

ANALIZA VREMENSKIH NIZOVA

DRUGI KOLOKVIJ 2018./2019.

ZADATAK 1: [10+6+9=25 bodova]

Neka je X_t razina vode u nekom spremniku u mjesecu t . Svaki mjesec 20% vode iz prethodnog mjeseca se potroši. Voda u spremnik ulazi oborinama koje se ne mijenjaju značajno u istim mjesecima kroz godine. Stoga je količina vode koja će ući u spremnik u nekom mjesecu jednaka količini koja je ušla u spremnik u istom mjesecu prošle godine uz grešku (šum) koja ima očekivanje 0, varijancu 1 i nezavisna je iz mjeseca u mjesec.

- Definirajte proces kojim možemo modelirati razinu vode u spremniku po mjesecima. O kojem procesu se radi? (uputa: izrazite priljev vode u istom mjesecu prošle godine i to iskoristite)
- Kojom transformacijom od tog procesa možemo dobiti stacionaran proces? Odredite funkciju autokorelacija tako dobivenog procesa.
- Razina vode u lipnju ove godine je 100, u srpnju prošle godine je bila 110, a u lipnju prošle godine 90. Izračunajte (odrežanu) predikciju za srpanj ove godine.

ZADATAK 2: [8+10+2=20 bodova]

- Definirajte spektralnu gustoću stacionarnog procesa s funkcijom autokovarijanci γ takvom da je $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$. Pokažite da je dobro definirana i da uvijek ima realne vrijednosti.
- Izračunajte spektralnu gustoću $SARMA(0,0) \times (0,1)_{12}$ procesa.
- Ako je poznata spektralna gustoća, možemo li i kako izračunati funkciju autokovarijanci?

ZADATAK 3: [4+8=12 bodova]

- Kada za dvodimenzionalan proces $\{(X_t, Y_t)^T, t \in \mathbb{Z}\}$ kažemo da je stacionaran?
- Ako je $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$, $X_t = Z_t$ i $Y_t = Z_t$, je li $\{(X_t, Y_t)^T, t \in \mathbb{Z}\}$ dvodimenzionalni bijeli šum?

ZADATAK 4: [15+4+11=30 bodova]

- Neka je $\{X_t\}$ kauzalan $AR(2)$ proces

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t,$$

$$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2) \text{ i}$$

$$Y_t = X_{t-1}.$$

Prikažite dvodimenzionalni proces $\{(X_t, Y_t)^T\}$ kao odgovarajući VAR proces. Je li $\{(X_t, Y_t)^T\}$ stacionaran i kauzalan? Jesu li $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ stacionarni procesi? Obrazložite odgovore.

- Izrazite funkciju kros-kovarijanci procesa $\{(X_t, Y_t)^T\}$ u terminima funkcije autokovarijanci γ_X procesa $\{X_t\}$.
- Pretpostavimo sada da je u prethodnom $\phi_1 = -1$ i $\phi_2 = 2$. Jesu li procesi $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ kointegrirani?

ZADATAK 5: [5+8=13 bodova]

- Definirajte $ARCH(1)$ proces i pokažite da ima svojstvo uvjetne heteroskedastičnosti.
- Odredite spektralnu gustoću stacionarnog $ARCH(1)$ procesa.