

ANALIZA VREMENSKIH NIZOVA

DRUGI KOLOKVIJ 2017./2018.

ZADATAK 1: [6+14=20 bodova]Dostupni su podaci vremenskog niza $-1.6, -0.86, 0.67, 0.43, 0.74$.

- (a) Na osnovu podataka procijenjeni su parametri
- $AR(1)$
- modela te je dobiven model

$$X_t = 0.59X_{t-1} + Z_t,$$

i reziduali $-1.29, 0.08, 1.18, 0.04, 0.49$. Odredite odrezane predikcije za jedan i dva koraka unaprijed.

- (b) Na osnovu istih podataka procijenjeni su i parametri
- $MA(1)$
- modela te je dobiven model

$$X_t = Z_t + 1Z_{t-1},$$

i reziduali $-1.13, -0.05, 0.61, -0.09, 0.75$. Odredite odrezane predikcije za jedan i dva koraka unaprijed. Ako je varijanca bijelog šuma procijenjena na 0.558 , izračunajte aproksimaciju greške predikcija za $h \geq 1$ koraka unaprijed. Odredite i odgovarajuće 95%-tne pouzdane intervale ako pretpostavimo da je šum Gaussovski.

ZADATAK 2: [10+10=20 bodova]Neka je $\{X_t\}$ linearan proces s reprezentacijom

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

- (a) Pokažite da je spektralna gustoća od
- $\{X_t\}$

$$f(\lambda) = \sigma^2 \Psi(e^{-2\pi i \lambda}) \Psi(e^{2\pi i \lambda}),$$

gdje je $\Psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j$.

- (b) Koristeći taj rezultat odredite spektralnu gustoću
- $MA(2)$
- procesa.

ZADATAK 3: [20 bodova]

Vremenski niz diferenciran je na koraku 12, zatim na koraku 1 te je dobiven niz za koji je procijenjena autokorelacijska funkcija. Dobivene su vrijednosti

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(12j) &\approx 0.8^j, & j \in \mathbb{Z}, \\ \hat{\rho}(12j + 1) &\approx 0.4 \cdot 0.8^j, & j \in \mathbb{Z}, \\ \hat{\rho}(12j - 1) &\approx 0.4 \cdot 0.8^j, & j \in \mathbb{Z}, \\ \hat{\rho}(h) &\approx 0, & \text{inače.} \end{aligned}$$

Na osnovu toga predložite odgovarajući kauzalan i invertibilan SARIMA model i pri tome specificirajte sve parametre. Obrazložite svoju tvrdnju tako da usporedite teorijsku funkciju autokorelacija tog procesa s gore dobivenim procijenjenim vrijednostima.

ZADATAK 4: [5+20=25 bodova]

- (a) Kada za višedimenzionalni proces kažemo da je slabo stacionaran? Definirajte *VARMA* procese.
- (b) Odredite funkcije autokovarijanci i kroskovarijanci stacionarnog *VARMA*(0,1) procesa

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_t \\ V_t \end{bmatrix} + \Theta \begin{bmatrix} U_{t-1} \\ V_{t-1} \end{bmatrix}$$

gdje je $\{(U_t, V_t)^T\} \sim WN(0, \Sigma)$ i

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 5: [5+10=15 bodova]

- (a) Definirajte distribucije s teškim repovima i navedite primjere takvih distribucija.
- (b) Za *ARCH*(1) proces s parametrima $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_1 \in (0, 1)$ te standardnim normalnim inovacijama izračunajte EX_t^4 (Napomena: $EN(0, 1)^4 = 3$). Zaključite da mora biti $1 - 3\alpha_1^2 > 0$ ako je $EX_t^4 < \infty$.