu u očekivanju možemo eliminirati oduzimanjem trenda, ali to neće eliminirati promjenjivost varijance u odnosu na vrijeme.

Ako razvijemo $g_0(x) = \log x$ u Taylorov razvoj oko 1, dobijemo

$$g_0(x) \approx g_0(1) + (x-1)g_0'(1) = x - 1.$$

Očekujemo da je $X_t/\mu_t \approx 1$ pa je

$$\log\frac{X_t}{\mu_t} \approx \frac{X_t}{\mu_t} - 1 \;\Rightarrow\; \log X_t \approx \log\mu_t + \frac{X_t-\mu_t}{\mu_t},$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\log X_t &\approx \log\mu_t\\ \mathrm{Var}\log X_t &\approx \mathrm{E}\left(\log X_t - \log\mu_t\right)^2 \approx \mathrm{E}\left(\frac{X_t-\mu_t}{\mu_t}\right)^2 = \frac{\mu_t^2\sigma^2}{\mu_t^2} = \sigma^2.\end{aligned}$$

Dakle, $\{\log X_t\}$ ima konstantnu varijancu, i dalje nije stacionaran, ali promjenjivo očekivanje možemo oduzet kao deterministički trend. Problem promjenjive varijance u ovom primjeru ne treba miješati sa svojstvom uvjetne heteroskedastičnosti kojim ćemo se baviti kasnije. Logaritamska transformacija može biti pogodna i kad postoji eksponencijalni rast.

Zadatak II.5.3 Neka je $\{X_t\}$ pozitivan proces takav da je $\mathrm{E}X_t = \mu_t$ i $\mathrm{Var}\,X_t = \mu_t\sigma^2$. Pokažite kao u prethodnom da je tada

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\sqrt{X_t}-1}{\frac{1}{2}}\right) \approx \sigma^2.$$

■

Rješenje. Razvijemo $g(x) = \sqrt{x}$ oko 1 pa je $g(x) \approx 1 + (x-1)/2 = x/2 + 1/2$. Stoga

$$g\left(\frac{X_t}{\mu_t}\right) \approx \frac{X_t}{2\mu_t} + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{X_t} \approx \frac{X_t}{2\sqrt{\mu_t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu_t},$$

pa onda

$$\begin{aligned}E\sqrt{X_t} &\approx \frac{\mathrm{E}X_t}{2\sqrt{\mu_t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\mu_t} = \sqrt{\mu_t},\\ \mathrm{Var}\sqrt{X_t} &\approx \mathrm{E}\left(\sqrt{X_t} - \sqrt{\mu_t}\right)^2 \approx \mathrm{E}\left(\frac{X_t}{2\sqrt{\mu_t}} - \frac{1}{2}\sqrt{\mu_t}\right)^2 = \mathrm{E}\left(\frac{X_t-\mu_t}{2\sqrt{\mu_t}}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{4}.\end{aligned}$$

Prethodni zadatak pokazuje u kojim situacijama je pogodna primjena transformacije korijenom (primjerice, neki brojeći procesi imaju to svojstvo).

Logaritamska transformacija posebno je važna za financijske podatke. Neka je $\{X_t\}$ model za vrijednost neke financijske imovine u trenutku t. Logaritmiranjem dobijemo niz $\{\log X_t\}$, a njegovim diferenciranjem niz **log-povrata** $\{R_t\} = \{\Delta \log X_t\}$

$$R_t = \Delta \log X_t = \log X_t - \log X_{t-1} = \log \frac{X_t}{X_{t-1}}.$$

Alternativno, možemo definirati i **povrate**

$$\widetilde{R}_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}.$$

Umjesto originalnog niza $\{X_t\}$ obično promatramo povrate ili log-povrate jer su neovisni o skali (primjerice, radi li se o cijeni u kunama ili lipama) i češće imaju svojstva blizu stacionarnosti. Osim toga, time ne gubimo nikakvu informaciju o X_t jer

$$\sum_{i=1}^{t} R_i = \log X_1 - \log X_0 + \cdots + \log X_t - \log X_{t-1} = \log \frac{X_t}{X_0} \ \Rightarrow \ X_t = X_0 e^{\sum_{i=1}^{t} R_i},$$
$$\prod_{i=1}^{t}(1+\widetilde{R}_i) = \prod_{i=1}^{t} \frac{X_t}{X_{t-1}} = \frac{X_1}{X_0} \cdots \frac{X_t}{X_{t-1}} = \frac{X_t}{X_0} \ \Rightarrow \ X_t = X_0 \prod_{i=1}^{t}(1+\widetilde{R}_i),$$

pa na osnovu $X_0, R_1, \ldots, R_t$, odnosno na osnovu $X_0, \widetilde{R}_1, \ldots, \widetilde{R}_t$ znamo X_t.

Prednosti log-povrata u odnosu na povrate:

- simetrični su, primjerice

X_{t-1}	X_t	$\widetilde{R}_t$	R_t
100	200	1 (100 %)	$\log 2$
200	100	-0.5 (-50%)	$-\log 2$

- $\{R_t\}$ aditivno daje X_t za razliku od multiplikativnog $\{\widetilde{R}_t\}$ što je jednostavnije,
- $\widetilde{R}_t \geq -1$ što je neuobičajen zahtjev za distribuciju,
- neke veličine je lakše izraziti s R_t (primjerice tečaj između dvije valute),
- često podaci pokazuju da log-povrati izgledaju kao realizacija stacionarnog procesa, a povrati ne.

R **Praktikum.** Transformiranje potencijom i logaritmom.

II.5.4 Zadaci

Zadatak II.5.4 Neka je $\{Y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ proces zadan s

$$Y_t = -2t + Z_t + 0.5 Z_{t-1},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$.

(a) Odredite funkciju očekivanja i autokovarijanci procesa $\{Y_t\}$. Je li proces stacionaran?

(b) Odredite funkciju očekivanja procesa $\{X_t\}$ definiranog s

$$X_t = \Delta Y_t.$$

Je li ovaj proces stacionaran? Usporedite varijancu procesa $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ i komentirajte. ■

Zadatak II.5.5 Je li proces $\{X_t\}$ definiran s

$$X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + Z_t - 0.5Z_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

stacionaran? Ako nije, kojom transformacijom tog procesa bi mogli dobiti stacionaran proces? ■

Zadatak II.5.6 Zadan je proces $\{X_t\}$

$$X_t = 2.5X_{t-1} - X_{t-2} + Z_t - 2Z_{t-1} + 0.75Z_{t-2},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$. Odredite o kojem ARMA, odnosno ARIMA procesu se radi. Je li $\{X_t\}$, odnosno njegov ARMA dio, kauzalan i invertibilan? ■

Zadatak II.5.7 Zadan je proces $\{X_t\}$

$$X_0 = 1,$$
$$X_t = X_{t-1}Z_t,\ t \in \mathbb{N},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim IID(1, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 1$ i Z_t su pozitivne slučajne varijable. Pokažite da $\{X_t\}$ nije stacionaran. Kako možemo transformirati $\{X_t\}$ do stacionarnog procesa? ■

III Prilagodba ARMA modela i predviđanje

Prilagodba je prijevod za engleski termin „fitting”. Pretpostavimo da raspolažemo vremenskim nizov $x_1, \dots, x_n$ za koji vjerujemo da je realizacija nekog stacionarnog procesa $\{X_t\}$. Do niza smo mogli doći direktno ili možda primjenom nekih transformacija iz poglavlja II.5. Vidjeli smo da je ARMA klasa vrlo fleksibilna za modeliranje ovakvog niza. U ovom poglavlju želimo na osnovu podataka odrediti konkretan ARMA proces kao model: odrediti p, q, koeficijente i σ^2. Metodologija koju ćemo koristiti poznata je i kao Box-Jenkins metodologija po njenim tvorcima.

Za početak promotrit ćemo jednostavan problem procjene koji dobro ilustrira kako zavisnost može utjecati na statistička svojstva procjenitelja.

III.1. Procjena konstantnog očekivanja

Pretpostavimo da vremenski niz *izgleda* stacionarno, ali nema očekivanje 0, stoga razmatramo model

$$X_t = \mu + Y_t,$$

gdje je $\{Y_t\}$ stacionaran proces s očekivanjem 0 i $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, konstantno očekivanje. Kao i za n.j.d. uzorak za procjenitelja očekivanja μ možemo definirati aritmetičku sredinu uzorka

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

To je nepristran procjenitelj jer

$$\mathrm{E}\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\mu + Y_i\right) = \mu.$$

Varijanca procjenitelja (srednjekvadratna greška) je

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\overline{X}_n &= \mathrm{E}\left(\overline{X}_n - \mu\right)^2 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\right)^2 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\,Y_i Y_j = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma(i-j),\end{aligned}$$

jer je $\mathrm{E}\,Y_iY_j = \mathrm{Cov}(Y_i,Y_j) = \mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \gamma(i-j)$ gdje je γ ACVF od $\{X_t\}$ odnosno $\{Y_t\}$. Uočimo da je dalje

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,\overline{X}_n = \frac{1}{n^2}\Big(&\gamma(0)+\gamma(-1)+\cdots+\gamma(1-n)\\
&+\gamma(1)+\gamma(0)+\cdots+\gamma(2-n)\\
&\vdots\\
&+\gamma(n-1)+\gamma(n-2)+\cdots+\gamma(0)\Big)
\end{aligned}
$$

iz čega slijedi

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,\overline{X}_n &= \frac{1}{n^2}\left(n\gamma(0)+(n-1)\gamma(-1)+\cdots+1\cdot\gamma(1-n)+(n-1)\gamma(1)+\cdots+1\cdot\gamma(n-1)\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{h=-n+1}^{n-1}\gamma(h)\,(n-|h|) = \frac{1}{n}\sum_{h=-n+1}^{n-1}\gamma(h)\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\gamma(0)+2\sum_{h=1}^{n-1}\gamma(h)\left(1-\frac{h}{n}\right)\right) && \text{(III.1.1)}\\
&= \frac{\gamma(0)}{n}\left(1+2\sum_{h=1}^{n-1}\rho(h)\left(1-\frac{h}{n}\right)\right). && \text{(III.1.2)}
\end{aligned}
$$

Ako je $\{Y_t\}\sim IID(0,\sigma^2)$, onda znamo da je

$$
\mathrm{Var}\,\overline{X}_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\,Y_i = \frac{\gamma(0)}{n},
$$

tako da na dodatni faktor

$$
\left(1+2\sum_{h=1}^{n-1}\rho(h)\left(1-\frac{h}{n}\right)\right)
$$

u (III.1.2) možemo gledati kao na korekciju varijance koja postoji zbog zavisnosti.

Propozicija III.1.1 Ako je $\{X_t\}$ stacionaran proces s očekivanjem μ te ako ACVF $\gamma(h)\to 0$ kad $h\to\infty$, onda

$$
\mathrm{Var}\,\overline{X}_n = \mathrm{E}\left(\overline{X}_n-\mu\right)^2 \to 0, \quad \text{kad } n\to\infty.
$$

Posebno, $\overline{X}_n$ je (slabo) konzistentan, odnosno $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Dokaz. Iz izraza (III.1.1) slijedi

$$
\mathrm{Var}\,\overline{X}_n = \frac{1}{n}\left(\gamma(0)+2\sum_{h=1}^{n-1}\gamma(h)\left(1-\frac{h}{n}\right)\right) \le \frac{\gamma(0)}{n}+\frac{2}{n}\sum_{h=1}^{n-1}|\gamma(h)|.
$$

Pokažimo da i drugi član ide u 0 kad $n\to\infty$. Neka je $\varepsilon>0$. Zbog $\gamma(h)\to 0$ postoji n_0 takav da je $|\gamma(h)|<\varepsilon/2$ za $h\ge n_0$. Uzmemo li $n>\max\{n_0, 2n_0\gamma(0)/\varepsilon\}$, onda

$$
\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n-1}|\gamma(h)| = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n_0-1}|\gamma(h)|+\frac{1}{n}\sum_{h=n_0+1}^{n-1}|\gamma(h)| \le \gamma(0)\frac{n_0-1}{n}+\frac{1}{n}(n-1-n_0)\frac{\varepsilon}{2} \le \frac{n_0}{n}\gamma(0)+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
$$

■

Prethodna propozicija govori da je dovoljan uvjet za konzistentnost da $\gamma(h) \to 0$ kad $h \to \infty$. Ta pretpostavka je zadovoljena za sve linearne procese (vidi Zadatak II.1.3). Kao primjer kad procesa za koji ta pretpostavka nije zadovoljena, možemo uzeti $X_t = X$ za sve t i za neku slučajnu varijablu X, $\mathrm{E}X^2 < \infty$. Ovu propoziciju možemo promatrati i kao slabi zakon velikih brojeva za stacionarne procese kad može postojati zavisnost. Dokaz je jednostavan jer su i pretpostavke jake, prvenstveno $\mathrm{E}X_t^2 < \infty$ zbog stacionarnosti.

■ **Primjer III.1.1** Neka je $X_t = \mu + Y_t$, gdje je $\{Y_t\} \sim MA(1)$ proces $Y_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$. Izračunali smo da je ACVF od $\{Y_t\}$, a onda i od $\{X_t\}$ (Primjer II.2.1) jednaka

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2), & h = 0, \\ \sigma^2\theta, & |h| = 1, \\ 0, & |h| > 1. \end{cases}$$

Iz toga slijedi da je

$$\mathrm{Var}\,\overline{X}_n = \frac{1}{n}\left(\gamma(0) + 2\gamma(1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\gamma(0)}{n}\left(1 + 2\frac{\theta}{1+\theta^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Predznak korekcije u odnosu na n.j.d. slučaj

$$2\frac{\theta}{1+\theta^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

ovisi o predznaku θ. Tako pozitivna korelacija ($\theta > 0$) povećava varijancu prosjeka u odnosu na n.j.d., ali negativna korelacija ($\theta < 0$) smanjuje varijancu prosjeka u odnosu na n.j.d. Dakle, zavisnost ne mora nužno implicirati da procjenitelji imaju lošija svojstva.

R **Praktikum.** Procjena konstantnog očekivanja – primjer s $MA(1)$ procesom.

■ **Primjer III.1.2** Neka je $X_t = \mu + Y_t$ gdje je $\{Y_t\}$ slučajna šetnja

$$Y_t = \sum_{i=1}^{t} Z_i, \quad Y_0 = 0,$$

$\{Z_i\} \sim IID(0,\sigma^2)$. Radi se o nestacionarnom procesu, ali očekivanje je konstantno $\mathrm{E}X_t = \mu$ za sve t. Možemo se pitati kakva bi bila kvaliteta procjene očekivanja μ aritmetičkom sredinom koja je i u ovom primjeru nepristran procjenitelj. Međutim, izračunamo li varijancu:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,\overline{X}_n &= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu + Y_i)\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \mathrm{Var}\,\overline{Y}_n = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1} Z_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(Z_1 + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} iZ_{n-i+1}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{\sigma^2(n+1)(2n+1)}{6n}, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili formulu za zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva. Zaključujemo da $\mathrm{Var}\,\overline{X}_n \to \infty$ kad $n \to \infty$, što je potpuno suprotno situaciji u Propoziciji III.1.1. Proces je nestacionaran i aritmetička sredina nije konzistentna, naprotiv, varijanca procjenitelja raste povećanjem uzorka.

Konstantno očekivanje različito od 0 možemo uključiti u ARMA procese na sljedeći način.

Definicija III.1.1 Za proces $\{X_t\}$ kažemo da je $ARMA(p,q)$ **s očekivanjem** μ ako je $\{X_t - \mu\}$ $ARMA(p,q)$ proces.

Možemo pisati

$$\phi(B)(X_t - \mu) = \theta(B)Z_t$$

što daje

$$\phi(B)X_t = \phi(B)\mu + \theta(B)Z_t,$$

odnosno

$$X_t = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)\mu + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q},$$

jer je $B\mu = \mu$ za svaku konstantu μ. Izraz

$$\alpha = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)\mu$$

obično se naziva **intercept** ili **slobodni član**. Ako je $p = 0$, onda je $\alpha = \mu$ očekivanje.
Za $ARIMA(p,d,q)$ proces takav da je $\{\Delta^d X_t - \mu\}$ $ARMA(p,q)$ proces pišemo

$$\phi(B)\left((1-B)^d X_t - \mu\right) = \theta(B)Z_t,$$

odnosno

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)\mu + \theta(B)Z_t.$$

Uočimo da u ovom slučaju μ nije očekivanje od X_t nego je $\mathrm{E}\Delta^d X_t = \mu$. Za $d = 1$ primjerice, to možemo usporediti s procesom $X_t = \beta_0 + \mu t + Z_t$ za koji je $\mathrm{E}\Delta X_t = \mu$.

III.1.1 Zadaci

Zadatak III.1.1 Zadan je proces $\{X_t\}$

$$X_t = 4 + 1.2X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + Z_t - 1.5Z_{t-1} + 0.5Z_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$. Odredite o kojem ARMA odnosno ARIMA procesu se radi. Je li taj proces odnosno njegov ARMA dio kauzalan i invertibilan? ■

Zadatak III.1.2 Neka je X_t razina vode u nekom spremniku u mjesecu t. Svaki mjesec 20% vode iz prethodnog mjeseca se potroši. Očekivana količina vode koja će u spremnik ući kišom tijekom svakog mjeseca je 100 uz grešku (šum) koja ima varijancu 10 i nezavisna je iz mjeseca u mjesec.

(a) Definirajte proces kojim možemo modelirati razinu vode u spremniku po mjesecima. Je li taj proces stacionaran? Kako izgleda njegova funkcija autokorelacija? Odredite očekivanje tog procesa.

(b) Pretpostavimo sada da razinu vode ne opažamo direktno već uz nekakav šum $\{W_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$ nezavisan od šuma koji dolazi od punjenja spremnika kišom. Tako je model zapravo

$$Y_t = X_t + W_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Odredite funkciju autokovarijanci procesa

$$V_t = Y_t - 0.8Y_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Zaključite kakav je proces $\{V_t\}$. Koristeći odgovor pod (a) zaključite kakav je proces $\{Y_t\}$.

■

III.2. Identifikacija modela

Pod identifikacijom modela u okviru ARMA mdeliranja smatramo određivanje reda modela. Neka je $x_1, \dots, x_n$ vremenski niz koji želimo modelirati nekim ARMA procesom. Prvi korak je odrediti red (p,q) ARMA modela. Ako smo do niza došli diferenciranjem, onda je model za polazni niz $ARIMA(p,d,q)$ za d broj diferenciranja (najčešće $d = 1$). U ovom koraku biramo nekoliko kandidata za model, a tek u koraku dijagnostike odlučujemo se za konačni model.

Postoji nekoliko načina kako možemo odabrati odgovarajući red (p,q):

(1) Na osnovu izgleda procijenjene ACRF. Za $MA(q)$ procese ACRF iščezava nakon q koraka, dok za AR procese opada u nulu. Ovim kriterijem teško je eksplicitno utvrditi red.

(2) Na osnovu **Akaike informacijskog kriterija** (**AIC**) definiranog s

$$AIC(p,q) = -2\log L(\widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\sigma^2}) + 2(p+q+1),$$

gdje je $L(\widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\sigma^2})$ maksimalna vjerodostojnost $ARMA(p,q)$ modela za dane podatke u kojem je $\{Z_t\}$ Gaussovski bijeli šum ($\widehat{\boldsymbol{\phi}}$ i $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ označavaju procjene vektora AR i MA parametara i $\widehat{\sigma^2}$ procjena varijance od $\{Z_t\}$). Uočimo da je drugi član dvostruki broj parametara modela. Prema AIC kriteriju biramo model (ili nekoliko njih) koji ima najmanju AIC vrijednost. Model koji bolje opisuje podatke imat će veću maksimalnu vjerodostojnost pa će AIC biti manji. Dodatni član u definiciji AIC vrijednosti penalizira modele velikog reda.
Često se koristi i sljedeća verzija s korekcijom za male uzorke

$$AICc(p,q) = -2\log L(\widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\sigma^2}) + 2\frac{(p+q+1)n}{n-p-q-2}.$$

(3) Na osnovu **Bayesovog informacijskog kriterija** (**BIC** ili Schwarz Bayesov kriterij – SBC) definiranog s

$$BIC(p,q) = -2\log L(\widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \widehat{\sigma^2}) + (p+q+1)\log n,$$

gdje su oznake kao kod AIC. BIC nešto jače penalizira modele velikih redova. Bolji modeli imaju manju BIC vrijednost.

