

**ANALIZA VREMENSKIH NIZOVA**

## DRUGI KOLOKVIJ

**ZADATAK 1:** [25 bodova]

- (a) Za dvije slučajne varijable  $X, Z$ ,  $EX^2 < \infty$ ,  $EZ^2 < \infty$ , definirajte najbolju predikciju i najbolju linearnu predikciju za  $X$  na osnovu  $Z$ .
- (b) Za proces

$$X_t = 0.5X_{t-2} + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2),$$

odredite odrezanu predikciju za  $X_{n+h}$ ,  $h \geq 1$  na osnovu  $X_1, \dots, X_n$ . Odredite aproksimaciju srednje kvadratne greške takve predikcije. Čemu konvergira predikcija i greška predikcije kad  $h \rightarrow \infty$ ?

**ZADATAK 2:** [20 bodova]

Prosječni mjesečni vodostaji neke rijeke ne mijenjaju se značajno iz godine u godinu te se stoga mogu opisati procesom  $V_t = V_{t-12} + Z_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Kako mjerenje vodostaja nije u potpunosti pouzdano, izmjerene vrijednosti opažamo uz šum, stoga je model za izmjerene vrijednosti vodostaja

$$X_t = V_t + W_t,$$

gdje je  $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma_W^2)$  nezavisna od  $\{Z_t\}$  (primijetiti da općenito  $\sigma_W^2 \neq \sigma_Z^2$ ). Je li  $\{X_t\}$  stacionaran? Kako ga možemo transformirati tako da dobijemo stacionaran proces? Odredite funkciju autokovarijanci tako dobivenog procesa. Gledano po funkciji autokovarijanci, kojem sezonalnom modelu odgovara dobiveni proces, odnosno proces  $\{X_t\}$ .

**ZADATAK 3:** [20 bodova]

- (a) Definirajte spektralnu gustoću stacionarnog procesa i navedite osnovna svojstva.
- (b) Odredite spektralnu gustoću procesa

$$X_t = 0.5X_{t-2} + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

**ZADATAK 4:** [20 bodova]

- (a) Kada za dvodimenzionalan proces  $\{(X_t, Y_t)^T, t \in \mathbb{Z}\}$  kažemo da je stacionaran?
- (b) Neka je zadan proces

$$\begin{aligned} X_t &= Z_{t-1}, \\ Y_t &= Z_t, \end{aligned}$$

gdje je  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ . Je li  $\{(X_t, Y_t)^T\}$  stacionaran? Jesu li  $\{X_t\}$  i  $\{Y_t\}$  stacionarni procesi? Je li  $\{(X_t, Y_t)^T\}$  bijeli šum? Jesu li  $\{X_t\}$  i  $\{Y_t\}$  bijeli šumovi? Obrazložite odgovore.

- (c) Pretpostavimo sada da je u prethodnom  $\{Z_t\}$  slučajna šetnja  $Z_t = Z_{t-1} + W_t$ ,  $\{W_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ . Jesu li procesi  $\{X_t\}$  i  $\{Y_t\}$  kointegrirani?

**ZADATAK 5:** [15 bodova]

Definirajte  $GARCH(1, 1)$  proces te pokažite da ima svojstvo uvjetne heteroskedastičnosti. Pokažite da kauzalan i invertibilan  $ARMA(1, 1)$  proces nema to svojstvo.