Sveučilište u Osijeku **A**
Odjel za matematiku
9. studenog 2011.

**Matematički praktikum (2011./2012.)**

**1. kolokvij**

**Zadatak 1.** [20 bodova] *Zadan je skup vektora* $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2 \colon i = 1, \dots, m\}$ *u* $\mathbb{R}^2$ *s težinama* $w_1, \dots, w_m > 0$ *i kvazimetrička funkcija* $d \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$.
(a) *Kako se definira najbolji reprezentant (centroid) skupa vektora* $\mathcal{A}$ *s težinama* $w_1, \dots, w_m > 0$ *u odnosu na kvazimetričku funkciju* $d$*?*
(b) *Što je najbolji reprezentant (centroid) skupa vektora* $\mathcal{A}$ *zadanog s*

| $x_i$ | 5 | 3 | 5 | 2 | 3 | 2 | 6 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 4 | 2 | 6 | 3 | 5 | 3 | 4 | 5 |

*i težinama* $w_1 = \cdots = w_m = 1$ *u odnosu na LS-kvazimetričku funkciju?*

**Zadatak 2.** [25 bodova] *Neka je* $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2 \colon i = 1, \dots, m\}$ *skup vektora iz* $\mathbb{R}^2$ *s težinama* $w_1 = \cdots = w_m = 1$. *Neka je nadalje* $d_{LS}$ *LS-kvazimetrička funkcija, a* $c^\star_{LS} = (x_0, y_0)^T$ *najbolji reprezentant (centroid) skupa* $\mathcal{A}$.
(a) *Čemu je jednako* $\sum\limits_{i=1}^{m} (a^i - c^\star_{LS})$*?*
(b) *Pokažite da je* $\sum\limits_{i=1}^{m} d_{LS}(a^i, c^\star_{LS}) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2 - m(x_0^2 + y_0^2)$.
(c) *Odredite sume iz (a) i (b) na osnovi podataka iz Zadatka 1.*

**Zadatak 3.** [15 bodova]
*Pokažite da* $d_{LS} \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $d_{LS}(x, y) = \|x - y\|_2^2$ *nije metrička funkcija.*

**Zadatak 4.** [25 bodova]
(a) *Kako se definira Mahalanobis kvazimetrička funkcija?*
(b) *Napišite i nacrtajte jediničnu kružnicu* $K_M = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon d_M(x, O) = 1\}$ *uz Mahalanobis kvazimetričku funkciju s matricom* $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.
(c) *Odredite* $d_{LS}(a, O)$ *i* $d_M(a, O)$ *za* $a = (0.5, 1.8)^T$.

**Zadatak 5.** [25 bodova] *Zadana je Mahalanobis kvazimetrička funkcija* $d_M \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *s matricom* $S = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i skup vektora* $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2 \colon i = 1, \dots, m\}$ *u* $\mathbb{R}^2$ *s težinama* $w_1 = \cdots = w_m = 1$*, gdje je*

| $x_i$ | 6 | 6 | 3 | 2 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 4 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 |

(a) *Odredite najbolji reprezentant (centar)* $c^\star$ *skupa* $\mathcal{A}$ *u odnosu na Mahalanobis kvazimetričku funkciju* $d_M$.
(b) *Odredite* $\sum\limits_{i=1}^{m} S^{-1/2}(a^i - c^\star)$. (c) *Odredite* $\sum\limits_{i=1}^{m} d_M(a^i, c^\star)$.

**Zadatak 6.** [20 bodova]
(a) *Što je geometrijski medijan skupa vektora* $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2 \colon i = 1, \dots, m\}$ *u* $\mathbb{R}^2$ *?*
(b) *Napišite Weiszfeldov iterativni postupak za traženje geometrijskog medijana u vektorskom obliku.*

---

**Napomena.** Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 130 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
9. studenog 2011.

## Matematički praktikum (2011./2012.)

### 1. kolokvij

**Zadatak 1.** [20 bodova] *Zadan je skup vektora* $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2 : i = 1, \dots, m\}$ *u* $\mathbb{R}^2$ *s težinama* $w_1, \dots, w_m > 0$ *i kvazimetrička funkcija* $d \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$.
(a) *Kako se definira najbolji reprezentant (centroid) skupa vektora* $\mathcal{A}$ *s težinama* $w_1, \dots, w_m > 0$ *u odnosu na kvazimetričku funkciju* $d$?
(b) *Što je najbolji reprezentant skupa vektora* $\mathcal{A}$ *zadanog s*

| $x_i$ | 8 | 8 | 6 | 5 | 6 | 10 | 10 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5 | 4 | 8 | 5 | 5 | 3 | 5 | 5 |

*i težinama* $w_1 = \dots = w_m = 1$ *u odnosu na* $l_1$*-metričku funkciju?*

**Zadatak 2.** [20 bodova] *Neka je* $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2 : i = 1, \dots, m\}$ *skup vektora iz* $\mathbb{R}^2$ *s težinama* $w_1 = \dots = w_m = 1$. *Neka je nadalje* $d_1$ $l_1$*-metrička funkcija, a* $c_1^\star = (x_0, y_0)^T$ *najbolji reprezentant (centar) skupa* $\mathcal{A}$. *Na osnovi podataka iz Zadatka 1. odredite*
(a) $\sum_{i=1}^{m} (a^i - c_1^\star)$
(b) $\sum_{i=1}^{m} d_1(a^i, c_1^\star)$.

**Zadatak 3.** [25 bodova]
(a) *Kako se definira Mahalanobis kvazimetrička funkcija ?*
(b) *Napišite i nacrtajte jediničnu kružnicu* $K_M = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_M(x, O) = 1\}$ *uz Mahalanobis kvazimetričku funkciju s matricom* $S = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(c) *Odredite* $d_{LS}(a, O)$ *i* $d_M(a, O)$ *za* $a = (1.8, 0.5)^T$.

**Zadatak 4.** [20 bodova]
*Pokažite da Mahalanobis kvazimetrička funkcija s matricom* $S > 0$, $d_M \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, *nije metrička funkcija.*

**Zadatak 5.** [25 bodova] *Zadana je Mahalanobis kvazimetrička funkcija* $d_M \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *s matricom* $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ *i skup vektora* $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2 : i = 1, \dots, m\}$ *u* $\mathbb{R}^2$ *s težinama* $w_1 = \dots = w_m = 1$, *gdje je*

| $x_i$ | 4 | 5 | 6 | 5 | 5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5 | 2 | 4 | 5 | 6 | 2 |

(a) *Odredite najbolji reprezentant (centar)* $c^\star$ *skupa* $\mathcal{A}$ *u odnosu na Mahalanobis kvazimetričku funkciju* $d_M$.
(b) *Odredite* $\sum_{i=1}^{m} S^{-1/2}(a^i - c^\star)$.  (c) *Odredite* $\sum_{i=1}^{m} d_M(a^i, c^\star)$.

**Zadatak 6.** [20 bodova]
(a) *Što je geometrijski medijan skupa vektora* $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i)^T \in \mathbb{R}^2 : i = 1, \dots, m\}$ *u* $\mathbb{R}^2$ *?*
(b) *Napišite Weiszfeldov iterativni postupak za traženje geometrijskog medijana po komponentama.*

---

**Napomena.** Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 130 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.