Za oba kriterija postoji nekoliko varijanti. Osim toga, postoje i druge metode procjene reda modela pomoću: finalne prognostičke greške (FP), Hannan-Quin kriterij (HQC), proširena ACRF (EACF), parcijalni autokorelacijski koeficijent (PACF).

Princip kojim se uvijek treba voditi kod odabira modela jest da je jednostavniji model uvijek bolji (Ockhamova britva ili „Everything should be made as simple as possible, but not simpler" – Albert Einstein.)

III.3. Procjena parametara

Kada su odabrani p i q preostaje procijeniti parametre modela $\phi_1, \ldots, \phi_p$, $\theta_1, \ldots, \theta_q$, σ^2 te eventualno μ. Postoje različite metode, kroz primjere ćemo ilustrirati neke od njih bez podrobnije analize.

III.3.1 Metoda najmanjih kvadrata

Neka je $\{X_t\}$ $AR(1)$ proces s očekivanjem μ

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

Treba procijeniti parametre ϕ i μ. Vođeni idejom regresije, tražimo $\widehat{\phi}$ i $\widehat{\mu}$ koji minimiziraju

$$S_c(\phi, \mu) = \sum_{i=2}^{n} (X_i - \mu - \phi(X_{i-1} - \mu))^2.$$

Deriviramo, izjednačimo s 0 i dobijemo

$$\widehat{\phi} = \frac{\sum_{i=2}^{n}(X_i - \overline{X}_n)(X_{i-1} - \overline{X}_n)}{\sum_{i=2}^{n}(X_{i-1} - \overline{X}_n)^2}$$

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{(n-1)(1-\phi)} \left(\sum_{i=2}^{n} X_i - \phi \sum_{i=2}^{n} X_{i-1} \right).$$

Uočimo da je $\widehat{\mu}$ približno $\overline{X}_n$ i $\widehat{\phi}$ približno $\widehat{\rho}(1)$. Slično se može napraviti i za $AR(p)$ modele.

Neka je sada $\{X_t\}$ $MA(1)$ proces oblika

$$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$$

($-\theta$ umjesto $+\theta$ će pojednostaviti neke formule). Ovdje ne možemo iskoristiti istu ideju, ali ako je $\{X_t\}$ invertibilan, onda

$$Z_t = \frac{1}{\theta(B)} X_t, \quad \theta(z) = 1 - \theta z,$$

pa je

$$\frac{1}{\theta(z)} = \frac{1}{1-\theta z} = 1 + \theta z + \theta^2 z^2 + \cdots$$

što daje

$$Z_t = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \cdots.$$

Sad kad smo izrazili šum, možemo parametre procijeniti tako da minimiziramo kvadrate šuma pa definiramo

$$S_c(\theta) = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i + \theta X_{i-1} + \theta^2 X_{i-2} + \cdots\right)^2,$$

ali ta je suma beskonačna i nelinearna u θ. Zato možemo iskoristiti sljedeći pristup. S ozbirom da znamo vrijednosti $X_1, \dots, X_n$, onda $Z_1, \dots, Z_n$ možemo rekurzivno odrediti iz

$$Z_t = X_t + \theta Z_{t-1}$$

tako da stavimo $Z_0 = 0$. Tako uvjetno na $Z_0 = 0$ imamo

$$\begin{aligned}
Z_1 &= X_1, \\
Z_2 &= X_2 + \theta Z_1 = X_2 + \theta X_1, \\
&\vdots \\
Z_n &= X_n + \theta Z_{n-1} = X_n + \theta X_{n-1} + \cdots + \theta^{n-1} X_1.
\end{aligned}$$

Sada $\widehat{\theta}$ možemo odrediti minimizacijom $\widetilde{S}_c(\theta) = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ uvjetno $Z_0 = 0$. Zato se metoda naziva **uvjetna metoda najmanjih kvadrata** (c u S_c dolazi od eng. conditional). Slično se može napraviti i za $MA(q)$ procese.

Ako je $\{X_t\}$ $ARMA(1,1)$ proces

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1},$$

onda zbog

$$Z_t = X_t - \phi X_{t-1} - \theta Z_{t-1}$$

moramo dodatno promotriti i uvjetno na $X_0 = 0$. Bolji pristup je onda definirati $S_c(\phi, \theta) = \sum_{i=2}^n Z_i^2$ uvjetno na $Z_0 = 0$. Ideja se lako generalizira na $ARMA(p,q)$ modele.

Metoda najmanjih kvadrata puno se rjeđe koristi od metode maksimalne vjerodostojnosti, uglavnom samo kao početna aproksimacija za tu metodu.

III.3.2 Metoda maksimalne vjerodostojnosti

Vidjeli smo da se prethodna metoda uglavnom oslanja na momente i može se pokazati da je asimptotski bliska procjeni metodom momenata. Za razliku od toga, **metoda maksimalne vjerodostojnosti** (eng. maximum likelihood – ML) koristi sve informacije o distribuciji, ali i zahtijeva dodatne pretpostavke.

Za slučajan uzorak $(X_1, \dots, X_n)$ funkcija vjerodostojnosti je funkcija $\boldsymbol{\theta} \mapsto L(\boldsymbol{\theta}; x_1, \dots, x_n)$ takva da je $\boldsymbol{y} \mapsto L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y})$ funkcija gustoće slučajnog vektora $(X_1, \dots, X_n)$, a $\boldsymbol{\theta}$ je nepoznati parametar.

Sjetimo se da je opći princip ML metode odrediti parametar $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ takav da je uz tu vrijednost uzorak $x_1,\dots,x_n$ *najvjerojatniji*, odnosno

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} L(\boldsymbol{\theta};x_1,\dots,x_n).$$

Za ML metodu treba znati distribuciju od $(X_1,\dots,X_n)$, a to je nemoguće bez dodatnih pretpostavki na šum. Uobičajeno pretpostavljamo da je šum $\{Z_t\}\sim WN(0,\sigma^2)$ Gaussovski, što onda povlači da je $\{Z_t\}\sim IID(0,\sigma^2)$ (vidi Zadatak I.1.6). Tada je i $\{X_t\}$ Gaussovski proces.

Neka je $\{X_t\}$ $AR(1)$ proces s očekivanjem μ uz $\{Z_t\}\sim IID(0,\sigma^2)$ Gaussovski:

$$X_t-\mu = \phi(X_{t-1}-\mu)+Z_t.$$

Tražimo distribuciju od $(X_1,\dots,X_n)$. Ako zapišemo

$$\begin{aligned}
X_1-\mu &= \phi(X_0-\mu)+Z_1,\\
X_2-\mu &= \phi(X_1-\mu)+Z_2,\\
&\ \ \vdots\\
X_n-\mu &= \phi(X_{n-1}-\mu)+Z_n,
\end{aligned}$$

onda vidimo da na za prvu jednadžbu nedostaje X_0. Zato ćemo promatrati distribuciju od $(X_1,\dots,X_n)$ uvjetno na $X_1=x_1$, odnosno gustoću $f_{X_2,\dots,X_n|X_1}(x_2,\dots,x_n\mid x_1)$.

Zadatak III.3.1 Pokažite da je

$$f_{X_2,\dots,X_n|X_1}(x_2,\dots,x_n\mid x_1) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(x_i-\mu-\phi(x_{i-1}-\mu))^2\right\}.$$

[Uputa: radi se o transformaciji slučajnog vektora $(Z_2,\dots,Z_n)\sim\mathcal{N}(\mathbf{0},\sigma^2 I)$.] ■

Do gustoće od $(X_1,\dots,X_n)$ možemo doći preko

$$f(x_1,\dots,x_n) = f_{X_2,\dots,X_n|X_1}(x_2,\dots,x_n\mid x_1)f_{X_1}(x_1).$$

Iz linearne reprezentacije

$$X_1-\mu = \sum_{j=0}^{\infty}\phi^j Z_{1-j},$$

slijedi da je $X_1\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}\phi^{2j})\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2/(1-\phi^2))$. Vjerodostojnost na osnovu $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ je

$$L(\phi,\mu,\sigma^2;\boldsymbol{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}(1-\phi^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}S(\phi,\mu)\right\},$$

gdje je

$$S(\phi,\mu)=\sum_{i=2}^{n}(x_i-\mu-\phi(x_{i-1}-\mu))^2+(1-\phi)^2(x_1-\mu)^2$$

bezuvjetna suma kvadrata. Parametre treba odrediti maksimizacijom $L(\phi,\mu,\sigma^2;\boldsymbol{x})$ po (ϕ,μ,σ^2), ili ekvivalentno maksimizacijom $\log L(\phi,\mu,\sigma^2;\boldsymbol{x})$. Za $ARMA(p,q)$ modele pojavljuju se dodatne komplikacije.

Procjenitelj ML metodom je asimptotski normalan i efikasan (to vrijedi i za uvjetnu metodu najmanjih kvadrata). Procjena ima smisla i ako $\{Z_t\}$ nije Gaussovski. Prvo zato što L možemo gledati kao na mjeru prilagodbe modela modela, a drugo zato što su procjenitelji asimptotski normalni i ako je samo $\{Z_t\}\sim IID(0,\sigma^2)$, ali ne moraju biti efikasni.

III.4. Dijagnostika modela

U ovom koraku treba kritički analizirati kandidate za model. Dijagnostika se temelji na analizi reziduala modela. Prvo ćemo vidjeti kako doći do reziduala. Reziduali trebaju što bolje odgovarati bijelom šumu koji generira proces.

■ **Primjer III.4.1** Neka je $\{X_t\}$ $AR(2)$ proces. Na osnovu procjena $\widehat{\phi}_1$ i $\widehat{\phi}_2$ reziduale možemo jednostavno dobiti kao

$$\widehat{Z}_t = X_t - \widehat{\phi}_1 X_{t-1} - \widehat{\phi}_2 X_{t-2}.$$

■ **Primjer III.4.2** Ako je $\{X_t\}$ $MA(1)$ proces $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, $\{Z_t\}$ nije jednostavno izraziti. Ako je invertibilan, onda imamo

$$Z_t = X_t - \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \cdots.$$

Međutim, radi se o beskonačnoj sumi koju ne možemo izračunati jer nemamo beskonačno mnogo podataka o procesu. Kasnije ćemo vidjeti kako izračunati reziduale, u ovom primjeru ali i općenito u slučaju ARMA procesa.

Način računanja reziduala $\widehat{w}_i$, $i = 1,\ldots,n$ u općenitom slučaju napravit ćemo u kasnijim poglavljima. Neka su $\widehat{w}_i$ realizacije slučajnih varijabli W_i, $i = 1,\ldots,n$. Može se pokazati da W_i aproksimira Z_i u smislu da $\mathrm{E}(W_t - Z_t)^2 \to 0$ porastom veličine uzorka, ako podaci zaista dolaze iz konkretnog ARMA modela. Svojstva niza $\widehat{w}_i$, $i = 1,\ldots,n$, stoga trebaju odgovarati svojstvima bijelog šuma: mora izgledati kao realizacija nekoreliranih slučajnih varijabli s konstantnom varijancom. Poželjno svojstvo je i normalnost reziduala što osigurava da je procjena ML metodom efikasna, a statističko zaključivanje temelji se na egzaktnim, a ne asimptostkim testovima.

Nekoreliranost reziduala je nužan uvjet prihvaćanja nekog modela. Neka su $\widehat{w}_1,\ldots,\widehat{w}_n$ reziduali modela, realizacije niza $W_1,\ldots,W_n$ koji bi trebao biti bijeli šum. Neka je $r(h)$ ACRF niza $W_1,\ldots,W_n$ i $\widehat{r}(h)$ procjena na osnovu $\widehat{w}_1,\ldots,\widehat{w}_n$.

Nekoreliranost možemo izučavati promatranjem procijenjene ACRF $\widehat{r}$. Za podatke iz pravog n.j.d. šuma, $\widehat{r}(h)$ su asimptotski normalni s varijancom $1/n$ i $\widehat{r}(h_1)$ i $\widehat{r}(h_2)$ su nekorelirani za $h_1 \neq h_2$. Na rezidualima to ne vrijedi (slično kao što reziduali regresije nisu nezavisni – ne mogu biti kad im je suma uvijek 0). I dalje vrijedi asimptotska normalnost, ali varijanca može biti bitno manja i $\widehat{r}(h_1)$ i $\widehat{r}(h_2)$ mogu biti jako korelirani. Za velike korake ipak vrijedi nekoreliranost procijenjenih korelacija.

Zbog postojanja korelacija između $\widehat{r}(h_1)$ i $\widehat{r}(h_2)$ nije ih korektno promatrati svaku za sebe nego zajednički. Zato želimo testirati hipoteze

$$H_0 : r(1) = \cdots = r(K) = 0 \qquad \text{autokorelacije reziduala su sve jednake nula do koraka } K,$$
$$H_1 : r(i) \neq 0 \text{ za neki } i \in \{1, \ldots, K\}.$$

Test za ove hipoteze naziva se Ljung-Box test, a koristi test statistiku

$$Q_K = N(n+2) \sum_{i=1}^{K} \frac{\widehat{r}_i^2}{n-i}$$

koja u uvjetima kad vrijedi H_0 asimptotski ima χ^2_{K-p-q} distribuciju.

Među modelima za koje ne sumnjamo u pretpostavku nekoreliranosti reziduala treba odabrati najbolji pomoću informacijskih kriterija, kriterija složenosti i varijance bijelog šuma.

III.5. Predviđanje i prostor L^2

Prisjetimo se da smo na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ definirali prostor $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P) = L^2$ slučajnih varijabli takvih da je $\mathrm{E}X^2 < \infty$ (uz identifikaciju jednakih g.s.) koji je uz skalarni produkt $\langle X, Y \rangle = \mathrm{E}(XY)$ Hilbertov prostor.

Iz vjerojatnosti znamo da ako su $X, Z \in L^2$, onda je uvjetno očekivanje $\mathrm{E}(X \mid Z)$ **najbolji prediktor** za X na osnovu Z u srednjekvadratnom smislu, odnosno vrijedi

$$\inf_{Y \text{ je } \sigma(Z) \text{ izmjeriva}} \mathrm{E}(X-Y)^2 = E\left(X - \mathrm{E}(X \mid Z)\right)^2.$$

To vrijedi općenito i ako promatramo $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{F})$ uz neku σ-algebru $\mathscr{F}$. Ako je primjerice $\mathscr{F} = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$, onda pišemo $\mathrm{E}(X \mid Z_1, \ldots, Z_n)$.

Može se pokazati da za $X, Z_1, \ldots, Z_n \in L^2$, $\mathrm{E}(X \mid Z_1, \ldots, Z_n)$ odgovara projekciji $\Pi_{\mathscr{M}} X$ gdje je $\mathscr{M}$ potprostor od L^2 koji se sastoji od svih L^2 slučajnih varijabli oblika $f(Z_1, \ldots, Z_n)$ za f Borelovu funkciju. Odrediti ovu projekciju općenito nije jednostavno, stoga se puno češće koristi projekcija na linearni potprostor.

Definicija III.5.1 Neka je $X \in L^2$ i $Z_\lambda \in L^2$ za svaki $\lambda \in \Lambda$. **Najbolji linearni prediktor** od X na osnovu $\{Z_\lambda,\, \lambda \in \Lambda\}$ je $Y \in L^2$ koji minimizira

$$\min_{Y \in \overline{sp}\{Z_\lambda,\, \lambda \in \Lambda\}} \mathrm{E}(X-Y)^2,$$

gdje je $\overline{sp}\{Z_\lambda,\, \lambda \in \Lambda\}$ najmanji zatvoren potprostor razapet s $\{Z_\lambda,\, \lambda \in \Lambda\}$. Prema teoremu o projekciji (Teorem I.4.2) najbolji linearni prediktor je projekcija

$$\Pi_{\overline{sp}\{Z_\lambda,\, \lambda \in \Lambda\}} X.$$

Prema teoremu o projekciji znamo da je primjerice

$$\Pi_{\overline{sp}\{1, Z_1, \ldots, Z_n\}} X = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Z_i,$$

gdje je $Z_0 = 1$ a $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ su određeni s

$$
\begin{aligned}
& \langle X - \Pi_{\overline{sp}\{1, Z_1, \dots, Z_n\}} X, Z_j \rangle = 0 \quad \text{za } j = 0, 1, \dots, n, \\
\Leftrightarrow \quad & \left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Z_i, Z_j \right\rangle = \langle X, Z_j \rangle \quad \text{za } j = 0, 1, \dots, n, \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \, \mathrm{E}(Z_i Z_j) = \mathrm{E}(X Z_j) \quad \text{za } j = 0, 1, \dots, n. \qquad \text{(III.5.1)}
\end{aligned}
$$

Najbolji linearni prediktor nikad ne može imati manju srednjekvadratnu grešku od najboljeg prediktora (uvjetnog očekivanja), ali ima nekoliko prednosti:

(i) jednostavnije se računa: na osnovu (III.5.1) treba odrediti $\alpha_0, \dots, \alpha_n$,

(ii) (III.5.1) uključuje samo momente do drugog reda slučajnog vektora $(X, Z_1, \dots, Z_n)$, a to je nešto što možemo procijeniti,

(iii) ako $(X, Z_1, \dots, Z_n)$ ima normalnu distribuciju, onda je

$$\Pi_{\overline{sp}\{1, Z_1, \dots, Z_n\}} X = \mathrm{E}(X \mid Z_1, \dots, Z_n). \qquad \text{(III.5.2)}$$

Zadatak III.5.1 Dokažite (III.5.2) za $n = 1$.

[Uputa: za (X, Z) koji ima dvodimenzionalnu normalnu distribuciju izračunajte $\mathrm{E}(X \mid Z)$ i zaključite da je linearno u Z.] ■

Zadatak III.5.2 Neka je $X = Z^2 + Y$ gdje su Z i Y nezavisne sa standardnom normalnom distribucijom. Odredite najbolju predikciju za X na osnovu Z i najbolju linearnu predikciju za X na osnovu Z te izračunajte srednjekvadratne greške. ■

Rješenje. Najbolja predikcija je uvjetno očekivanje:

$$\mathrm{E}(X \mid Z) = \mathrm{E}(Z^2 + Y \mid Z) = \mathrm{E}(Z^2 \mid Z) + \mathrm{E}(Y \mid Z) = Z^2 + \mathrm{E}Y = Z^2.$$

Najbolji linearni prediktor tražimo u obliku

$$\Pi_{\overline{sp}\{1, Z\}} X = \alpha_0 + \alpha_1 Z,$$

gdje su α_0 i α_1 određeni s

$$
\begin{aligned}
\langle X - \alpha_0 - \alpha_1 Z, 1 \rangle &= 0, \\
\langle X - \alpha_0 - \alpha_1 Z, Z \rangle &= 0,
\end{aligned}
$$

što daje

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{E}\,(X - \alpha_0 - \alpha_1 Z) = \mathrm{E}(Z^2 + Y) - \alpha_0 - \alpha_1 \, \mathrm{E}Z = 1 - \alpha_0, \\
0 &= \mathrm{E}\,((X - \alpha_0 - \alpha_1 Z) Z) = \mathrm{E}XZ - \alpha_0 \, \mathrm{E}Z - \alpha_1 \, \mathrm{E}Z^2 = \mathrm{E}\left(Z^3 + YZ\right) - \alpha_1 = -\alpha_1,
\end{aligned}
$$

jer je $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}Z = 0$, $\mathrm{E}Z^2 = 1$ i $\mathrm{E}Z^3 = 0$. Zaključujemo da je $\alpha_0 = 1$ i $\alpha_1 = 0$ pa je

$$\Pi_{\overline{sp}\{1, Z\}} X = 1.$$

Greške predikcije (koje su slučajne varijable) su

$$
\begin{aligned}
X - \mathrm{E}(X \mid Z) &= Z^2 + Y - Z^2 = Y, \\
X - \Pi_{\overline{sp}\{1, Z\}} X &= Z^2 + Y - 1,
\end{aligned}
$$

pa su srednjekvadratne greške (koje su brojevi) jednake

$$\mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}(X \mid Z))^2 = \mathrm{E}\,Y^2 = 1,$$
$$\mathrm{E}\left(X - \Pi_{\overline{sp}\{1,Z\}} X\right)^2 = \mathrm{E}\,Z^4 + 2\,\mathrm{E}(Z^2(Y-1)) + \mathrm{E}(Y-1)^2 = 3,$$

gdje smo koristili činjenicu $\mathrm{E}\,Z^4 = 3$. Uočimo razliku koja postoji u srednjekvadratnim greškama.

