ANALIZA VREMENSKIH NIZOVA

Prvi kolokvij 2018./2019.

Zadatak 1: [3+5+17=25 bodova]
Neka je $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$ proces zadan s

$$X_0 = Y,$$
$$X_t = 0.5X_{t-1} + Z_t,\ t \in \mathbb{N},$$

gdje je $\{Z_t,\, t \in \mathbb{N}\} \sim IID(0,1)$ Gaussovski šum i Y slučajna varijabla nezavisna od $\{Z_t\}$.

(a) Pokažite da je

$$X_t = 0.5^t X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} 0.5^j Z_{t-j}, \quad t \in \mathbb{N}.$$

(b) Ako Y ima uniformnu distribuciju na $(0,1)$, $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$, pokažite da $\{X_t\}$ nije stacionaran.

(c) Neka je $Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Odredite σ^2 tako da $\{X_t\}$ bude stacionaran. Koji ARMA proces ima funkciju autokorelacija kao $\{X_t\}$?

Zadatak 2: [10+15=25 bodova]
Neka je X_t razina vode u nekom spremniku u mjesecu t. Svaki mjesec 20% vode iz prethodnog mjeseca se potroši. Očekivana količina vode koja će u spremnik ući kišom tijekom svakog mjeseca je 100 uz grešku (šum) koja ima varijancu 10 i nezavisna je iz mjeseca u mjesec.

(a) Definirajte proces kojim možemo modelirati razinu vode u spremniku po mjesecima. Je li taj proces stacionaran? Kako izgleda njegova funkcija autokorelacija? Odredite očekivanje tog procesa.

(b) Pretpostavimo sada da razinu vode ne opažamo direktno već uz nekakav šum $\{W_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$ nezavisan od šuma koji dolazi od punjenja spremnika kišom. Tako je model zapravo

$$Y_t = X_t + W_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Odredite funkcija autokovarijanci procesa

$$V_t = Y_t - 0.8Y_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Zaključite kakav je proces $\{V_t\}$. Koristeći odgovor pod (a) zaključite kakav je proces $\{Y_t\}$.

Zadatak 3: [15 bodova]
Zadan je proces $\{X_t\}$

$$X_t = 2.5X_{t-1} - X_{t-2} + Z_t - 2Z_{t-1} + 0.75Z_{t-2},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$. Odredite o kojem ARMA, odnosno ARIMA procesu se radi. Definirajte kauzalnost i invertibilnost ARMA procesa. Je li $\{X_t\}$, odnosno njegov ARMA dio, kauzalan i invertibilan?

ZADATAK 4: [10+10=20 bodova]
Zadan je proces $\{X_t\}$

$$X_t = U_t W_t + (1 - U_t) W_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

gdje je $\{W_t\} \sim WN(0,1)$ i $\{U_t\}$ nezavisne jednako distribuirane Bernoullijeve, nezavisne od $\{W_t\}$, takve da je $P(U_t = 1) = 1 - P(U_t = 0) = p$, $p \in (0,1)$.

(a) Odredite funkciju autokovarijanci procesa $\{X_t\}$. Je li $\{X_t\}$ stacionaran?

(b) Ako je $p = 0.5$, odredite linearan proces koji ima istu funkciju autokovarijanci.

ZADATAK 5: [15 bodova]
Zadan je proces $\{X_t\}$

$$X_0 = 1,$$
$$X_t = X_{t-1} Z_t, \ t \in \mathbb{N},$$

gdje je $\{Z_t\} \sim IID(1, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 1$ i Z_t su pozitivne slučajne varijable. Pokažite da $\{X_t\}$ nije stacionaran. Kako možemo transformirati $\{X_t\}$ do stacionarnog procesa?