

ANALIZA VREMENSKIH NIZOVA

PRVI KOLOKVIJ

ZADATAK 1: [10 bodova]

Definirajte stacionaran proces, funkciju autokovarijanci stacionarnog procesa te navedite i dokažite osnovna svojstva. Može li funkcija

$$\gamma(h) = \begin{cases} 1, & h = 0, \\ 2, & |h| = 1, \\ 0, & |h| \geq 2, \end{cases}$$

biti funkcija autokovarijanci nekog stacionarnog procesa? Ako da, o kakvom procesu se radi?

ZADATAK 2: [10 bodova]

Neka je zadan proces

$$X_t = Z_t + \alpha Z_{t-1} Z_{t-2},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Provjerite je li $\{X_t\}$ stacionaran proces i odredite funkcije autokovarijanci i autokorelacija. Jesu li X_t i X_{t-1} nezavisne?

ZADATAK 3: [6+15+4=25 bodova]

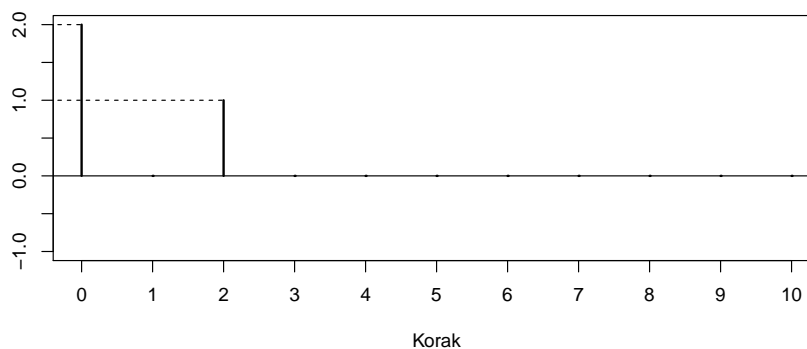
Definirajte linearan proces i izvedite izraz za funkciju autokovarijanci linearnog procesa. Je li proces

$$X_t = X_{t-1} - \frac{3}{16} X_{t-2} + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

stacionaran? Ako da, odredite reprezentaciju u obliku linearnog procesa. Kako bi mogli reprezentirati proces $\{Z_t\}$ u obliku $AR(\infty)$ procesa?

ZADATAK 4: [10 bodova]

Odredite stacionaran proces s očekivanjem 0 čija funkcija autokovarijanci izgleda kao na Slici 1. Argumentirajte. Što možete reći o jedinstvenosti takvog procesa?



ZADATAK 5: [20 bodova]

Pojava koju promatramo ponaša se kao kauzalan $AR(1)$ proces $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$, $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma_Z^2)$. Međutim, pojavu ne opažamo direktno nego uz dodatni šum $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma_W^2)$. Stoga, model možemo postaviti u obliku

$$Y_t = X_t + W_t.$$

Je li takav model stacionaran? Odredite funkciju autokovarijanci. Zatim odredite funkciju autokovarijanci procesa $U_t = Y_t - \phi Y_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$ te na osnovu toga zaključite kakav je proces $\{Y_t\}$.

ZADATAK 6: [15 bodova]

Neka je zadan proces

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + Y_t,$$

gdje su $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ i $\{Y_t\}$ $ARMA(p, q)$ proces s funkcijom autokovarijanci γ_Y . Kakav proces je $\{\Delta Y_t\}$? Pretpostavimo sada da je $p = 0$ i $q = 1$. Usporedite varijancu procesa $\{\Delta Y_t\}$ s varijancom procesa $\{Y_t\}$. Na osnovu toga zaključite koju transformaciju je bolje primijeniti na $\{X_t\}$ kako bi se dobio stacionaran proces.

ZADATAK 7: [10 bodova]

Neka je x_1, \dots, x_n uzorak generiran iz $IID(0, \sigma^2)$ šuma. Koliki n treba uzeti ako želimo da procijenjeni 95%-tni pouzdani interval za autokorelacijsku funkciju na koraku 1 bude uži od 0.2? Vrijedi li isto i za procjenu autokorelacijske funkcije na koraku 2?