III.6. Predviđanje ARIMA procesa

S obzirom da najbolji prediktor općenito nije jednostavno izračunati, ograničit ćemo se na linearno predviđanje. Ako je proces Gaussovski to će biti i najbolji prediktor.

Neka je $\{X_t\}$ kauzalan i invertibilan $ARMA(p,q)$ proces

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2).$$

Najbolji linearni prediktor od X_{n+h}, $h \geq 1$ na osnovu $1, X_1, \ldots, X_n$ je projekcija

$$\Pi_n X_{n+h} = \Pi_{\overline{sp}\{1,X_1,\ldots,X_n\}} X_{n+h}.$$

Za predikciju možemo promatrati

- **grešku**: $X_{n+h} - \Pi_n X_{n+h}$ (slučajna varijabla),
- **srednjekvadratnu grešku**: $\mathrm{E}\left(X_{n+h} - \Pi_n X_{n+h}\right)^2$ (broj).

Za računanje predikcije korisno je znati sljedeća svojstva operatora projekcije:

(i) $\Pi_n X_i = X_i$ za $i = 1, \ldots, n$,

(ii) $\Pi_n Z = \mathrm{E}Z$ za slučajnu varijablu Z takvu da je $\mathrm{Cov}(Z, X_i) = 0$ za sve $i = 1, \ldots, n$,

(iii) Π_n je linearan.

Uočimo sličnost ovih svojstava sa svojstvima uvjetnog očekivanja $\mathrm{E}(\cdot \mid X_1, \ldots, X_n)$.

Primjerice, predikcija jedan korak unaprijed ($h = 1$) kauzalnog $AR(1)$ procesa

$$\Pi_n X_{n+1} = \Pi_n(\phi X_n + Z_{n+1}) \overset{(iii)}{=} \phi \Pi_n X_n + \Pi_n Z_{n+1} \overset{(i)}{=} \phi X_n + \Pi_n Z_{n+1} \overset{(ii)}{=} \phi X_n + \mathrm{E} Z_{n+1} = \phi X_n.$$

Problem se javlja s MA procesima jer ne znamo vrijednosti procesa beskonačno u prošlost (vidjeti Primjer III.4.2). Zato definiramo **najbolji linearni prediktor za X_{n+h}**, $h \geq 1$, **na osnovu beskonačno duge prošlosti**

$$\widetilde{\Pi}_n X_{n+h} = \Pi_{\overline{sp}\{1,X_n,X_{n-1},\ldots\}} X_{n+h}.$$

Može se pokazati da je

$$\widetilde{\Pi}_n X_{n+h} = \lim_{m \to -\infty} \Pi_{\overline{sp}\{1,X_n,X_{n-1},\ldots,X_m\}} X_{n+h},$$

gdje je limes u L^2 smislu. Za $\widetilde{\Pi}_n$ vrijede analogna svojstva

(i) $\widetilde{\Pi}_n U = U$ za $U = \sum_{j=-\infty}^{n} \xi_j X_j$,

(ii) $\widetilde{\Pi}_n Z = \mathrm{E} Z$ za slučajnu varijablu Z takvu da je $\mathrm{Cov}(Z, X_i) = 0$ za sve $i \leq n$,

(iii) $\widetilde{\Pi}_n$ je linearan (linearnost vrijedi i za beskonačne sume).

Uočimo opet da su svojstva slična svojstvima uvjetnog očekivanja $\mathrm{E}(\cdot \mid X_n, X_{n-1}, \dots)$.

Zbog kauzalnosti i invertibilnosti ARMA procesa $\{X_t\}$ postoje $\{\psi_j\}$, $\psi_0 = 1$ i $\{\pi_j\}$, $\pi_0 = 1$, tako da je

$$X_{n+h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{n+h-j}, \tag{III.6.1}$$

$$Z_{n+h} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{n+h-j}. \tag{III.6.2}$$

Primijenimo li $\widetilde{\Pi}_n$ na (III.6.1) slijedi

$$\widetilde{\Pi}_n X_{n+h} \overset{(iii)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \widetilde{\Pi}_n Z_{n+h-j} = \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j Z_{n+h-j}, \tag{III.6.3}$$

jer je

$$\widetilde{\Pi}_n Z_{n+h-j} = \begin{cases} \mathrm{E} Z_{n+h-j}, & n+h-j > n, \\ Z_{n+h-j}, & n+h-j \leq n, \end{cases} = \begin{cases} 0, & h > j, \\ Z_{n+h-j}, & h \leq j. \end{cases}$$

Primijenimo $\widetilde{\Pi}_n$ na (III.6.2)

$$0 = \widetilde{\Pi}_n Z_{n+h} = \widetilde{\Pi}_n X_{n+h} + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \widetilde{\Pi}_n X_{n+h-j}$$

što zbog svojstva (i) daje

$$\widetilde{\Pi}_n X_{n+h} = -\sum_{j=1}^{h-1} \pi_j \widetilde{\Pi}_n X_{n+h-j} - \sum_{j=h}^{\infty} \pi_j X_{n+h-j}. \tag{III.6.4}$$

Predikciju na osnovu beskonačno duge prošlosti računamo na osnovu (III.6.4) prvo za $h = 1$, pa dalje za $h = 2, 3, \dots$. Srednjekvadratna greška slijedi iz (III.6.3)

$$v_h = \mathrm{E}\left(X_{n+h} - \widetilde{\Pi}_n X_{n+h}\right)^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{h-1} \psi_j Z_{n+h-j},\right)^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2. \tag{III.6.5}$$

Ukoliko $\{X_t\}$ ima očekivanje μ, onda (III.6.3) ima oblik

$$\widetilde{\Pi}_n X_{n+h} = \mu + \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j Z_{n+h-j}.$$

Stoga, $\widetilde{\Pi}_n X_{n+h} \xrightarrow{L^2} \mu$ kad $h \to \infty$, odnosno dugoročna predikcija konvergira očekivanju. Kada $h \to \infty$, onda srednjekvadratna greška konvergira u

$$\sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \gamma(0),$$

odnosno u varijancu procesa. Posebno, greška je konstantna u budućnosti. Vidjet ćemo da kod nestacionarnih procesa to ne mora vrijediti.

Problem s izrazom (III.6.4) je što uključuje $X_0, X_{-1}, \dots$ za $j > n+h-1$. Ovaj problem se rješava tako da se promatra **odrezana predikcija** $\Pi'_n X_{n+h}$ tako da u (III.6.4) stavimo $\sum_{j=n+h}^{\infty} \pi_j X_{n+h-j} = 0$, odnosno

$$\Pi'_n X_{n+h} = -\sum_{j=1}^{h-1} \pi_j \Pi'_n X_{n+h-j} - \sum_{j=h}^{n+h-1} \pi_j X_{n+h-j}, \tag{III.6.6}$$

što računamo rekurzivno. Srednjekvadratnu grešku aproksimiramo s (III.6.5). Primjerice, za $h = 1$, odrezana predikcija jedan korak unaprijed je

$$\Pi'_n X_{n+1} = 0 - \sum_{j=1}^{n} \pi_j X_{n+1-j}, \tag{III.6.7}$$

dok je greška

$$X_{n+1} - \Pi'_n X_{n+h} = \sum_{j=0}^{n} \pi_j X_{n+1-j}. \tag{III.6.8}$$

■ **Primjer III.6.1 — Predikcija $AR(p)$ procesa.** Neka je $\{X_t\}$ kauzalan $AR(p)$ proces. $AR(\infty)$ reprezentacija bijelog šuma je onda

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j},$$

uz $\pi_0 = 1$, $\pi_j = -\phi_j$, $j = 1, \dots, p$ i $\pi_j = 0$ za $j \geq p$. Prirodno je pretpostaviti da je $n > p$. Onda je

- predikcija na osnovu konačne prošlosti $1, X_1, \dots, X_n$

$$\Pi_n X_{n+h} = \phi_1 \Pi_n X_{n+h-1} + \cdots + \phi_p \Pi_n X_{n+h-p} + \Pi_n Z_{n+h} = \sum_{j=1}^{h-1} \phi_j \Pi_n X_{n+h-j} + \sum_{j=h}^{p} \phi_j X_{n+h-j},$$

  (za $h > p$ ostaje samo prva suma).
- predikcija na osnovu beskonačne prošlosti $1, X_n, X_{n-1}, \dots$

$$\widetilde{\Pi}_n X_{n+h} \overset{\text{(III.6.4)}}{=} -\sum_{j=1}^{h-1} \pi_j \widetilde{\Pi}_n X_{n+h-j} - \sum_{j=h}^{p} \pi_j X_{n+h-j} = \sum_{j=1}^{h-1} \phi_j \widetilde{\Pi}_n X_{n+h-j} + \sum_{j=h}^{p} \phi_j X_{n+h-j}.$$

- odrezana predikcija

$$\Pi' X_{n+h} \overset{\text{(III.6.6)}}{=} -\sum_{j=1}^{h-1} \phi_j \Pi'_n X_{n+h-j} - \sum_{j=h}^{p} \phi_j X_{n+h-j}.$$

Dakle, odrezana predikcija je jednaka predikciji na osnovu beskonačne prošlosti i predikciji na osnovu konačne prošlosti – nema aproksimacije.

■ **Primjer III.6.2** Neka je $\{X_t\}$ invertibilan $MA(1)$ proces

$$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

Onda je

$$Z_t = \frac{1}{1-\theta B} X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j B^j X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j X_{t-j},$$

pa je $\pi_j = \theta^j$, $j \geq 0$ u $AR(\infty)$ reprezentaciji (III.6.2). Promatrat ćemo predikcije jedan korak unaprijed ($h = 1$).

- predikcija na osnovu konačne prošlosti $1, X_1, \dots, X_n$

$$\Pi_n X_{n+1} = \Pi_n Z_{n+1} - \theta \Pi_n Z_n = \mathrm{E} Z_{n+1} - \theta \Pi_n Z_n = -\theta \Pi_n Z_n$$

  što ne znamo što je. Naime, Z_n je predvidiv na osnovu beskonačne prošlosti $1, X_n, X_{n-1}, \dots$, ali ne nužno i na osnovu $1, X_1, \dots, X_n$. Ipak, za velike n očekujemo da je $\Pi_n Z_n$ približno Z_n. Ovaj problem je razlog zašto smo uvodili predikcije na osnovu beskonačne prošlosti i odrezane predikcije.
- predikcija na osnovu beskonačne prošlosti $1, X_n, X_{n-1}, \dots$

$$\widetilde{\Pi}_n X_{n+1} = \widetilde{\Pi}_n Z_{n+1} - \theta \widetilde{\Pi}_n Z_n = \mathrm{E} Z_{n+1} - \theta \widetilde{\Pi}_n Z_n = -\theta Z_n.$$

  S predikcijom na osnovu beskonačne prošlosti znamo što smo dobili, ali nejasno je kako izračunati Z_n. Radi se o šumu, ali šum ne možemo opaziti iz podataka.
- odrezana predikcija

$$\Pi'_n X_{n+1} \overset{(\text{III.6.7})}{=} -\sum_{j=1}^{n} \pi_j X_{n+1-j} = -\theta X_n - \theta^2 X_{n-1} - \dots - \theta^n X_1.$$

  To je aproksimacija predikcije na osnovu beskonačne prošlosti, no ovo možemo izračunati iz podataka jer raspolažemo podacima vremenskog niza.

Ako pogledamo odrezanu predikciju dva koraka unaprijed, onda dobijemo

$$\begin{aligned}\Pi'_n X_{n+2} &\overset{(\text{III.6.6})}{=} -\sum_{j=1}^{2-1} \pi_j \Pi'_n X_{n+2-j} - \sum_{j=2}^{n+2-1} \pi_j X_{n+2-j} = -\theta \Pi'_n X_{n+1} - \sum_{j=2}^{n+1} \theta^j X_{n+2-j} \\ &= \theta^2 X_n + \theta^3 X_{n-1} + \dots + \theta^{n+1} X_1 - \left(\theta^2 X_n + \theta^3 X_{n-1} + \dots + \theta^{n+1} X_1\right) = 0.\end{aligned}$$

Općenito, predikcija je jednaka očekivanju (ovdje $\mu = 0$) već nakon jednog koraka unaprijed.

Uočimo da je u prethodnom primjeru

$$X_n - \Pi'_{n-1} X_n = X_n + \theta X_{n-1} - \dots - \theta^{n-1} X_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \theta^j X_{n-j},$$

što je jedna aproksimacija za

$$Z_n = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j X_{n-j}.$$

Općenito,

$$X_t - \Pi'_{t-1} X_t \overset{(\text{III.6.8})}{=} \sum_{j=0}^{t-1} \pi_j X_{t-j},$$

je jedna aproksimacija za Z_t. Odrezane predikcije možemo rekurzivno izračunati i tako dobiti aproksimaciju za Z_t, a to je onda aproksimacija reziduala procjene parametara. Dakle, grešku odrezane predikcije jedan korak unaprijed zvat ćemo **rezidual** i označiti s

$$W_t = X_t - \Pi'_{t-1} X_t, \quad \text{za } t = 1, \dots, n.$$

Ako je $\{X_t\}$ invertibilan ARMA proces , onda je za $1 \leq t \leq n$

$$\widetilde{\Pi}_n Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = \sum_{j=0}^{t-1} \pi_j X_{t-j} + \sum_{j=t}^{\infty} \pi_j X_{t-j}.$$

Odrežemo li predikciju tako da stavimo $\sum_{j=t}^{\infty} \pi_j X_{t-j} = 0$, slijedi

$$\Pi_n' Z_t = \sum_{j=0}^{t-1} \pi_j X_{t-j} = W_t.$$

Za $t > n$ i $t \leq 0$ stavimo $W_t = 0$. Time dolazimo do jednostavne formule za predikciju $ARMA(p,q)$ procesa:

$$\begin{aligned}\Pi_n' X_{n+h} &= \phi_1 \Pi_n' X_{n+h-1} + \cdots + \phi_p \Pi_n' X_{n+h-p} + \Pi_n' Z_{n+h} + \theta_1 \Pi_n' Z_{n+h-1} + \cdots + \theta_q \Pi_n' Z_{n+h-q} \\ &= \sum_{j=1}^{h-1} \phi_j \Pi_n' X_{n+h-j} + \sum_{j=h}^{p} \phi_j X_{n+h-j} + W_{n+h} + \theta_1 W_{n+h-1} + \cdots + \theta_q W_{n+h-q},\end{aligned}$$

gdje su W_t reziduali

$$W_t = \begin{cases} \Pi_n' Z_t, & \text{za } t = 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Reziduale možemo dobiti kao nusproizvod procjene parametara pa ih onda iskoristiti za predikcije.

Zadatak III.6.1 Odredite odrezanu predikciju h koraka unaprijed kauzalnog i invertibilnog $ARMA(1,1)$ procesa te aproksimaciju srednjekvadratne greške. ■

Rješenje. Imamo da je

$$X_{n+h} = \phi_1 X_{n+h-1} + Z_{n+h} + \theta_1 Z_{n+h-1},$$

pa je

$$\Pi_n' X_{n+h} = \phi_1 \Pi_n' X_{n+h-1} + \Pi_n' Z_{n+h} + \theta_1 \Pi_n' Z_{n+h-1} = \phi_1 \Pi_n' X_{n+h-1} + W_{n+h} + \theta_1 W_{n+h-1}.$$

Za $h = 1$ slijedi

$$\Pi_n' X_{n+1} = \phi_1 X_n + 0 + \theta_1 W_n,$$

za $h = 2$

$$\Pi_n' X_{n+2} = \phi_1 \Pi_n' X_{n+1} + W_{n+2} + \theta_1 W_{n+1} = \phi_1^2 X_n + \phi_1 \theta_1 W_n,$$

i općenito

$$\Pi_n' X_{n+h} = \phi_1^h X_n + \phi_1^{h-1} \theta_1 W_n.$$

Uočimo da predikcija konvergira u nulu s porastom h. Za aproksimaciju srednjekvadratne greške koristimo (III.6.5)

$$v_h = \mathrm{E}\left(X_{n+h} - \Pi_n' X_{n+h}\right)^2 \approx \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2.$$

U Zadatku II.4.4 pokazali smo da su koeficijenti ψ_j u linearnoj reprezentaciji

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}.$$

dani s $\psi_j = (\phi_1 + \theta_1)\phi_1^{j-1}$, $j \geq 1$ iz čega slijedi

$$v_h = \sigma^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{h-1} (\phi_1 + \theta_1) \phi_1^{j-1} \right) = \sigma^2 \left(1 + \frac{(\phi_1 + \theta_1)^2 (1 - \phi_1^{2(h-1)})}{1 - \phi_1^2} \right).$$

Preciznost predikcije ilustrira se pouzdanim intervalom. Ako je v_h aproksimacija varijance po (III.6.5), onda pouzdani interval pouzdanosti $1-\alpha$ računamo u obliku

$$\left[\Pi_n' X_{n+h} - q_{\alpha/2}\sqrt{v_h}, \Pi_n' X_{n+h} + q_{\alpha/2}\sqrt{v_h}\right],$$

gdje je $q_{\alpha/2}$ $(1-\alpha/2)$-kvantil distribucije procesa (predikcije). Ako je $\{Z_t\}$ Gaussovski, onda je i $\{X_t\}$ i za $\alpha = 0.05$ je $q_{\alpha/2} \approx 1.96$.

R **Praktikum.** Predviđanje.

III.6.1 Predviđanje ARIMA procesa

Neka je $\{X_t\}$ $ARIMA(p,d,q)$ proces i označimo s $\{Y_t\} = \{\Delta^d X_t\}$ odgovarajući $ARMA(p,q)$ proces. Predikciju za $\{X_t\}$ možemo dobiti na osnovu predikcije za $\{Y_t\}$. Primjerice, ako je $d = 1$, onda odrezanu predikciju možemo dobiti kao

$$\Pi_n' X_{n+h} = \Pi_n' X_{n+h-1} + \Pi_n' Y_{n+h},$$

što računamo rekurzivno i računamo $\Pi_n' Y_{n+h}$ kao što smo pokazali. Varijancu greške predikcije je nešto teže izračunati, ali može se aproksimirati kao u (III.6.5)

$$v_h = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^{*2}, \tag{III.6.9}$$

gdje je ψ_j^* koeficijent uz z^j u razvoju

$$\psi^*(z) = \frac{\theta(z)}{\phi(z)(1-z)^d}.$$

■ **Primjer III.6.3** Neka je

$$X_t = X_{t-1} + \mu + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2).$$

Radi se o $ARIMA(0,1,0)$ procesu s konstantnim članom (ako je šum n.j.d. to je slučajna šetnja s driftom). Odrezana predikcija je

$$\Pi_n' X_{n+h} = \Pi_n' X_{n+h-1} + \mu + 0 = \Pi_n' X_{n+h-2} + 2\mu = \cdots = X_n + h\mu,$$

dok je greška predikcije

$$X_{n+h} - \Pi_n' X_{n+h} = X_{n+h-1} + \mu + Z_{n+h} - X_n - h\mu = X_{n+h-2} + 2\mu + Z_{n+h-1} + Z_{n+h} - X_n - h\mu = Z_{n+1} + \cdots Z_{n+h}.$$

Srednjekvadratnu grešku predikcije možemo egzaktno izračunati

$$\mathrm{E}\left(X_{n+h} - \Pi_n' X_{n+h}\right)^2 = h\sigma^2.$$

Aproksimacija u (III.6.9) je egzaktna u ovom slučaju jer je

$$\psi^*(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j, \quad \text{za } |z| < 1,$$

pa je $\psi_j^* = 1$ za $j \geq 0$, stoga $v_h = h\sigma^2$.

III.6.2 Zadaci

Zadatak III.6.2 Neka je $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ MA(2) proces s očekivanjem μ

$$X_t = \mu + Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

(a) Za $h \geq 1$ odredite odrezanu predikciju za X_{n+h} na osnovu $X_1, \ldots, X_n$ te izračunajte aproksimaciju srednjekvadratne greške predikcije.

(b) Na osnovu 1000 podataka vremenskog niza napravljena je procjena parametara za ovaj model te su dobivene vrijednosti $\hat{\mu} = 5$, $\hat{\sigma}^2 = 1$, $\hat{\theta}_1 = 0.5$, $\hat{\theta}_2 = 0.4$. Reziduali w_t iznose $w_{1000} = 0.1$ i $w_{999} = -0.1$. Izračunajte 95%-tni pouzdani interval predikcije za jedan korak unaprijed ako je šum Gaussovski.

■

Zadatak III.6.3 Dostupni su podaci vremenskog niza $-1.6,\ -0.86,\ 0.67,\ 0.43,\ 0.74$.

(a) Na osnovu podataka procijenjeni su parametri $AR(1)$ modela te je dobiven model

$$X_t = 0.59 X_{t-1} + Z_t,$$

i reziduali $-1.29, 0.08, 1.18, 0.04, 0.49$. Odredite odrezane predikcije za jedan i dva koraka unaprijed.

(b) Na osnovu istih podataka procijenjeni su i parametri $MA(1)$ modela te je dobiven model

$$X_t = Z_t + 1Z_{t-1},$$

i reziduali $-1.13, -0.05, 0.61, -0.09, 0.75$. Odredite odrezane predikcije za jedan i dva koraka unaprijed. Ako je varijanca bijelog šuma procijenjena na 0.558, izračunajte aproksimaciju srednjekvadratne greške predikcija za $h \geq 1$ koraka unaprijed. Odredite i odgovarajuće 95%-tne pouzdane intervale ako pretpostavimo da je šum Gaussovski.

■

Zadatak III.6.4 Izračunajte predikcije za jedan i dva koraka unaprijed $ARIMA(1,1,0)$ procesa te aproksimacije srednjekvadratne greške. ■

IV Sezonalni modeli i spektralna analiza

U ovom poglavlju najprije ćemo definirati *sezonalne modele* koji su korisni kada podaci vremenskog niza pokazuju jasnu sezonalnost (primjerice mjesečne temperature, mjesečna stopa nezaposlenosti). Ovakvi modeli jednostavno se uklapaju u opću teoriju ARMA donosno ARIMA procesa. Nekada ipak nije jasan period sezonalnosti koji se pojavljuje u podacima kao što je to primjerice period 12 za mjesečne podatke. U drugom dijelu ovog poglavlja bavit ćemo se spektralnom teorijom koja omogućava karakterizaciju stacionarnih procesa na osnovu perioda.

Pretpostavimo da tražimo model za podatke vremenskog niza koji pokazuju jasan sezonalni period s (primjerice $s = 12$). Sezonalna komponenta može se uključiti u model kao deterministički trend, primjerice

$$X_t = \mu_t + Y_t,$$

gdje je $\{Y_t\}$ stacionaran proces a trend može biti

$$\mu_t = \begin{cases} \beta_1, & t = 1, s+1, 2s+1, \ldots, \\ \vdots & \\ \beta_s, & t = s, 2s, 3s, \ldots, \end{cases}$$

ili kosinusni trend

$$\mu_t = \beta \cos(2\pi f t + \Phi).$$

Međutim, nije uvijek dobro pretpostaviti da se sezonalna komponenta precizno ponavlja iz ciklusa u ciklus. Sezonalni ARIMA modeli dozvoljavaju slučajnost u sezonalnom uzorku iz ciklusa u ciklus.

IV.1. Sezonalni ARMA procesi

Generalizacijom ARMA procesa dobivamo sljedeću definiciju.

Definicija IV.1.1 Za proces $\{X_t\}$ kažemo da je **sezonalni ARMA proces reda** $(p,q) \times (P,Q)_s$ za $p,q,P,Q \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$ ako je stacionaran i

$$\phi(B)\Phi(B^s)X_t = \theta(B)\Theta(B^s)Z_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$, s je **period** i

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p, \\
\Phi(z) &= 1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_P z^P, \\
\theta(z) &= 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q, \\
\Theta(z) &= 1 + \vartheta_1 z + \cdots + \vartheta_Q z^Q.
\end{aligned}$$

Pišemo $\{X_t\} \sim SARMA(p,q) \times (P,Q)_s$.

Uočimo da se zapravo radi o ARMA procesima ali kod kojih je veći broj parametara jednak nuli. Uvjeti za egzistenciju stacionarnog rješenja su analogni kao kod ARMA procesa s tim da je karakteristični polinom čije nultočke promatramo sada $\phi(z)\Phi(z^s)$. Sjetimo se i da linearni filteri komutiraju pa poredak polinoma u jednadžbi ništa ne mijenja.

■ **Primjer IV.1.1** Neka je $X_t = \Theta(B^s)Z_t$, $\Theta(z) = 1 + \vartheta_1 z$, odnosno

$$X_t = Z_t + \vartheta_1 Z_{t-s}.$$

Radi se o sezonalnom $MA(1)$ procesu što često označavamo kao $SMA(1)_s = SARMA(0,0) \times (0,1)_s$. Uočimo da ga možemo promatrati i kao obični $MA(s)$ proces kod kojeg su svi koeficijenti osim posljednjeg jednaki nula. Lako izračunamo da je ACVF

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \mathrm{E}\,(Z_t+\vartheta_1 Z_{t-s})\,(Z_{t+h}+\vartheta_1 Z_{t+h-s})\\ &= \mathrm{E}\,Z_tZ_{t+h}+\vartheta_1\,\mathrm{E}\,Z_{t-s}Z_{t+h}+\vartheta_1\,\mathrm{E}\,Z_tZ_{t+h-s}+\vartheta_1^2\,\mathrm{E}\,Z_{t-s}Z_{t+h-s}\\ &= \begin{cases}\sigma^2, & h=0,\\ 0, & h\neq 0,\end{cases}+\begin{cases}\vartheta_1\sigma^2, & h=-s,\\ 0, & h\neq -s,\end{cases}+\begin{cases}\vartheta_1\sigma^2, & h=s,\\ 0, & h\neq s,\end{cases}+\begin{cases}\vartheta_1^2\sigma^2, & h=0,\\ 0, & h\neq 0,\end{cases}\\ &= \begin{cases}(1+\vartheta_1^2)\sigma^2, & h=0,\\ \vartheta_1\sigma^2, & |h|=s,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}\end{aligned}$$

Dakle, korelacija postoji samo na koraku 0 i s. Općenito, $SMA(Q)_s = SARMA(0,0)\times(0,Q)_s$ proces ima korelacije samo na koracima $0,s,2s,\dots,Qs$.

■ **Primjer IV.1.2** Neka je $\{X_t\}$ zadan s

$$\Phi(B^s)X_t = Z_t, \quad \{Z_t\}\sim WN(0,\sigma^2),$$

gdje je $\Phi(z)=1-\varphi_1 z$, $|\varphi_1|<1$, odnosno

$$X_t = \varphi_1 X_{t-s}+Z_t.$$

Proces je poznat i kao $SAR(1)_s = SARMA(0,0)\times(1,0)_s$ i možemo ga promatrati i kao $AR(s)$ proces kod kojeg su svi koeficijenti osim posljednjeg jednaki nula. ACVF možemo izračunati slično kao kod ARMA procesa. Množenjem s X_{t-h} i uzimanjem očekivanja slijedi za $h\geq 1$ zbog kauzalnosti (jer $|\varphi_1|<1$)

$$\gamma(h)=\mathrm{E}(X_tX_{t-h})=\varphi_1\,\mathrm{E}(X_{t-s}X_{t-h})+\mathrm{E}(X_{t-h}Z_t)=\varphi_1\gamma(h-s).$$

Iz toga dobijemo $\gamma(1)=\varphi_1\gamma(1-s)=\varphi_1\gamma(s-1)=\varphi_1^2\gamma(1)$ što povlači da je $\gamma(1)=0$ i $\gamma(s-1)=0$. Isto dobijemo za $\gamma(2)=0$ i $\gamma(s-2)=0$ i dalje. Množenjem s X_t i uzimanjem očekivanja slijedi

$$\mathrm{E}X_t^2=\varphi_1\gamma(s)+\mathrm{E}(X_tZ_t),$$

što zbog $\mathrm{E}(X_tZ_t)=\varphi_1\,\mathrm{E}(X_{t-s}Z_t)+\mathrm{E}Z_t^2$ daje

$$\gamma(0)=\varphi_1\gamma(s)+\sigma^2.$$

Iz prethodnog je $\gamma(s)=\varphi_1\gamma(0)$ iz čega slijedi $\gamma(0)=\varphi_1^2\gamma(0)+\sigma^2$ odnosno

$$\gamma(0)=\frac{\sigma^2}{1-\varphi_1^2}.$$

Nadalje, $\gamma(s)=\varphi_1\gamma(0)$, $\gamma(2s)=\varphi_1\gamma(s)=\varphi_1^2\gamma(0)$ i zaključujemo

$$\gamma(h)=\begin{cases}\frac{\sigma^2}{1-\varphi_1^2}\varphi_1^{|k|}, & \text{ako je } h=ks \text{ za neki } k\in\mathbb{Z},\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

Općenito, $SAR(P)_s = SARMA(0,0)\times(P,0)_s$ proces ima korelacije samo na koracima $0,s,2s,\dots$ koje opadaju u nulu eksponencijalno brzo.

Zadatak IV.1.1 Neka je

$$X_t = 0.5X_{t-1} + 0.5X_{t-12} - 0.25X_{t-13} + Z_t + 0.8Z_{t-12}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

O kojem SARMA procesu se radi?
(Uputa: zapišite pomoću polinoma u B i faktorizirajte, rješenje je $SARMA(1,0) \times (1,1)_{12}$.) ■

IV.2. Sezonalni ARIMA procesi

Nestacionarnost u sezonalnom smislu može se pojaviti kada je proces gotovo periodičan.

■ **Primjer IV.2.1** Pretpostavimo da promatramo prosječne mjesečne temperature kroz godine te da su temperature u istim mjesecima približno jednake. U tom slučaju ima smisla razmatrati model oblika

$$X_t = S_t + Z_t,$$

gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ šum a $\{S_t\}$ sezonalna komponenta koja se sporo mijenja od godine do godine slično kao slučajna šetnja

$$S_t = S_{t-12} + W_t$$

gdje je $\{W_t\}$ bijeli šum nezavisan od $\{Z_t\}$. Podaci iz ovakvih modela mogu se prepoznati po sporom opadanju uzoračke ACRF na koracima $12, 24, 36, \ldots$. $\{S_t\}$ nije stacionaran pa onda ni $\{X_t\}$. Promotrimo li proces

$$U_t = X_t - X_{t-12},$$

vidimo da je

$$U_t = S_t + Z_t - S_{t-12} - Z_{t-12} = \underbrace{W_t}_{\text{bijeli šum}} + \underbrace{Z_t - Z_{t-12}}_{SMA(1)_{12}},$$

iz čega slijedi da je $\{U_t\}$ stacionaran. Za $h \geq 1$ dobijemo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(U_t, U_{t+h}) &= \mathrm{E}\left[(W_t + Z_t - Z_{t-12})(W_{t+h} + Z_{t+h} - Z_{t+h-12})\right] \\
&= -\mathrm{E}[Z_t Z_{t-12+h}] - \mathrm{E}[Z_{t-12} Z_{t+h}] + \mathrm{E}[Z_{t-12} Z_{t-12+h}] \quad = \begin{cases} -\sigma^2, & |h| = 12, \\ 0, & |h| \neq 12. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dakle, $\{U_t\}$ ima korelacijsku strukturu $SMA(1)_{12}$ procesa.

Kao što vidimo iz prethodnog primjera, sezonalnu nestacionarnost ovakvog tipa možemo eliminirati sljedećim operatorom.

Definicija IV.2.1 Za proces $\{X_t\}$ **operator sezonalnog diferenciranja** na koraku $s \in \mathbb{N}$ definiran je s

$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s} = (1 - B^s) X_t.$$

Definicija IV.2.2 Neka je $d, D \in \mathbb{N}_0$. Kažemo da je $\{X_t\}$ **sezonalni ARIMA proces** reda $(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ ako je $\left\{\Delta^d \Delta_s^D X_t\right\}$ $SARMA(p,q) \times (P,Q)_s$ proces. Pišemo $\{X_t\} \sim SARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$.

SARIMA model možemo zapisati kao

$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D X_t = \theta(B)\Theta(B^s) Z_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

Zadatak IV.2.1 Neka je $\{X_t\}$ proces definiran s

$$\begin{aligned} X_t &= Y_t + S_t + Z_t, \\ Y_t &= Y_{t-1} + W_t, \\ S_t &= S_{t-s} + V_t, \end{aligned}$$

gdje su $\{Z_t\}$, $\{W_t\}$ i $\{V_t\}$ nezavisni bijeli šumovi ($\{Y_t\}$ daje stohastički trend, a $\{S_t\}$ sezonalnu nestacionarnost). Pokažite da je $\{\Delta\Delta_s X_t\}$ stacionaran i odredite korelacijsku strukturu.
[Uputa: raspisati i zaključiti stacionarnost jer je zbroj stacionarnih. Korelacijska struktura odgovara $SARMA(0,1) \times (0,1)_s$ procesu.] ■

R **Praktikum.** Simulacije i primjeri.

IV.3. Prilagodba SARIMA modela i predviđanje

Cijeli postupak prilagodbe modela je isti kao kod ARIMA modela. Kod identifikacije modela treba najprije razmotriti stacionarnosti. Postojanje sezonalne nestacionarnosti može se uočiti kao sporo opadanje procijenjene ACRF na koracima $s, 2s, \ldots$. U tom slučaju treba primijeniti diferenciranje na koraku s. Ako tako diferencirani niz i dalje ima obilježja nestacionarnosti, onda se može razmatrati i diferenciranje na koraku 1. Time se odrede d i D. Postupak identifikacije je nešto složeniji jer treba odrediti dva dodatna reda P i Q. Mogu se koristiti isti kriteriji kao u ARIMA slučaju (AIC, BIC, ...).

Procjena parametara funkcionira jednako te u koraku dijagnostike treba provjeravati iste kriterije.

R **Praktikum.** Prilagodba SARIMA modela.

Predviđanje je također ekvivalentno predviđanju ARIMA procesa. Ako je $d > 0$ ili $D > 0$, onda se računa predviđanje SARMA procesa $\{Y_t\} = \{\Delta^d \Delta_s^D X_t\}$ koristeći odrezane predikcije. Primjerice za $d = D = 1$ imamo

$$Y_t = \Delta\Delta_s X_t = \Delta(X_t - X_{t-s}) = X_t - X_{t-1} - X_{t-s} + X_{t-s-1}.$$

Zadatak IV.3.1 Odredite odrezane predikcije $SARMA(0,0) \times (1,0)_{12}$ procesa te aproksimaciju srednjekvadratne greške predikcije. ■

Rješenje. Radi se o procesu

$$X_t = \varphi_1 X_{t-12} + Z_t,$$

pa je

$$\Pi_n' X_{n+h} = \varphi_1 \Pi_n' X_{n+h-12} + \Pi_n' Z_{n+h} = \varphi_1 \Pi_n' X_{n+h-12} + W_{n+h} = \varphi_1 \Pi_n' X_{n+h-12},$$

iz čega slijedi

$$\Pi_n' X_{n+h} = \varphi_1 X_{n+h-12}, \quad \text{za } h = 1, \ldots, 12,$$

i općenito

$$\Pi_n' X_{n+h} = \varphi_1^{k+1} X_{n+r-12},$$

gdje je $k = \lfloor (h-1)/12 \rfloor$ i $0 \leq r < 12$ takav da je $h = 12k + r + 1$. To bi mogli intepretirati primjerice kao: predikcija u siječnju sljedeće godine je siječanj ove godine pomnožen s φ_1, u siječnju za dvije godine je siječanj ove godine pomnožen s φ_1^2.

Za grešku uočimo da je linearna reprezentacija procesa

$$X_t = \frac{1}{1-\varphi_1 B^{12}} Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\varphi_1 B^{12}\right)^j Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j Z_{t-12j},$$

pa su koeficijenti dani s

$$\psi_j = \begin{cases} \varphi_1^{j/12}, & j = 0, 12, 24, \dots, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Stoga po (III.6.5) je srednjekvadratna greška

$$v_h = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\lfloor (h-1)/12 \rfloor} \varphi_1^{2j} = \sigma^2 \frac{1-\varphi_1^{2\lfloor (h-1)/12 \rfloor + 2}}{1-\varphi_1^2}.$$

Uočimo da predikcija konvergira u očekivanje (ovdje nula), a greška konvergira u konstantu.

Zadatak IV.3.2 Odredite odrezanu predikciju $SARIMA(0,0,0) \times (0,1,1)_{12}$ procesa te aproksimaciju srednjekvadratne greške. ■

Rješenje. Radi se o procesu

$$\Delta_{12} X_t = (1 + \vartheta B^{12}) Z_t \;\Rightarrow\; X_t = X_{t-12} + Z_t + \vartheta Z_{t-12},$$

$$\Pi_n' X_{n+h} = \Pi_n' X_{n+h-12} + \Pi_n' Z_{n+h} + \vartheta \Pi_n' Z_{n+h-12} = \Pi_n' X_{n+h-12} + \vartheta \Pi_n' Z_{n+h-12}$$

što daje

$$\begin{aligned} h &= 1 & \Pi_n' X_{n+1} &= X_{n-11} + \vartheta W_{n-11}, \\ h &= 2 & \Pi_n' X_{n+2} &= X_{n-10} + \vartheta W_{n-10}, \\ &\vdots \\ h &= 12 & \Pi_n' X_{n+12} &= X_n + \vartheta W_n, \\ h &= 13 & \Pi_n' X_{n+13} &= \Pi_n' X_{n+1} = X_{n-11} + \vartheta W_{n-11}, \end{aligned}$$

odnosno, predikcija je konstantna na koraku 12 (primjerice, predikcije 1,13,25,... su jednake, 2,14,26,... su jednake itd.)

Srednjekvadratnu grešku aproksimiramo s (III.6.9). Prvo uočimo da je

$$\psi^*(z) = \frac{1}{1-z^{12}} (1 + \vartheta z^{12}) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{12j} (1 + \vartheta z^{12}) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{12j} + \vartheta \sum_{j=0}^{\infty} z^{12(j+1)},$$

pa je onda $\psi_0^* = 1$, $\psi_{12}^* = 1 + \vartheta$, $\psi_{24}^* = 1 + \vartheta$, ... i $\psi_j^* = 0$ inače. Stoga je aproksimacija srednjekvadratne greške

$$v_h = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^{*2} = \sigma^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{\lfloor (h-1)/12 \rfloor} (1+\vartheta)^2 \right) = \sigma^2 \left(1 + \lfloor (h-1)/12 \rfloor (1+\vartheta)^2 \right).$$

Uočimo da se aproksimacija srednjekvadratne greške svakih 12 koraka povećava i raste u ∞ (to je posljedica nestacionarnosti).

R **Praktikum.** SARIMA predviđanje.

IV.3.1 Zadaci

Zadatak IV.3.3 Odredite transformaciju kojom od procesa

$$X_t = X_{t-1} + (1+\varphi)X_{t-6} - (1+\varphi)X_{t-7} - \varphi X_{t-12} + \varphi X_{t-13} + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2), \quad |\varphi| < 1,$$

možemo dobiti stacionaran proces. ■

Zadatak IV.3.4 Neka je X_t razina vode u nekom spremniku u mjesecu t. Svaki mjesec 20% vode iz prethodnog mjeseca se potroši. Voda u spremnik ulazi oborinama koje se ne mijenjaju značajno u istim mjesecima kroz godine. Stoga je količina vode koja će ući u spremnik u nekom mjesecu jednaka količini koja je ušla u spremnik u istom mjesecu prošle godine uz grešku (šum) koja ima očekivanje 0, varijancu 1 i nezavisna je iz mjeseca u mjesec.

(a) Definirajte proces kojim možemo modelirati razinu vode u spremniku po mjesecima. O kojem procesu se radi? (uputa: izrazite priljev vode u istom mjesecu prošle godine i to iskoristite)

(b) Kojom transformacijom od tog procesa možemo dobiti stacionaran proces? Odredite funkciju autokorelacija tako dobivenog procesa.

(c) Razina vode u lipnju ove godine je 100, u srpnju prošle godine je bila 110, a u lipnju prošle godine 90. Izračunajte (odrezanu) predikciju za srpanj ove godine.

■

Zadatak IV.3.5 Vremenski niz diferenciran je na koraku 12, zatim na koraku 1 te je dobiven niz za koji je procijenjena autokorelacijska funkcija. Dobivene su vrijednosti

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(12j) &\approx 0.8^j, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \hat{\rho}(12j+1) &\approx 0.4\ 0.8^j, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \hat{\rho}(12j-1) &\approx 0.4\ 0.8^j, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \hat{\rho}(h) &\approx 0, \quad \text{inače.} \end{aligned}$$

Na osnovu toga predložite odgovarajući kauzalan i invertibilan SARIMA model i pri tome specificirajte sve parametre. Obrazložite svoju tvrdnju tako da usporedite teorijsku funkciju autokorelacija tog procesa s gore dobivenim procijenjenim vrijednostima. ■

IV.4. Spektralna analiza

Analiza vremenskih nizova razlikuje se od klasične statistike zbog toga što vremenski nizovi pokazuju ponavljajuće ponašanje. Do sada smo procese promatrali regresijski u odnosu na prošlost i na taj način reprezentirali proces kao linearnu kombinaciju prošlih vrijednosti šuma. Sada ćemo promatrati dekompoziciju procesa na komponente regularnosti. Regularnost ćemo promatrati kao periodičke fluktuacije procesa.

Osnovni cilj spektralne analize jest identificirati dominantu frekvenciju u procesu odnosno nizu. Spektralna analiza često se naziva analizom u *frekvencijskoj domeni* za razliku od dosadašnjeg pristupa analize u *vremenskoj domeni*. Promatrat ćemo neku vrstu Fourierove transformacije strukture zavisnosti i njena svojstva.

Definicija IV.4.1 Neka je $\{X_t\}$ stacionaran proces s ACVF γ te neka je $\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\gamma(h)| < \infty$. **Spektralna gustoća** procesa $\{X_t\}$ (odnosno ACVF γ) je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definirana s

$$f(\lambda) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\lambda h}\gamma(h) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\lambda h)\,\gamma(h) - i\sum_{h=-\infty}^{\infty} \sin(2\pi\lambda h)\,\gamma(h).$$

Napomena IV.4.1

(i) Kako je $|e^{-2\pi i\lambda h}| = 1$, onda je $|f(\lambda)| \le \sum_{h=-\infty}^{\infty}|e^{-2\pi i\lambda h}||\gamma(h)| < \infty$ po pretpostavci.

(ii) Kako su γ i cos parne funkcije, f možemo računati kao

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \gamma(0) + 2\sum_{h=1}^{\infty}\cos(2\pi\lambda h)\,\gamma(h) - i\left(\sum_{h=1}^{\infty}\sin(2\pi\lambda h)\,\gamma(h) + \sum_{h=1}^{\infty}\sin(-2\pi\lambda h)\,\gamma(-h)\right) \\ &= \gamma(0) + 2\sum_{h=1}^{\infty}\cos(2\pi\lambda h)\,\gamma(h). \end{aligned} \tag{IV.4.1}$$

(iii) Kako je cos periodična s periodom 2π, $f(\lambda)$ je dovoljno promatrati za $\lambda\in[-1/2,1/2]$. S obzirom da je zbog (IV.4.1) $f(-\lambda) = f(\lambda)$, dovoljno je promatrati primjerice $\lambda\in[0,1/2)$.

Propozicija IV.4.2 Spektralna gustoća ima sljedeća svojstva
(i) $f(\lambda) \geq 0$ za sve $\lambda \in (-1/2, 1/2]$,
(ii) za sve $h \in \mathbb{Z}$

$$\gamma(h) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h\lambda} f(\lambda) d\lambda.$$

Skica dokaza. (i) je tehnički dok (ii) slijedi iz

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h\lambda} f(\lambda) d\lambda = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(h-k)\lambda} \gamma(k) d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(h-k)\lambda} d\lambda = \gamma(h),$$

jer je $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(h-k)\lambda} d\lambda = 1$ za $h = k$ i 0 inače. ■

Svojstvo (ii) prethodne propozicije govori da je spektralna gustoća f Fourierova transformacija ACVF γ, odnosno γ je inverzna Fourierova transformacija od f. Spektralna gustoća može se definirati kao funkcija f koja zadovoljava (i) i (ii) iz Propozicije IV.4.2 bez pretpostavke $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$. Tako definirana f je jedinstvena skoro svuda (proizlazi iz svojstava Fourierove transformacije, slično kao kod karakterističnih funkcija).

U izrazima $\gamma(h)\cos(2\pi\lambda h)$ u (IV.4.1), λ predstavlja **frekvenciju** – broj ciklusa u jedinici vremena, a $\gamma(h)$ **amplitudu** ili visinu. Trajanje ciklusa je $1/\lambda$, primjerice $\lambda = 1/4$ znači da su potrebna 4 trenutka za ciklus. Dakle, manja frekvencija znači dulji ciklus i obratno.

■ **Primjer IV.4.1 — Spektralna gustoća ne mora uvijek postojati.** Neka je $\{X_t\}$ zadan se

$$X_t = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t),$$

gdje su A i B nezavisne slučajne varijable $\mathrm{E}A = \mathrm{E}B = 0$, $\mathrm{Var}\,A = \mathrm{Var}\,B = \sigma^2$ i $\omega_0 \in (0, 1/2)$. $\{X_t\}$ je stacionaran (vidi Zadatak I.3.6.) i ACVF je

$$\gamma(h) = \sigma^2 \cos(2\pi\omega_0 h).$$

Uočimo da je $1/\omega_0$ period procesa – potrebno je $1/\omega_0$ vremenskih trenutaka za puni ciklus, odnosno ω_0 je frekvencija (i to jedina frekvencija). Ovdje spektralna gustoća ne postoji jer se γ ne može zapisati kao $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h\lambda} f(\lambda) d\lambda$ za neku f (sva masa bi morala biti koncentrirana u ω_0). Ipak, ako stavimo za $\lambda \in [-1/2, 1/2]$

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < -\omega_0, \\ \frac{\sigma^2}{2}, & -\omega_0 \leq \lambda < \omega_0, \\ \sigma^2, & \lambda \geq \omega_0, \end{cases}$$

onda je $\widetilde{F}(\lambda) = \frac{1}{\sigma^2} F(\lambda)$ funkcija distribucije slučajne varijable

$$Z \sim \begin{pmatrix} -\omega_0 & \omega_0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

te je

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h\lambda} dF(\lambda) = \sigma^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h\lambda} d\widetilde{F}(\lambda) = \sigma^2\, \mathrm{E}\left[e^{2\pi i h Z}\right] &= \sigma^2 \left(\frac{1}{2} e^{-2\pi i h\omega_0} + \frac{1}{2} e^{2\pi i h\omega_0}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \left(\cos(2\pi h\omega_0) - i\sin(2\pi h\omega_0) + \cos(2\pi h\omega_0) + i\sin(2\pi h\omega_0)\right) \\ &= \sigma^2 \cos(2\pi h\omega_0) = \gamma(h). \end{aligned}$$

Dakle, ne postoji funkcija gustoće ali postoji generalizirana funkcija distribucije F na $[-1/2, 1/2]$ (generalizirana u smislu da može biti $F(\infty) \neq 1$, ali $\lambda \mapsto F(\lambda)/F(\infty)$ je vjerojatnosna funkcija distribucije).

Može se pokazati da prethodno vrijedi i općenito u smislu sljedećeg teorema.

Teorem IV.4.3 — Spektralna reprezentacija ACVF. Ako je γ ACVF stacionarnog procesa, onda postoji zdesna neprekidna, neopadajuća, ograničena funkcija F definirana na $[-1/2, 1/2]$, $F(-1/2) = 0$, takva da je

$$\gamma(h) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h\lambda} dF(\lambda).$$

Funkcija F naziva se **spektralna funkcija distribucije**. Ako F ima gustoću, kažemo da je spektar **neprekidan**. Ako je F diskretna, kažemo da je spektar **diskretan**.

Važna činjenica jest da se svaki stacionaran proces može predstaviti kao (beskonačna) linearna kombinacija procesa iz Primjera IV.4.1. Primjerice, konačna linearna kombinacija ima oblik

$$\sum_{j=1}^{k} (A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)),$$

dok generalizacija ima oblik stohastičkog integrala

$$\int_{(-1/2,1/2]} e^{2\pi i h\lambda} dZ(\lambda),$$

gdje je $\{Z(\lambda)\}$ proces s nezavisnim prirastima i kompleksnim vrijednostima. Takav rastav procesa na komponente regularnosti naziva se **spektralna reprezentacija procesa**.

IV.4.1 Procjena spektra

Slično kao što $\gamma(h)$ procjenjujemo uzoračkom ACVF $\widehat{\gamma}(h)$, spektralnu gustoću f možemo procijeniti **periodogramom**. Za podatke $x_1, \ldots, x_n$ periodogram je funkcija

$$I(\lambda) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^{n} x_t e^{-2\pi i \lambda t} \right|^2, \qquad \lambda \in [-1/2, 1/2].$$

Periodogram možemo shvatiti kao uzoračku spektralnu gustoću iako negdje postoje razlike u definiciji ta dva pojma. Radi se o modulu diskretne Fourierove transformacije. Može se pokazati da je

$$I(\lambda) = \sum_{h=-n+1}^{h=n-1} e^{-2\pi i \lambda h} \widehat{\gamma}(h),$$

gdje je $\widehat{\gamma}$ uzoračka ACVF. Ovaj procjenitelj se može značajno unaprijediti tako da daje zaglađenije procjene, no nećemo se time detaljnije baviti.

IV.4.2 Primjeri

■ **Primjer IV.4.2 — Bijeli šum.** Iz (IV.4.1) za $\{X_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ imamo

$$f(\lambda) = \gamma(0) = \sigma^2.$$

Spektralna gustoća je konstanta. Ime bijeli šum dolazi od bijele svjetlosti – svjetlost koja sadrži sve boje spektra elektromagnetskog zračenja.

■ **Primjer IV.4.3 — $MA(1)$ proces.** Za $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ imamo $\gamma(0) = \sigma^2(1+\theta^2)$, $\gamma(1) = \sigma^2\theta$ i $\gamma(h) = 0$ za $h \geq 2$. Iz (IV.4.1) slijedi

$$f(\lambda) = \gamma(0) + 2\cos(2\pi\lambda)\gamma(1) = \sigma^2 \left(1 + \theta^2 + 2\theta\cos(2\pi\lambda)\right).$$

Razlikujemo dvije situacije koje nose nazive po vidljivom spektru boja (boje ide crvena – žuta – zelena – plava – ljubičasta, od manje ka većoj frekvenciji, odnosno od veće prema manjoj valnoj duljini).

$\theta > 0$ prevladavaju niske frekvencije što odgovara duljim ciklusima, što je povezano s pozitivnom korelacijom (crveni spektar),

$\theta < 0$ prevladavaju visoke frekvencije (kraći ciklusi) zbog negativne korelacije (plavi spektar).

■ **Primjer IV.4.4** Za $AR(1)$ proces je $\gamma(0) = \sigma^2/(1-\phi^2)$ i $\gamma(h) = \gamma(0)\phi^{|h|}$. Spektralnu gustoću možemo naći direktno iz definicije

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\lambda h}\gamma(h) = \gamma(0) + \sum_{h=1}^{\infty} e^{-2\pi i\lambda h}\gamma(h) + \sum_{h=1}^{\infty} e^{2\pi i\lambda h}\gamma(-h) \\
&= \gamma(0)\left(1 + \sum_{h=1}^{\infty} e^{-2\pi i\lambda h}\phi^h + \sum_{h=1}^{\infty} e^{2\pi i\lambda h}\phi^h\right) \\
&= \gamma(0)\left(1 + \frac{\phi e^{-2\pi i\lambda}}{1-\phi e^{-2\pi i\lambda}} + \frac{\phi e^{2\pi i\lambda}}{1-\phi e^{2\pi i\lambda}}\right) \\
&= \gamma(0)\left(1 + \frac{\phi e^{-2\pi i\lambda} - \phi^2 + \phi e^{2\pi i\lambda} - \phi^2}{1 - \phi e^{-2\pi i\lambda} - \phi e^{2\pi i\lambda} + \phi^2}\right) \\
&= \gamma(0)\left(1 + \frac{2\phi\cos(2\pi\lambda) - 2\phi^2}{1 - 2\phi\cos(2\pi\lambda) + \phi^2}\right) \\
&= \gamma(0)\frac{1-\phi^2}{1 - 2\phi\cos(2\pi\lambda) + \phi^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{1 - 2\phi\cos(2\pi\lambda) + \phi^2},
\end{aligned}$$

gdje smo koristili

$$e^{xi} + e^{-xi} = \cos x + i\sin x + \cos x - i\sin x = 2\cos x.$$

Zadatak IV.4.1 Odredite spektralnu gustoću $MA(2)$ procesa.
[Uputa: iskoristite (IV.4.1) i izraz za ACVF.] ■

Rješenje.

$$f(\lambda) = \sigma^2\left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + 2(\theta_1 + \theta_1\theta_2)\cos(2\pi\lambda) + 2\theta_2\cos(4\pi\lambda)\right).$$

Zadatak IV.4.2 Odredite spektralnu gustoću $ARMA(1,1)$ procesa.
[Uputa: po definiciji korištenjem izraza za ACVF poznat iz Zadatka II.4.4.] ■

Rješenje.

$$f(\lambda) = \gamma(0) + 2\gamma(1)\cos(2\pi\lambda) + 2\phi\gamma(1)\frac{\cos(4\pi\lambda) - \phi\cos(2\pi\lambda)}{1 + \phi^2 - \phi\cos(2\pi\lambda)}.$$

Zadatak IV.4.3 Odredite spektralnu gustoću $SARMA(0,0) \times (0,2)_{12}$ procesa. ■

Zadatak IV.4.4 Neka je $\{X_t\}$ linearan proces s reprezentacijom

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

Pokažite da je spektralna gustoća od $\{X_t\}$

$$f(\lambda) = \sigma^2 \Psi(e^{-2\pi i \lambda}) \Psi(e^{2\pi i \lambda}),$$

gdje je $\Psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j$. ■

R **Praktikum.** Spektralna analiza.

V

Neki drugi modeli

U ovom dijelu razmotrit ćemo neke druge modele vremenskih nizova koji su česti popularni u praksi.

V.1. Višedimenzionalni vremenski nizovi

Često je vremenske nizove dobro promatrati kao komponente jednog višedimenzionalnog vremenskog niza kako bi se osim povezanosti svakog od njih sa svojom prošlosti proučavala i njihova međusobna povezanost.

Nakon razvoja Keynesijanske teorije u makroekonomiji 50-ih godina prošlog stoljeća, popularni su bili tzv. simultani modeli koji koriste jednodimenzionalne modele (jednadžbe), ali kao skup. U sedamdesetima taj je pristup bio jako kritiziran jer nije uzimao u obzir interakcije između različitih varijabli.

Christopher A. Sims osamdesetih predlaže novu strategiju na način da svaku varijablu razmatra kao endogenu (zavisnu). Tako svake dvije varijable mogu biti u interakciji. Za taj je pristup, između ostalog, 2011. godine dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju. U klasi linearnih modela posebno su važni VAR (vektorski AR) modeli na osnovu kojih je cilj promatrati kako šokovi djeluju na sustav kroz vrijeme. To je u makroekonomiji posebno važno jer je nemoguće provoditi eksperimente.

Pretpostavimo da raspolažemo s $m \geq 2$ vremenskih nizova $x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}$, $i = 1, \ldots, m$. Model za ovakve podatke je **višedimenzionalni slučajni proces** $\{\boldsymbol{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ – familija slučajnih vektora $\boldsymbol{X}_t = (X_{1,t}, \ldots, X_{m,t})$ definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru. Posebno, za $i = 1, \ldots, m$ je $\{X_{i,t}, t \in \mathbb{Z}\}$ slučajni proces.

Za ovakav proces *momente drugog reda* predstavljaju:

- **vektor očekivanja**

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathrm{E}\boldsymbol{X}_t = \begin{bmatrix} \mathrm{E}X_{1,t} \\ \vdots \\ \mathrm{E}X_{m,t} \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

- **matrica kroskovarijanci**

$$\Gamma(t,s) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(t,s) & \cdots & \gamma_{1m}(t,s) \\ \gamma_{21}(t,s) & \cdots & \gamma_{2m}(t,s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1}(t,s) & \cdots & \gamma_{mm}(t,s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad t,s \in \mathbb{Z},$$

gdje je

$$\gamma_{ij}(t,s) = \mathrm{Cov}(X_{i,t}, X_{j,s}).$$

Za $i = j$, γ_{ii} je ACVF procesa $\{X_{i,t}\}$, dok za $i \neq j$, γ_{ij} nazivamo **funkcija kroskovarijanci** (**CCVF**) procesa $\{X_{i,t}\}$ i $\{X_{j,t}\}$. Možemo pisati i

$$\Gamma(t,s) = \mathrm{E}\left[(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu}(t))(\boldsymbol{X}_s - \boldsymbol{\mu}(s))^T\right],$$

pri čemu očekivanje matrice računamo po elementima. Treba uočiti da $\Gamma(t,s)$ općenito ne mora biti simetrična te da to nije matrica kovarijanci slučajnog vektora. Naime, vrijedi

$$\gamma_{ij}(t,s) = \mathrm{Cov}(X_{i,t}, X_{j,s}) = \mathrm{Cov}(X_{j,s}, X_{i,t}) = \gamma_{ji}(s,t),$$

ali ne nužno i $\gamma_{ij}(t,s) = \gamma_{ji}(t,s)$.

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju važnu ulogu imaju stacionarni procesi.

Definicija V.1.1 Višedimenzionalni slučajni proces $\{\boldsymbol{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je (slabo) **stacionaran** ako vrijedi

(i) $\mathrm{E}X_{i,t}^2 < \infty$ za sve $t \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, m$,
(ii) $\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ za sve $t \in \mathbb{Z}$,
(iii) $\Gamma(t+h,t)$ ne ovisi o t za sve $h \in \mathbb{Z}$.

Za stacionarne procese možemo definirati $\Gamma(h) := \Gamma(t+h,t) = \mathrm{E}\left[(\boldsymbol{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu})^T\right]$. Uočimo da je za $h = 0$ radi o matrici kovarijanci

$$\Gamma(0) = \mathrm{E}\left[(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu})^T\right]$$

slučajnog vektora $(X_{1,t}, \dots, X_{m,t})$. Ako je $\{\boldsymbol{X}_t\}$ stacionaran, onda je $\{X_{i,t}\}$ stacionaran za sve $i = 1, \dots, m$ s ACVF γ_{ii}. Uočimo da je općenito $\gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}$, ali vrijedi sljedeće

$$\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ij}(t+h,t) = \mathrm{Cov}(X_{i,t+h}, X_{j,t}) = \mathrm{Cov}(X_{j,t}, X_{i,t+h}) = \gamma_{ji}(t,t+h) = \gamma_{ji}(-h).$$

Analogno možemo definirati **matricu kroskorelacija** za stacionarne procese

$$R(h) = \begin{bmatrix} \rho_{11}(h) & \cdots & \rho_{1m}(h) \\ \rho_{21}(h) & \cdots & \rho_{2m}(h) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1}(h) & \cdots & \rho_{mm}(h) \end{bmatrix}, \quad h, \in \mathbb{Z},$$

gdje je

$$\rho_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)}}.$$

Za $i = j$ je ρ_{ii} ACRF procesa $\{X_{i,t}\}$, dok za $i \neq j$, ρ_{ij} nazivamo **funkcija kroskorelacija** (**CCRF**) procesa $\{X_{i,t}\}$ i $\{X_{j,t}\}$.

■ **Primjer V.1.1** **Višedimenzionalni bijeli šum** s očekivanjem $\boldsymbol{0}$ i matricom kovarijanci Σ je stacionaran slučajan proces $\{\boldsymbol{Z}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ takav da je

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{0},$$

$$\Gamma(h) = \begin{cases} \Sigma, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Pišemo $\{\boldsymbol{Z}_t\} \sim WN(\boldsymbol{0}, \Sigma)$.

Slično kao i ACVF, funkciju kroskovarijanci možemo procijeniti na osnovu nizova podataka $x_{i,1},\dots,x_{i,n}$ i $x_{j,1},\dots,x_{j,n}$ s

$$\widehat{\gamma}_{ij}(h) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-h}(x_{i,k+h}-\overline{x}_{i,n})(x_{j,k}-\overline{x}_{j,n}), \qquad \text{za } 0 \le h < n,$$
$$\widehat{\gamma}_{ij}(h) = \widehat{\gamma}_{ji}(-h), \qquad \text{za } -n < h < 0.$$

Funkciju kroskorelacija procjenjujemo s

$$\widehat{\rho}_{ij}(h) = \frac{\widehat{\gamma}_{ij}(h)}{\sqrt{\widehat{\gamma}_{ii}(0)\widehat{\gamma}_{jj}(0)}}, \qquad \text{za } -n < h < n.$$

Ubuduće ćemo uglavnom promatrati dvodimenzionalne procese ($m = 2$) za što ćemo koristiti jednostavnije oznake

- proces
$$\left\{\begin{bmatrix}X_t\\Y_t\end{bmatrix}, t \in \mathbb{Z}\right\},$$
- očekivanje
$$\boldsymbol{\mu}(t) = \begin{bmatrix}\mu_X(t)\\ \mu_Y(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{E}X_t\\ \mathrm{E}Y_t\end{bmatrix},$$
- kroskovarijance
$$\Gamma(t,s) = \begin{bmatrix}\gamma_X(t,s) & \gamma_{X,Y}(t,s)\\ \gamma_{Y,X}(t,s) & \gamma_Y(t,s)\end{bmatrix}$$
gdje su $\gamma_X(t,s) = \gamma_{11}(t,s)$ i $\gamma_Y(t,s) = \gamma_{22}(t,s)$ ACVF te $\gamma_{X,Y}(t,s) = \gamma_{12}(t,s)$ i $\gamma_{Y,X}(t,s) = \gamma_{21}(t,s)$ CCVF (analogne oznake koristimo za ACRF i CCRF).

Zadatak V.1.1 Odredite funkcije očekivanja, ACVF, CCVF, ACRF i CCRF za proces $\{[X_t,Y_t]^T, t \in \mathbb{Z}\}$, gdje je $\{X_t\} \sim IID(0,\sigma^2)$ i

$$Y_t = X_t + 0.8X_{t-1}.$$

Radi li se o stacionarnom procesu? ■

Rješenje. Lako se izračuna:

- funkcija očekivanja
$$\boldsymbol{\mu}(t) = \begin{bmatrix}\mathrm{E}X_t\\ \mathrm{E}Y_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$
- ACVF
$$\gamma_X(t,s) = \begin{cases}\sigma^2, & t = s,\\ 0, & t \ne s,\end{cases}$$
$$\gamma_Y(t,s) = \begin{cases}1.64\sigma^2, & t = s,\\ 0.8\sigma^2, & |t-s| = 1,\\ 0, & |t-s| > 1,\end{cases}$$

- ACRF

$$\rho_X(t,s)=\begin{cases}1, & t=s,\\ 0, & t\neq s,\end{cases}$$
$$\rho_Y(t,s)=\begin{cases}1, & t=s,\\ \frac{0.8}{1.64}, & |t-s|=1,\\ 0, & |t-s|>1,\end{cases}$$

- CCVF

$$\begin{aligned}\gamma_{X,Y}(t,s)&=\mathrm{Cov}(X_t,Y_s)=\mathrm{E}X_tY_s-\mathrm{E}X_t\,\mathrm{E}Y_s\\ &=\mathrm{E}\left[X_t(X_s+0.8X_{s-1})\right]=\mathrm{E}X_tX_s+0.8\,\mathrm{E}X_tX_{s-1}\\ &=\begin{cases}\sigma^2, & t=s,\\ 0, & t\neq s,\end{cases}+0.8\begin{cases}\sigma^2, & t=s-1,\\ 0, & t\neq s-1,\end{cases}\\ &=\begin{cases}\sigma^2, & t=s,\\ 0.8\sigma^2, & t=s-1,\\ 0, & \text{inače},\end{cases}\\ \gamma_{Y,X}(t,s)&=\mathrm{Cov}(Y_t,X_s)=\mathrm{Cov}(X_s,Y_t)=\gamma_{X,Y}(s,t)\\ &=\begin{cases}\sigma^2, & t=s,\\ 0.8\sigma^2, & s=t-1,\\ 0, & \text{inače},\end{cases}\end{aligned}$$

- CCRF

$$\begin{aligned}\rho_{X,Y}(t,s)&=\frac{\gamma_{X,Y}(t,s)}{\sqrt{\gamma_X(t,t)\gamma_Y(s,s)}}=\frac{\gamma_{X,Y}(t,s)}{\sqrt{1.64\sigma^4}}\\ &=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1.64}}, & t=s,\\ \frac{0.8}{\sqrt{1.64}}, & t=s-1,\\ 0, & \text{inače}.\end{cases}\end{aligned}$$

Uočimo da $\gamma_X(t+h,t)$, $\gamma_Y(t+h,t)$, $\gamma_{X,Y}(t+h,t)$ i $\gamma_{Y,X}(t+h,t)$ ne ovise o t pa

$$\Gamma(t+h,t)=\begin{bmatrix}\gamma_X(t+h,t) & \gamma_{X,Y}(t+h,t)\\ \gamma_{Y,X}(t+h,t) & \gamma_Y(t+h,t)\end{bmatrix}$$

ne ovisi o t i proces je stacionaran. Stoga možemo definirati te funkcije kao funkcije jedne varijable

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(t+h,t) = \begin{cases} \sigma^2, & h=0, \\ 0, & h \neq 0, \end{cases}$$

$$\gamma_Y(h) = \gamma_Y(t+h,t) = \begin{cases} 1.64\sigma^2, & h=0, \\ 0.8\sigma^2, & |h|=1, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

$$\gamma_{X,Y}(h) = \gamma_{X,Y}(t+h,t) = \begin{cases} \sigma^2, & h=0, \\ 0.8\sigma^2, & h=-1, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

$$\gamma_{Y,X}(h) = \gamma_{Y,X}(t+h,t) = \begin{cases} \sigma^2, & h=0, \\ 0.8\sigma^2, & h=1, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Uočimo da $\gamma_{X,Y}(h)$ nije parna, ali vrijedi $\gamma_{X,Y}(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, Y_t) = \mathrm{Cov}(Y_t, X_{t+h}) = \gamma_{Y,X}(-h)$.

R **Praktikum.** Primjer.

Zadatak V.1.2 Odredite funkciju kroskorelacija dvodimenzionalnog procesa

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1} \\ \frac{1}{2}X_{t-1} + \frac{1}{2}X_{t-10} \end{bmatrix},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$. ■

Rješenje. Prvo odredimo CCVF. Kako je $\mathrm{E}X_t = 0$, onda i $\mathrm{E}Y_t = 0$ pa

$$\gamma_{X,Y}(t,s) = \mathrm{E}X_tY_s = \frac{1}{2}\mathrm{E}[Z_tX_{s-1}] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[Z_tX_{s-10}] + \frac{1}{4}\mathrm{E}[Z_{t-1}X_{s-1}] + \frac{1}{4}\mathrm{E}[Z_{t-1}X_{s-10}].$$

Uočimo da je

$$\mathrm{E}Z_uX_v = \begin{cases} \sigma^2, & u=v, \\ \frac{1}{2}\sigma^2, & u=v-1, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

iz čega slijedi

$$\gamma_{X,Y}(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sigma^2, & t-s=-2, \\ \frac{5}{8}\sigma^2, & t-s=-1, \\ \frac{1}{4}\sigma^2, & t-s=0, \\ \frac{1}{4}\sigma^2, & t-s=-9, \\ \frac{5}{8}\sigma^2, & t-s=-10, \\ \frac{1}{4}\sigma^2, & t-s=-11, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Lako se izračuna da je

$$\operatorname{Var} X_t = \frac{5}{4}\sigma^2,$$
$$\operatorname{Var} Y_s = \frac{5}{8}\sigma^2,$$

iz čega slijedi

$$\rho_{X,Y}(t,s) = \frac{\gamma_{X,Y}(t,s)}{\sqrt{\operatorname{Var} X_t \operatorname{Var} Y_s}} = \frac{\gamma_{X,Y}(t,s)}{\frac{5}{4\sqrt{2}}\sigma^2}.$$

Zadatak V.1.3 Neka su A i B nezavisne slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom σ^2 i $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ procesi definirani s

$$X_t = A\cos t + B\sin t,$$
$$Y_t = B\cos t + A\sin t.$$

Pokažite da su $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ stacionarni, ali proces $\{[X_t, Y_t]^T\}$ nije.
[Uputa: da su $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ stacionarni je Zadatak I.3.6, pa treba samo izračunati CCVF.] ■

Prethodni zadatak pokazuje da stacionarni procesi ne tvore nužno dvodimenzionalan stacionaran proces.

V.1.1 VARMA procesi

Generalizacijom ARMA procesa dolazimo do vektorskih ARMA (VARMA) procesa.

Definicija V.1.2 Slučajan proces $\{\boldsymbol{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je m-dimenzionalan *VARMA(p,q)* proces ako je stacionaran i ako je

$$\boldsymbol{X}_t - \Phi_1 \boldsymbol{X}_{t-1} - \cdots - \Phi_p \boldsymbol{X}_{t-p} = \boldsymbol{Z}_t + \Theta_1 \boldsymbol{Z}_{t-1} + \cdots + \Theta_q \boldsymbol{Z}_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

gdje je $\{\boldsymbol{Z}_t\} \sim WN(\boldsymbol{0}, \Sigma)$ i $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_q$ matrice dimenzije $m \times m$.

Jednadžbu možemo zapisati kao

$$\Phi(B)\boldsymbol{X}_t = \Theta(B)\boldsymbol{Z}_t,$$

gdje je $B\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{X}_{t-1}$ i

$$\Phi(z) = I - \Phi_1 z - \cdots \Phi_p z^p,$$
$$\Theta(z) = I + \Theta_1 z + \cdots + \Theta_q z^q,$$

su **karakteristični polinomi** s vrijednostima u skupu matrica dimenzije $m \times m$. Može se pokazati da vrijede analogni rezultati kao u jednodimenzionalnom slučaju. Od ove klase u primjenama se obično koriste vektorski autoregresivni model (VAR) koje dobijemo za $q = 0$.

V.1.2 VAR procesi

VAR(p) proces je $VARMA(p,0)$ proces $\{\boldsymbol{X}_t\}$, odnosno

$$\boldsymbol{X}_t = \Phi_1 \boldsymbol{X}_{t-1} + \cdots + \Phi_p \boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{Z}_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ako označimo $\Phi_k = \left[\phi_{ij}^{(k)}\right]_{i,j=1,\dots,m}$, onda i-ta od m jednadžbi ima oblik

$$\begin{aligned}X_{i,t} =& \phi_{i1}^{(1)} X_{1,t-1} + \phi_{i2}^{(1)} X_{2,t-1} + \dots + \phi_{im}^{(1)} X_{m,t-1} \\ &+ \cdots \\ &+ \phi_{i1}^{(p)} X_{1,t-p} + \phi_{i2}^{(p)} X_{2,t-p} + \dots + \phi_{im}^{(p)} X_{m,t-p} + Z_{i,t}.\end{aligned}$$

■ **Primjer V.1.2 — $VAR(1)$ proces i $m=2$.** Neka je $\{\boldsymbol{X}_t\} \sim VAR(1)$ proces

$$\boldsymbol{X}_t = \Phi \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{Z}_t$$

i $m=2$

$$\boldsymbol{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Z}_t = \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix}.$$

Jednadžbe možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} X_{1,t} &= \phi_{11} X_{1,t-1} + \phi_{12} X_{2,t-1} + Z_{1,t}, \\ X_{2,t} &= \phi_{21} X_{1,t-1} + \phi_{22} X_{2,t-1} + Z_{2,t}. \end{aligned}$$

Karakteristični polinom $VAR(p)$ procesa je polinom s vrijednostima u skupu matrica dimenzije $m \times m$

$$\Phi(z) = I - \Phi_1 z - \cdots \Phi_p z^p.$$

Uvjeti za postojanje stacionarnog i kauzalnog rješenja analogni su jednodimenzionalnom slučaju. Primjerice, ako je

$$\det \Phi(z) \neq 0 \ \text{ za } |z| \leq 1, z \in \mathbb{C},$$

onda $VAR(p)$ jednadžba ima jedinstveno stacionarno rješenje koje je kauzalno. Kauzalnost ovdje znači da je $\boldsymbol{X}_t$ moguće reprezentirati kao

$$\boldsymbol{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \boldsymbol{Z}_{t-j},$$

za neki niz matrica $\{\Psi_j\}$ koji je apsolutno sumabilan u smislu $\sum_{j=0}^{\infty} \|\Psi_j\| < \infty$ za neku matričnu normu $\|\cdot\|$.

Zadatak V.1.4 Provjerite je li proces $\{[X_{1,t}, X_{2,t}]^T\}$ zadan s

$$\begin{aligned} X_{1,t} &= \frac{1}{2} X_{1,t-1} + \frac{1}{4} X_{2,t-1} + Z_{1,t}, \\ X_{2,t} &= \frac{1}{4} X_{1,t-1} + \frac{1}{2} X_{2,t-1} + Z_{2,t}, \end{aligned}$$

kauzalan. ■

Rješenje. Radi se o $VAR(1)$ procesu pri čemu je

$$\Phi(z) = I - \Phi_1 z, \quad \Phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Iz uvjeta

$$\det\Phi(z) = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}z & -\frac{1}{4}z \\ -\frac{1}{4}z & 1-\frac{1}{2}z \end{vmatrix} = 0,$$

dobijemo da $z_1 = 4$ i $z_2 = 4/3$. Kako je $|z_1| > 1$ i $|z_2| > 1$, proces je kauzalan (i stacionaran).

Koraci izgradnje VAR modela slični su kao kod ARMA proces. Ulazni nizovi moraju izgledati kao realizacije stacionarnih procesa što znači da ih treba diferencirati, oduzeti trend ili transformirati ako je potrebno. Time se može izgubiti dio informacija o vezi komponenata pa postoje modeli i za nestacionarne nizove (nešto o tome ćemo spomenuti kasnije).

Predikcija za VAR modele je jednostavna kao i za AR i predikcije na osnovu konačne i beskonačne prošlosti te odrezane predikcije su jednake. Primjerice za jedan korak unaprijed je

$$\Pi_n \boldsymbol{X}_{n+1} = \Phi_1 \boldsymbol{X}_n + \cdots + \Phi_p \boldsymbol{X}_{n-p+1}.$$

Za $h > 1$ koraka unaprijed definiraju se rekurzivno.

Zadatak V.1.5 Odredite funkcije autokovarijanci i kroskovarijanci stacionarnog $VARMA(0,1)$ procesa

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_t \\ V_t \end{bmatrix} + \Theta \begin{bmatrix} U_{t-1} \\ V_{t-1} \end{bmatrix}$$

gdje je $\{(U_t, V_t)^T\} \sim WN(0, \Sigma)$ i

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \Theta = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

■

R **Praktikum.** Primjer.

V.1.3 Granger uzročnost

Jedno od najvažnijih pitanja vezanih uz VAR modele je koliko su neke varijable korisne u predviđanju drugih. S druge strane, regresijske metode reflektiraju samo postojanje korelacija, a ključno bi bilo pokazati uzročnost u varijablama (jedna varijabla uzrokuje drugu).

Za uzročnost je potrebno imati teorije (primjerice, ekonomsku teoriju), a jednu vrstu *uzročnosti* uveo je Clive Granger (dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju 2003. godine). Osnovna ideja jest da uzrok ne može doći nakon posljedice i ako jedna varijabla (veličina) uzrokuje drugu, onda bi ona trebala poboljšati predikciju te druge varijable. Za početak promotrit ćemo uzročnost između dvije varijable (procesa).

Neka su $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ dva procesa. Kažemo da $\{Y_t\}$ **Granger uzrokuje** (ili uzrokuje u smislu Grangera) $\{X_t\}$ ako je za neki $h \geq 1$

$$\mathrm{E}\left(X_{n+h} - \Pi_{\{1, X_n, X_{n-1}, \ldots, Y_n, Y_{n-1}, \ldots\}} X_{n+h}\right)^2 < \mathrm{E}\left(X_{n+h} - \Pi_{\{1, X_n, X_{n-1}, \ldots\}} X_{n+h}\right)^2. \tag{V.1.1}$$

Riječima, to bi značilo da je srednjekvadratna greška predikcije na osnovu prošlosti od $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ strogo manja od srednjekvadratne greške predikcije na osnovu samo prošlosti od $\{X_t\}$. Dakle, $\{Y_t\}$ ja informativan u predviđanju budućnosti od $\{X_t\}$. Ovdje Π označava linearnu predikciju, ali često se u definiciji koristi i uvjetno očekivanje i filtracije.

Postavlja se pitanje kako provjeriti Granger uzročnost. Pretpostavimo da su $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ dva procesa takva da je $\{[X_t, Y_t]^T\}$ stacionaran proces opisan $VAR(p)$ modelom

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(1)} & 0 \\ \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(p)} & 0 \\ \phi_{21}^{(p)} & \phi_{22}^{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-p} \\ Y_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix}.$$

Predikcija jedan korak unaprijed je

$$\Pi_n X_{n+1} = \phi_{11}^{(1)} X_n + \cdots + \phi_{11}^{(p)} X_{n+1-p}$$

što je isto kao $\Pi_{\{1, X_n, X_{n-1}, \ldots, Y_n, Y_{n-1}, \ldots\}} X_{n+1}$ pa u (V.1.1) imamo jednakost. Stoga $\{Y_t\}$ ne uzrokuje $\{X_t\}$ u smislu Grangera. Dakle, za $m = 2$ ako su matrice koeficijenata donje trokutaste, onda nema Granger uzročnosti $\{Y_t\}$ na $\{X_t\}$. Može se pokazati i obrat.

Ova činjenica može se iskoristiti za konstrukciju statističkog testa koji testira

$$H_0 : \ \phi_{12}^{(1)} = \cdots = \phi_{12}^{(p)} = 0 \ \ (\{Y_t\} \text{ ne uzrokuje } \{X_t\} \text{ u smislu Grangera})$$

što se može testirati odgovarajućim F-testom. Ostaje pitanje kako na osnovu podataka odabrati prikladan p. Može se pokazati da je test osjetljiv na izbor p.

Kada imamo više od dva procesa, Granger uzročnost nije jednostavno identificirati. Primjerice, ako je $\{\boldsymbol{X}_t\}$ $VAR(1)$ proces, $m = 3$ i

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}$$

onda je

$$\Pi_n X_{1,n+1} = \phi_{11} X_{1,n} + \phi_{12} X_{2,n}$$

pa $X_{3,n}$ nije relevantan za predikciju jedan korak unaprijed od $\{X_{1,t}\}$. Međutim, $\{X_{3,t}\}$ je vezan uz $\{X_{2,t}\}$ ako je $\phi_{23} \neq 0$, a $\{X_{2,t}\}$ je vezan uz $\{X_{1,t}\}$ ako je $\phi_{12} \neq 0$ pa će $\{X_{3,t}\}$ indirektno biti u predikciji od $\{X_{1,t}\}$ za $h \geq 2$ koraka unaprijed.

Za više varijabli uzročnost se može promatrati tako da grupiramo varijable. Primjerice, možemo promatrati uzrokuje li $\{X_{3,t}\}$ procese $\{X_{1,t}\}$ i $\{X_{2,t}\}$ zajedno. Hipoteza je u tom slučaju $\phi_{13} = \phi_{23} = 0$ (matrica je blok donje trokutasta).

Granger uzročnost ne mora nužno odgovarati *pravoj uzročnosti* zato se često koristi i pojam prediktivna uzročnost. Osim toga, smjer uzročnosti treba uzeti s oprezom. Naime, u nekim slučajevim moguće je transformacijama postići drugi smjer uzročnosti i općenito smjer ovisi o dobroj specifikaciji modela.

R **Praktikum.** Primjeri.

V.1.4 Kointegracija

Pretpostavimo da imamo podatke iz dvije nezavisne slučajne šetnje

$$X_t = X_{t-1} + U_t,$$
$$Y_t = Y_{t-1} + V_t,$$

tako da su $\{U_t\}, \{V_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$ nezavisni. Promatramo regresijski model

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t.$$

Očekivali i da porastom veličine uzorka $\widehat{\beta}_1 \to 0$ i koeficijent determinacije $R^2 \to 0$ jer su $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ nezavisni. Međutim, to nije istina. Ova pojava je poznata kao **lažna** ili **prividna korelacija** (eng. spurious correlation), a posljedica je nestacionarnosti promatranih procesa ili činjenice da korelacija ne povlači uzročnost.[1]

R **Praktikum.** Primjer.

Odgovarajući koncept za regresiju dva nestacionarna procesa je kointegracija.

Definicija V.1.3 Kažemo da su dva procesa $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ **kointegrirana** ako vrijedi
- (i) $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ nisu stacionarni, ali $\{\Delta X_t\}$ i $\{\Delta Y_t\}$ jesu,
- (ii) postoji $\beta \neq 0$ takav da je $\{Y_t - \beta X_t\}$ stacionaran proces.

Dakle, kointegrirani procesi su nestacionarni, postižu stacionarnost jednim diferenciranjem, a njihova linearna kombinacija je stacionarna (*poništavaju međusobnu nestacionarnost* ili *imaju zajednički stohastički trend*). Za kointegrirane procese postoje posebni vektorski modeli. Naime, diferenciranjem svakog niza posebno možemo ukloniti informaciju o povezanosti pa postoje modeli koji direktno uzimaju nestacionarne procese.

■ **Primjer V.1.3** Neka je $S_t = S_{t-1} + Z_t$, $\{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$, slučajna šetnja i

$$\begin{aligned} X_t &= S_t + U_t, \\ Y_t &= S_t + V_t, \end{aligned}$$

gdje su $\{U_t\}$ i $\{V_t\}$ nezavisni bijeli šumovi. Tada vrijedi (i) iz Definicije V.1.3 i

$$Y_t - X_t = V_t - U_t$$

je stacionaran pa vrijedi i (ii) uz $\beta = 1$.

R **Praktikum.** Primjer i kointegracijski testovi.

Zadatak V.1.6 Neka je $\{X_t\}$ kauzalan $AR(2)$ proces

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t,$$

$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ i

$$Y_t = X_{t-1}.$$

- (a) Prikažite dvodimenzionalni proces $\{(X_t, Y_t)^T\}$ kao odgovarajući VAR proces. Je li $\{(X_t, Y_t)^T\}$ stacionaran i kauzalan? Jesu li $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ stacionarni procesi? Obrazložite odgovore.
- (b) Izrazite funkciju kros-kovarijanci procesa $\{(X_t, Y_t)^T\}$ u terminima funkcije autokovarijanci γ_X procesa $\{X_t\}$.
- (c) Pretpostavimo sada da je u prethodnom $\phi_1 = -1$ i $\phi_2 = 2$. Jesu li procesi $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ kointegrirani?

[1] Brojni apsurdni primjeri mogu se vidjeti na `http://tylervigen.com/spurious-correlations`

V.2. Modeli uvjetne heteroskedastičnosti

Ovakvi modeli posebno su važni za financijske podatke, posebno za log-povrate neke financijske imovine koje kroz vrijeme pokazuju promjenjivu volatilnost. Za početak ćemo zato razmotriti neke tipične karakteristike log-povrata na neku financijsku imovinu.

V.2.1 Tipična svojstva log-povrata financijskih vremenskih nizova

Već smo objasnili prednosti log-povrata nad samim nizom i običnim povratima. Za log-povrate financijskih podataka karakteristična su sljedeća *tipična svojstva* (eng. stylized facts):

- gotovo da ne postoji korelacija (bijeli šum),
- kvadrati ili apsolutne vrijednosti log-povrata pokazuju koreliranost,
- volatilnost se mijenja u vremenu (pod volatilnošću mislimo općenito na stupanj varijacije niza u vremenu, no to ne znači nužno da se i varijanca mijenja i model i dalje može biti stacionaran),
- prijelazi visokih razina događaju se u klasterima (eng. volatility clustering),
- distribucija log-povrata je asimetrična i to negativno (eng. negatively skewed), odnosno masa je koncentrirana desno od nule, ali lijevi rep je *dulji* (padovi su veći od rasta),
- imaju teške repove.

R **Praktikum.** Primjer.

Posljednje svojstvo treba detaljnije objasniti.

Definicija V.2.1 Kažemo da distribucija slučajne varijable X ima **teške repove** (eng. heavy tails) s **repnim indeksom** $\alpha > 0$ ako je

$$P(|X| > x) = L(x)x^{-\alpha},$$

gdje je L **sporo varirajuća funkcija**, odnosno funkcija sa svojstvom $L(tx)/L(t) \to 1$ kad $t \to \infty$ za sve $x > 0$.

Primjeri sporo varirajućih funkcija su $L(x) = c$, $L(x) = \log x$ i svaka funkcija takva da je $\lim_{x\to\infty} L(x) = c \neq 0$.

Rep distribucije s teškim repom opada u beskonačnosti približno kao opća potencija. To možemo usporediti sa $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ za koju $P(|Z| > x)$ opada kao $e^{-x^2/2}$ kad $x \to \infty$. Dakle, za distribucije s teškim repovima vjerojatnosti ekstremnih vrijednosti opadaju u nulu sporo kao opća potencija. Stoga su realizacije ekstremnih vrijednosti vjerojatnije u odnosu na uobičajene distribucije kao što je primjerice normalna. Takvu stvar je ključno uzeti u obzir u modeliranju (*crni labud*).

Posebno, za distribucije s teškim repovima vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\,|X|^q < \infty \text{ za } q < \alpha, \\ &\mathrm{E}\,|X|^q = \infty \text{ za } q > \alpha. \end{aligned}$$

Tipično je za log-povrate α u intervalu $(3,5)$. Procjena repnog indeksa je općenito težak problem. Distribucije teškim repovima imaju brojne primjene u financijama, aktuarstvu, hidrologiji, ...

■ **Primjer V.2.1** **Pareto distribucija** s parametrima $\alpha > 0$ i $x_m > 0$ ima funkciju distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha, & x \geq x_m, \\ 0, & x < x_m, \end{cases}$$

i težak rep s indeksom α.

■ **Primjer V.2.2** Studentova distribucije s $\nu > 0$ stupnjeva slobode ima gustoću

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) n}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ima teške repove s indeksom $\alpha = \nu$.

■ **Primjer V.2.3** Slučajna varijabla X ima **stabilnu distribuciju** s parametrima $\alpha \in (0,2]$, $\sigma > 0$, $\beta \in [-1,1]$ i $\mu \in \mathbb{R}$ ako je

$$\mathrm{E}\left[e^{itX}\right] = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta\,\mathrm{sign}(t)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) + i\mu t\right\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{-\sigma|t|\left(1 + i\beta\,\mathrm{sign}(t)\log|t|\right) + i\mu t\right\}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Funkcije gustoće i distribucije ne mogu se eksplicitno izraziti osim u nekim specijalnim slučajevima. Za $\alpha < 2$, stabilne distribucije imaju teške repove s indeksom α. Uočimo da je za $\alpha = 2$ to $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ distribucija. Ova klasa distribucija posebno je zanimljiva iz sljedećih razloga:

- X ima stabilnu distribuciju ako i samo ako za sve $n \geq 2$ postoje $C_n > 0$ i $D_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

  $$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n,$$

  gdje su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane kao X. Primjerice, za $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ je

  $$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2) \stackrel{d}{=} \sqrt{n}X + \mu n - \mu\sqrt{n}.$$

- Vrijedi sljedeći granični teorem: ako su (X_n) n.j.d. s teškim repovima s indeksom $\alpha < 2$, onda postoje nizovi (a_n) i (b_n) takvi da vrijedi

  $$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y_\alpha,$$

  gdje je Y_α stabilna s indeksom α. Za uobičajeni centralni granični teorem je $a_n = \sqrt{n} = n^{1/2}$ i $b_N = n\mathrm{E}X_1$, dok je ovdje općenito $a_n = n^{1/\alpha}L(n)$ za neku sporo varirajuću funkciju L.

U kontekstu financijskih vremenskih nizova, tražimo model na osnovu cijena $P_0, P_1, \ldots, P_T$. Primjerice, Black-Scholes(-Merton) model je $P_t = P_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$, gdje je $\{B_t\}$ Brownovo gibanje. Radi se o modelu u neprekidnom vremenu. Log-povrati su n.j.d. Gaussovski i nemaju gotovo ništa od tipičnih karakteristika koje smo naveli (osim nekoreliranosti). U tom smislu takav model nije zadovoljavajući.

V.2.2 $ARCH(1)$ proces

$ARCH(1)$ proces bit će stacionaran model u diskretnom vremenu koji pokriva veliku većinu tipičnih karakteristika financijskih log-povrata. Razvijen je 1982. godine u radu Roberta Englea koji je za to 2003. godine dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju.

Definicija V.2.2 Proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **autoregresivni uvjetno heteroskedastični proces** reda 1 ako zadovoljava jednadžbu

$$X_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}\,\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{V.2.1}$$

gdje je $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \in (0,1)$ i $\{\varepsilon_t\} \sim IID(0,1)$ takav da je ε_t nezavisna od X_{t-1} za svaki $t \in \mathbb{Z}$ (pa onda i od X_{t-h} za $h \geq 1$). Pišemo $\{X_t\} \sim ARCH(1)$. Niz $\{\varepsilon_t\}$ nazivamo **niz inovacija**.

Uobičajeno pretpostavljamo da je $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$, ali često se koristi i Studentova distribucija.

Teorem V.2.1 Jednadžba (V.2.1) ima jedinstveno strogo stacionarno rješenje takvo da je $\mathrm{E}X_t^2 < \infty$.

Skica dokaza može se vidjeti u [2]. Za $ARCH(1)$ proces vrijede sljedeća svojstva:

(i) očekivanje je

$$\mathrm{E}X_t = \mathrm{E}\left[\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}\right]\mathrm{E}[\varepsilon_t] = 0,$$

(ii) ACVF za $h > 0$ je

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X_t X_{t+h} &= \mathrm{E}\left[\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}\,\varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t+h-1}^2}\,\varepsilon_{t+h}\right] \\ &= \mathrm{E}[\varepsilon_{t+h}]\,\mathrm{E}\left[\varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t+h-1}^2}\right] = 0,\end{aligned}$$

(iii) varijanca je

$$\operatorname{Var} X_t = \mathrm{E}\varepsilon_t^2\,\mathrm{E}\left[\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2\right] = \alpha_0 + \alpha_1\,\mathrm{E}X_{t-1}^2$$

i čega slijedi zbog stacionarnosti da je $\operatorname{Var} X_t = \alpha_0/(1-\alpha_1)$.

Iz prethodnog zaključujemo da je $ARCH(1)$ proces bijeli šum i to strogo stacionaran, ali daleko od IID šuma.

$ARCH(1)$ proces ima svojstvo **uvjetne heteroskedastičnosti** – uvjetna varijanca procesa uvjetno na prošlost se mijenja u vremenu. To nije u kontradikciji sa stacionarnošću, (bezuvjetna) varijanca procesa je zaista konstantna.

Uvjetna varijanca slučajne varijable X uvjetno na Y je

$$\operatorname{Var}(X \mid Y) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X \mid Y])^2 \mid Y\right].$$

Za $ARCH(1)$ proces vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right] &= \mathrm{E}\left[\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}\,\varepsilon_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right] \\
&= \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}\,\mathrm{E}\left[\varepsilon_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right] \\
&= \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}\,\mathrm{E}\left[\varepsilon_t\right] = 0, \\
\mathrm{Var}\left(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right) &= \mathrm{E}\left[X_t^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right] \\
&= (\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)\,\mathrm{E}\left[\varepsilon_t^2\right] \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2.
\end{aligned}$$

Dakle, uvjetna varijanca se mijenja u vremenu. Velika volatilnost u prošlosti (X_{t-1}^2), daje veliku volatilnost u budućnosti i to rezultira klasteriranjem volatilnosti. Takvo svojstvo odstupa od ARMA procesa. Primjerice, za kauzalan $AR(1)$ proces $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, $\{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$, imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right] &= \phi X_{t-1} + \mathrm{E}\left[Z_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right] = \phi X_{t-1}, \\
\mathrm{Var}\left(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right) &= \mathrm{E}\left[(X_t - \phi X_{t-1})^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right] = \mathrm{E}\left[Z_t^2 \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\right] \\
&= \mathrm{E}\,Z_t^2 = \sigma^2,
\end{aligned}$$

pa je uvjetna varijanca konstantna.

Ako niz inovacija ima normalnu distribuciju, $\{X_t\}$ nema, štoviše, vrijedi sljedeće pomalo nevjerojatno svojstvo.

Teorem V.2.2 Neka je $\{X_t\}$ $ARCH(1)$ proces takav da $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Tada $\{X_t\}$ ima distribuciju s teškim repovima s indeksom 2κ, gdje je κ rješenje jednadžbe

$$\frac{(2\alpha_1)^u}{\sqrt{\pi}}\Gamma(u + 1/2) = 1, \quad u \geq 0.$$

Iako svi *sastojci* u $ARCH(1)$ procesu imaju konačne momente, rezultirajući proces ima teške repove. Dokaz se može vidjeti primjerice u [3].

V.2.3 Generalizacije $ARCH(1)$ procesa

Definicija V.2.3 Proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **autoregresivni uvjetno heteroskedastični proces** reda p ako zadovoljava jednadžbu

$$\begin{aligned}
X_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p X_{t-p}^2, \quad t \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

gdje je $\alpha_j \geq 0$, $\{\varepsilon_t\} \sim IID(0,1)$ i ε_t nezavisna od X_{t-j}, $j \geq 1$, za svaki $t \in \mathbb{Z}$. Pišemo $\{X_t\} \sim ARCH(p)$.

Kako je $\{X_t\}$ bijeli šum, u $ARCH(p)$ modelu **proces volatilnosti** $\{\sigma_t^2\}$ sliči $MA(p)$ procesu (može se tako zapisati).

Definicija V.2.4 Proces $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je **generalizirani ARCH proces** reda (p,q) ako zadovoljava jednadžbu

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p X_{t-p}^2, \quad t \in \mathbb{Z},$$

uz oznake kao kod ARCH procesa. Pišemo $\{X_t\} \sim GARCH(p,q)$.

Potrebna su ograničenja na koeficijente kako bi σ_t^2 bio pozitivan. Može se pokazati da postoji strogo stacionarno rješenje konačne varijance ako i samo ako $\sum_{j=1}^p \alpha_j + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$. $GARCH(p,q)$ je također bijeli šum i ima teške repove.

Uočimo da kod GARCH procesa velika volatilnost može doći od velikih apsolutnih povrata, ali i velike volatilnosti u prethodnom periodu.

R **Praktikum.** Primjeri.

V.2.4 Predviđanje i VaR

Radi jednostavnosti promotrimo posebno $\{X_t\} \sim GARCH(1,1)$ proces

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 X_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Označit ćemo s $\overline{\Pi}_n$ najbolju predikciju na osnovu beskonačne prošlosti $X_n, X_{n-1}, \ldots$, odnosno

$$\overline{\Pi}_n X = \mathrm{E}[X \mid X_n, X_{n-1}, \ldots].$$

Za $h \geq 1$ imamo

$$\overline{\Pi}_n X_{n+h} = \mathrm{E}[\sigma_{n+h}\varepsilon_{n+h} \mid X_n, X_{n-1}, \ldots] = \mathrm{E}[\sigma_{n+h} \mid X_n, X_{n-1}, \ldots]\,\mathrm{E}[\varepsilon_{n+h}] = 0,$$

pa će predikcija jednostavno biti 0 (ili konstantno očekivanje ako je različito od 0).

Za pouzdani interval predikcije koristimo predikcije procesa volatilnosti σ_t^2. Za $h = 1$

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_n \sigma_{n+1}^2 &= \alpha_0 + \beta_1 \,\mathrm{E}\left[\sigma_n^2 \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right] + \alpha_1 \,\mathrm{E}\left[X_n^2 \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right] \\ &= \alpha_0 + \beta_1 \sigma_n^2 + \alpha_1 X_n^2.\end{aligned}$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned}\sigma_{t+1}^2 &= \alpha_0 + \beta_1 \sigma_t^2 + \alpha_1 X_t^2 \\ &= \alpha_0 + \beta_1 \sigma_t^2 + \alpha_1 \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 \pm \alpha_1 \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_t^2 + \alpha_1 \sigma_t^2 (\varepsilon_t^2 - 1)\end{aligned}$$

a za $t = n+1$

$$\sigma_{n+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{n+1}^2 + \alpha_1 \sigma_{n+1}^2 (\varepsilon_{n+1}^2 - 1),$$

pa slijedi

$$\overline{\Pi}_n \sigma_{n+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)\sigma_{n+1}^2.$$

Općenito,

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_n \sigma^2_{n+h} &= \alpha_0 + (\alpha_1+\beta_1)\overline{\Pi}_n \sigma^2_{n+h-1} \\
&= \alpha_0 \sum_{j=0}^{h-2} (\alpha_1+\beta_1)^j + (\alpha_1+\beta_1)^{h-1}\sigma_n^2 \\
&= \frac{\alpha_0(1-(\alpha_1+\beta_1)^{h-1})}{1-\alpha_1-\beta_1} + (\alpha_1+\beta_1)^{h-1}\sigma_n^2 \\
&= \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1} + (\alpha_1+\beta_1)^{h-1}\left(\sigma_n^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}\right),
\end{aligned}$$

pa predikcija konvergira u $\alpha_0/(1-\alpha_1-\beta_1)$ kad $h\to\infty$ što je (bezuvjetna) varijanca procesa. Predikcija volatilnosti pada ili raste ovisno o predznaku drugog člana.

Nekoliko puta naglasili smo da cilj modeliranja nije samo predikcija nego upravljanje rizikom na osnovu modela. U tom smislu promotrit ćemo **value at risk** (**VaR**) ili rizičnu vrijednost – maksimalni gubitak (u apsolutnoj vrijednosti ili postotku) koji se može dogoditi s vjerojatnošću α u razdoblju trajanja h. Primjerice, ako je $\alpha = 0.05$, $h = 1$ i $\text{VaR} = 100$, to znači da postoji vjerojatnost 0.05 da u jedan dan vrijednost padne više od 100.

Dakle, radi se o α-kvantilu povrata u periodu n do $n+h$ na osnovu poznatih $X_n, X_{n-1}, \dots$, odnosno

$$\text{VaR}^{\alpha}_{n,n+h} = \inf\left\{x\in\mathbb{R} : P\left(\overline{X}_{n+h} \le x \mid X_n, X_{n-1},\dots\right) \ge \alpha\right\},$$

gdje je $\overline{X}_{n+h}$ log-povrat od n do $n+h$, a to je

$$\overline{X}_{n+h} = \log\frac{P_{n+h}}{P_n} = \log\frac{P_{n+h}}{P_{n+h-1}} + \dots + \log\frac{P_{n+1}}{P_n} = \sum_{i=1}^{h} X_{n+i}.$$

Za $GARCH(1,1)$ proces i korak $h=1$ imamo $\overline{X}_{n+1} = X_{n+1} = \sigma_{n+1}\varepsilon_{n+1}$. Uvjetno na prošlost, X_{n+1} ima normalnu distribuciju s očekivanjem 0 i varijancom σ^2_{n+1} koju dobijemo predikcijom $\overline{\Pi}_n\sigma^2_{n+1}$. Stoga, $\text{VaR}^{\alpha}_{n,n+1}$ računamo kao α-kvantil normalne distribucije s očekivanjem 0 i varijancom $\overline{\Pi}_n\sigma^2_{n+1}$.

R **Praktikum.** Primjer.

Zadatak V.2.1 Pokažite da $GARCH(1,1)$ ima svojstvo uvjetne heteroskedastičnosti. Pokažite da kauzalan i invertibilan $ARMA(1,1)$ proces nema to svojstvo. ■

Zadatak V.2.2 Neka je $\{X_t\}$ strogo stacionaran proces definiran s

$$\begin{aligned}
X_t &= \sigma_t\varepsilon_t, \\
\sigma_t^2 &= 1 + \frac{X_{t-1}^2}{\sigma_{t-1}^2},
\end{aligned}$$

gdje je $\{\varepsilon_t\} \sim IID(0,1)$ i ε_t nezavisna od X_{t-j} za $j\ge 1$ i nezavisna od σ_t.

(a) Izračunajte

$$\text{Var}\left(X_{n+1} \mid X_n, X_{n-1},\dots\right).$$

Ima li $\{X_t\}$ svojstvo uvjetne heteroskedastičnosti?

(b) Izračunajte

$$\mathrm{Var}\left(X_{n+2} \mid X_n, X_{n-1}, \ldots\right).$$

Koristeći dobiveni rezultat, odgovorite: ako je $\{X_t\}$ model za dnevne log-povrate financijske imovine, hoće li veliki pad (ili rast) danas imati efekta na volatilnost za dva dana?

(c) Riješite (b) dio za $\{X_t\}$ $ARCH(1)$ proces. Usporedite i komentirajte.

V.3. Modeli u osiguranju

Osiguravajuća društva moraju planirati svoje poslovanje tako da u svakom trenutku imaju dovoljno sredstava za isplatu dospjelih šteta. Iznose šteta u vrijeme njihova nastanka nemoguće je predvidjeti sa sigurnošću. Stoga je i višak (kapital) osiguravatelja slučajan proces. U nastavku pretpostavljamo da promatramo portfelj polica sličnog rizika. Modeli će biti u neprekidnom vremenu.

V.3.1 Cramér-Lundbergov model

Kapital osiguravatelja kreće od nekog početnog kapitala $x \geq 0$. Prihodi dolaze od prikupljanja premija na osnovu prodanih polica, a rashodi od isplate dospjelih šteta.

Lundberg (1903) i Cramér tridesetak godina kasnije uvode sljedeće pretpostavke:

(i) **premije** su determinističke i dolaze po konstantnoj stopi $c > 0$ (ukupne premije u intervalu $[0,t]$ su ct),

(ii) **štete** (zahtjevi za isplatu) dolaze u vremenima $0 < T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ koja su slučajne varijable – **dolazna vremena**,

(iii) šteta u trenutku T_i ima iznos ξ_i i $\{\xi_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ su n.j.d. nenegativne (homogenost),

(iv) nizovi $\{T_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ i $\{\xi_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ su nezavisni,

(v) **brojeći proces šteta**

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}} = |\{i \in \mathbb{N} : T_i \leq t\}|, \quad t \geq 0,$$

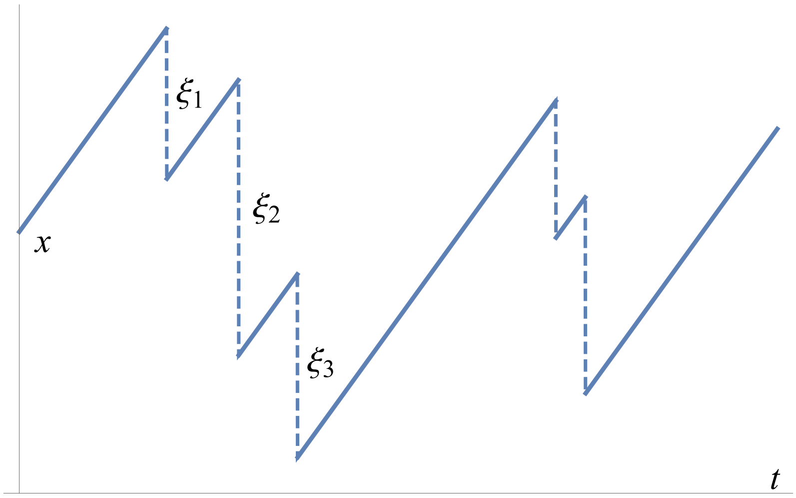
(broj šteta do trenutka t) je Poissonov proces s parametrom λ.

Poissonov proces s parametrom $\lambda > 0$ je proces $\{N_t, t \geq 0\}$ sa stacionarnim nezavisnim prirastima, $P(N_0 = 0) = 1$ i $N_t \sim \mathscr{P}(\lambda t)$. Prisjetimo se, za slučajan proces $\{X_t, t \geq 0\}$ kažemo da ima stacionarne priraste ako je $X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}$ za sve $h > 0$ i $s \leq t$. Kažemo da ima nezavisne priraste ako je za sve $s \leq t$, $X_t - X_s$ nezavisna od $\{X_u,\, u \leq s\}$. Procese sa stacionarnim i nezavisnim prirastima nazivamo **Lévyjevi procesi** (uz još neke uvjete regularnosti, konkretno stohastička neprekidnost u nuli). Poznato je da je $\{N_t\}$ Poissonov proces ako i samo ako su $W_i = T_i - T_{i-1}$ n.j.d. s eksponencijalnom distribucijom s parametrom λ. Uz uvedene oznake imamo sljedeću definiciju.

Definicija V.3.1 Cramér-Lundbergov proces rizika je proces $\{X_t, t \geq 0\}$ zadan s

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i.$$

Uočimo da se radi o driftu i složenom Poissonovo procesu što je opet Lévyjev proces. Distribucija šteta nije specificirana već se može odabrati ovisno o podacima. Ovdje važnu ulogu imaju distribucije s teškim repovima (primjerice Paretova) jer su iznosi šteta uglavnom tako distribuirani. U upravlajnju rizikom ekstremni događaji su posebno važni – *Paretov princip* – 20% šteta uzrokuje 80% ukupnih isplata. Primjerice, pogledamo li 30 najvećih prirodnih katastrofa po broju žrtava od 1970. do 1995. godine, uragan u Bangladešu 1970. i potres u Kini 1976. godine odnijeli su više života nego preostalih 28 katastrofa zajedno.



Slika V.3.1: Primjer trajektorije Cramér-Lundbergovog procesa

Za $a \in \mathbb{R}$ definiramo

$$\tau_a^+ = \inf\{t \geq 0 : X_t > a\},$$
$$\tau_a^- = \inf\{t \geq 0 : X_t < a\},$$

prvo vrijeme prijelaza iznad i ispod razine a, redom. **Vrijeme propasti** je onda τ_0^-. Ključno pitanje u teoriji rizika u osiguranju je izračunati

$$\Psi(x) = P_x(\tau_0^- < \infty),$$

vjerojatnost propasti za proces koji kreće iz x. $\Psi(x)$ je općenito vrlo teško izračunati. Eksplicitna rješenja poznata su samo za neke izbore distribucija šteta.

Općenito, ako je $\mathrm{E}_0 X_1 = c - \lambda\,\mathrm{E}\,\xi_1 < 0$, onda $X_t \to -\infty$ g.s. kad $t \to \infty$ i $\Psi(x) = 1$ za sve $x > 0$ (sigurna propast). Stoga, vjerojatnost preživljavanja $1 - \Psi(x)$ može biti pozitivna samo ako vrijedi **uvjet neto profita**

$$c - \lambda\,\mathrm{E}\,\xi_1 > 0.$$

■ **Primjer V.3.1** Ako ξ_1 ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom ρ i ako je $\mathrm{E}_0 X_1 = c - \lambda/\rho > 0$, onda je

$$\Psi(x) = \frac{\lambda}{c\rho} e^{-(\rho - \frac{\lambda}{c})x}, \quad x > 0.$$

Može se pokazati da ako vrijedi uvjet neto profita, onda $\Psi(x) = 1 - \mathrm{E}_0 X_1 W(x)$, gdje je W tzv. funkcija skale – funkcija za koju vrijedi

$$\int_0^\infty W(x)e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\kappa(\lambda)}, \quad \lambda > 0,$$

gdje je $\kappa(\lambda) = \log E\left[e^{\lambda X_1}\right]$ karakteristični eksponent.

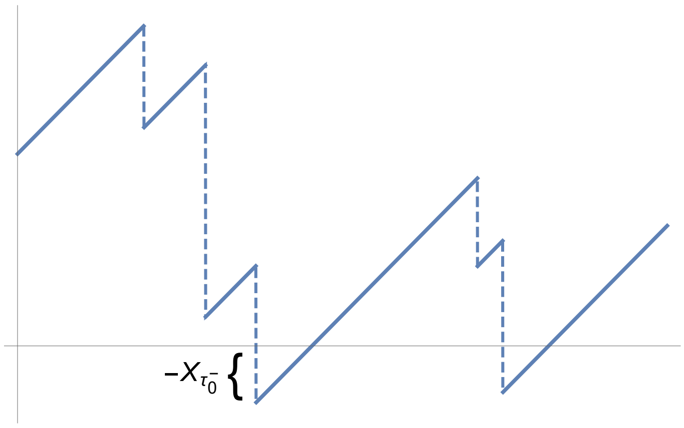
Na osnovu $\Psi(x)$ možemo odrediti x (ili možda c) tako da držimo vjerojatnost propasti ispod neke razine, primjerice 0.01.

Označimo

$$\underline{X}_t = \inf_{0\le s\le t} X_s,$$
$$\overline{X}_t = \sup_{0\le s\le t} X_s.$$

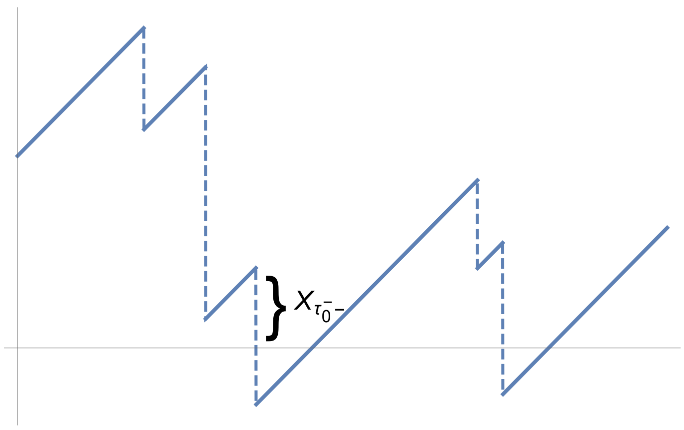
Osim vjerojatnosti propasti, u upravljanju rizikom važne su i distribucije nekih drugih veličina vezanih uz propast:

- $-X_{\tau_0^-}$ – deficit u propasti



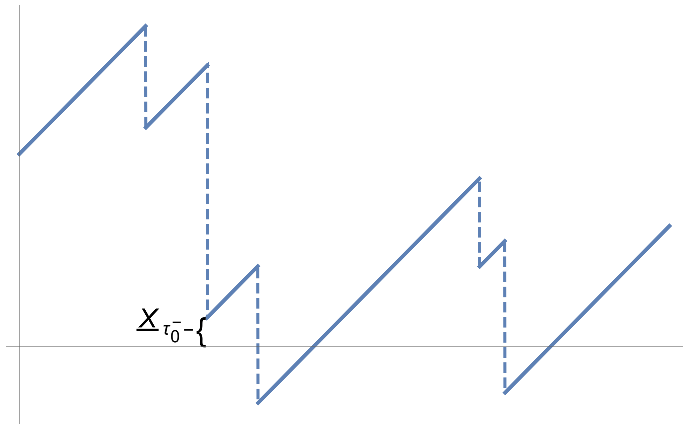
Slika V.3.2: Deficit u propasti

- $X_{\tau_0^- -}$ – kapital neposredno prije propasti

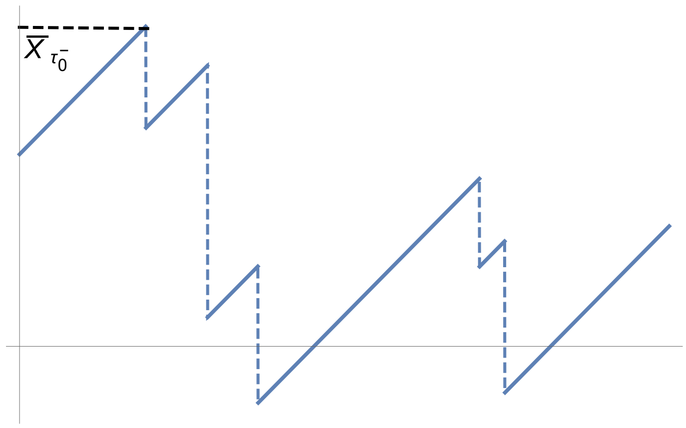


Slika V.3.3: Kapital neposredno prije propasti

- $\underline{X}_{\tau_0^- -}$ – minimum prije propasti

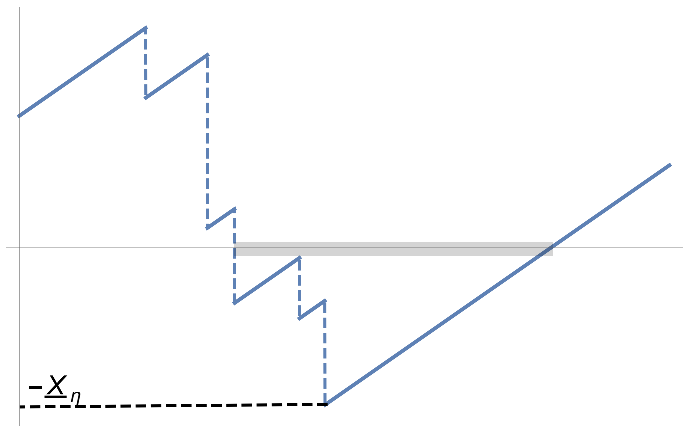


Slika V.3.4: Minimum prije propasti



Slika V.3.5: Maksimum prije propasti

- $\overline{X}_{\tau_0^-}$ – maksimum prije propasti
- $\underline{X}_\eta$ je maksimalna ozbiljnost propasti – minimum od X_t na intervalu $[\tau_0^-, \eta]$ gdje je η vrijeme oporavka $\eta = \inf\{t > \tau_0^- : X_t \geq 0\}$



Slika V.3.6: Maksimalna ozbiljnost propasti

V.3.2 Poopćenja i drugi problemi

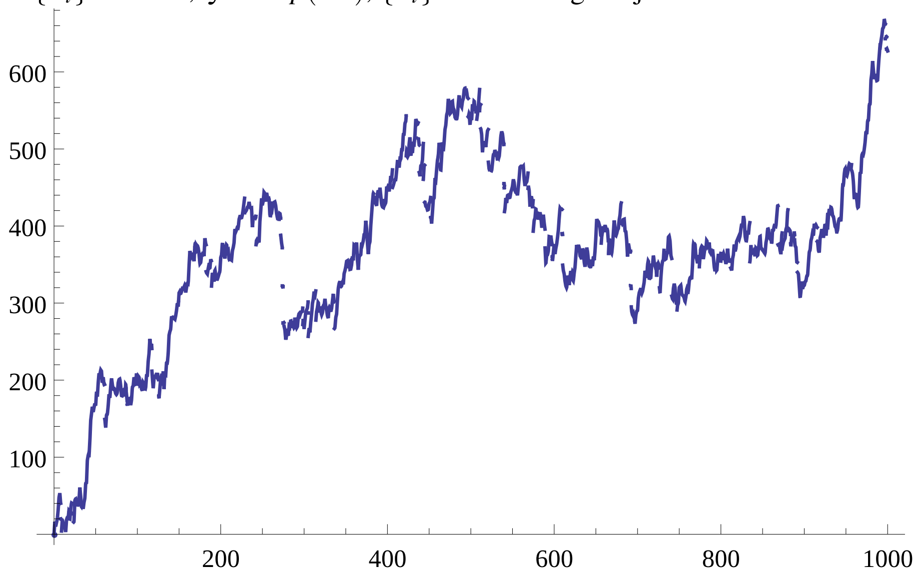
Jedno poopćenje Cramér-Lundbergovog modela je zamijeniti $\{N_t\}$ s nekim procesom obnavljanja – brojeći proces za koji $W_i = T_i - T_{i-1}$ mogu imati neku drugu distribuciju osim eksponencijalne. Ovakav model poznat je kao Sparre-Andersenov model i model više nije Lévyjev proces što otežava situaciju.

Drugo poopćenje je dodati šum u Cramér-Lundbergov proces. **Perturbirani Cramér-Lundbergov proces** je zadan s

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i + \sigma B_t,$$

gdje je $\sigma > 0$ i $\{B_t\}$ Brownovo gibanje. Ovaj model spada u klasu spektralno negativnih Lévyjevih procesa (Lévyjevih procesa koji mogu imati samo skokove prema dolje) za koje se mogu izvesti relativno eksplicitni rezultati.

Slika V.3.7: Perturbirani Cramér-Lundbergov proces: $X_t = ct + \sigma B_t - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$ s parametrima: $c = 3$, intezitet od $\{N_t\}$ $\lambda = 0.2$, $\xi \sim Exp(0.1)$, $\{B_t\}$ Brownovo gibanje i $\sigma = 10$



Jedna nerealnost vezana uz prethodne modele jest što $X_t \to \infty$ ako je $\mathrm{E}_0 X_1 > 0$. Za očekivati je da se kapital ne akumulira unedogled već da se isplaćuje kao dividenda. Jedna moguća strategija isplate dividendi jest isplaćivati sav kapital iznad neke fiksne razine b (barijera) – barijerna strategija.

Označimo neka je

$$D_t = \left(\overline{X}_t - b\right)_+ = \max\left\{\overline{X}_t - b, 0\right\}$$

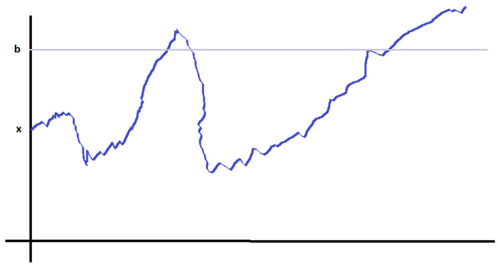
akumulirani iznos prijelaza iznad b (dividenda isplaćena do trenutka t).

Sada možemo definirati **proces reflektiran** u b kao $X_t^{b]} = X_t - D_t$.

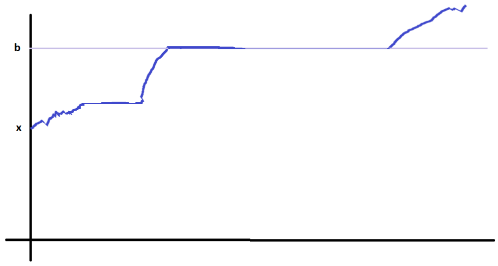
D_t predstavlja akumulirane dividende do trenutka t. Jedno od zanimljivih pitanja jest kako odabrati razinu b? Primjerice, to možemo napraviti tako da maksimiziramo po b očekivanu diskontiranu dividendu do trenutka propasti

$$\mathrm{E}_x^{b]}\left[\int_0^{\tau_0^-} e^{-\delta s} dD_s\right].$$

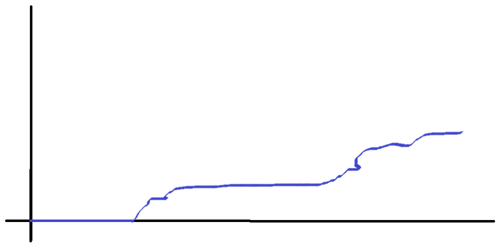
Slika V.3.8: X_t



Slika V.3.9: $\overline{X}_t$



Slika V.3.10: D_t



Ako nema diskontiranja to je jednostavno

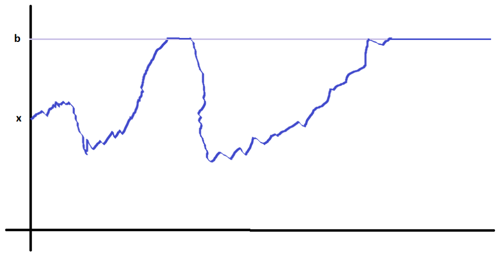
$$\mathrm{E}_x^{b]}\left[D_{\tau_0^-}\right].$$

Ovdje $\mathrm{E}_x^{b]}$ označava očekivanje u odnosu na proces reflektiran u b.

Nadalje, ako kapital završi ispod nule, ne mora nužno doći do propasti, moguće je spasiti kompaniju injekcijama kapitala – *bailout*. Ako je

$$B_t = (-\underline{X}_t)_+$$

Slika V.3.11: $X_t^{b]}$



ukupna količina kapitala injektirana do trenutka t, onda je proces reflektiran u 0 zadan s $X_t^{[0} = X_t + B_t$.

Moguće je uvesti i dvostruko reflektirani proces $X_t^{[0,b]}$, uvesti oporezivanje dividendi i sl.

Literatura

[1] Peter J Brockwell i Richard A Davis. *Time series: theory and methods*. Springer Science & Business Media, 1991. (citirano na stranicama 22, 28, 33, 41).

[2] Peter J Brockwell, Richard A Davis i RJ Davis. *Introduction to Time Series and Forecasting*. Sv. 1. Taylor & Francis, 2002. (citirano na stranici 125).

[3] Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg i Thomas Mikosch. *Modelling extremal events: for insurance and finance*. Sv. 33. Springer Science & Business Media, 1997. (citirano na stranici 126).