Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku

A

13. prosinca 2011.

Matematički praktikum (2011./2012.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Kako se definira LS pravac-reprezentant točaka* $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, m$?
(b) *Pokažite da LS pravac-reprezentant točaka* $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, m$ *prolazi centroidom tih točaka.*
(c) *Neka je* $y = 3x + 4$ *LS pravac-reprezentant točaka* $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, m$ *za koje vrijedi* $\sum_{i=1}^m x_i = 30$ *te* $\sum_{i=1}^m y_i = 250$. *Odredite broj točaka* m.

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Definirajte što znači da je funkcija* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Lipshitzova na* $\mathbb{R}^n$.
(b) *Pokažite da je funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 1| + |6x - 7|$ *Lipshitzova na* $\mathbb{R}$.

Zadatak 3. [20 bodova] *Neka je* $(\overline{x}, \overline{y}) = (2, 5)$ *centroid točaka* $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, m$ *te neka je matrica* $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 - \overline{x} & y_1 - \overline{y} \\ x_2 - \overline{x} & y_2 - \overline{y} \\ \vdots & \vdots \\ x_m - \overline{x} & y_m - \overline{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 2}$, *takva da je* $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.
(a) *Odredite svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice* $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$.
(b) *Odredite jednadžbu TLS pravca-reprezentanta točaka* A_i, $i = 1, \dots, m$.

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Neka je* $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{R}$. *Koliki je broj svih particija skupa* $\mathcal{A}$ *koje sadrže po* $k = 2$ *klastera* π_1, π_2 ?
(b) *Kako se pomoću LS-kvazimetričke funkcije, a kako pomoću LAD-metričke funkcije definira centar klastera* π_j ?
(c) *Napišite funkciju cilja* F *koja predstavlja zbroj suma LS-udaljenosti elemenata klastera do njihovog centra. Neka je* $\mathcal{A} = \{1, 3, 5\}$ *i* $k = 2$. *Konstruirajte tablicu iz koje će se vidjeti sve dvočlane particije, njihoci centri, te vrijednost funkcije cilja* F *na svakoj particiji. Što je optimalna particija ?*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Standardni k-means algoritam sadržava dva osnovna koraka, koji se međusobno izmjenjuju:* pridruživanje (assignment step) *i* korekcija (update step). *Detaljnije opišite korak* pridruživanje.
(b) *Provedite k-means algoritam na skupu* $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6, 8\}$ *za* $k = 2$ *i početne centre* $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ *uz primjenu LS-kvazimetričke funkcije.*
(c) *Što može biti rezultat provedbe k-means algoritma (u smislu optimalnosti i broja klastera) ?*
(d) *Što je optimalna particija u ovom slučaju ?*

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) *Neka je* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *LS-kvazimetrička funkcija i* $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. *Koliko je* $d(A, B)$?
(b) *Neka je* $\mathcal{A} = \{(0, 1), (0, 4), (2, 7), (3, 0), (3, 7), (5, 4), (7, 4), (8, 4), (8, 7), (9, 3)\}$. *Uz LS-kvazimetričku funkciju po principu najkraćih udaljenosti skup* $\mathcal{A}$ *grupirajte oko točaka* $z_1 = (3, 4)$, $z_2 = (6, 6)$ *u dva klastera* π_1, π_2.
(c) *Primjenom LS-kvazimetričke funkcije odredite centre klastera* π_1, π_2.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
13. prosinca 2011.

Matematički praktikum (2011./2012.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Kako se definira TLS pravac-reprezentant točaka $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$?*
(b) *Pokažite da TLS pravac-reprezentant točaka $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$ prolazi centroidom tih točaka.*
(c) *Neka je $5x + 3y - 1 = 0$ TLS pravac-reprezentant točaka $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, 60$ za koje vrijedi $\sum_{i=1}^m x_i = 30$. Odredite $\sum_{i=1}^m y_i$.*

Zadatak 2. [20 bodova] (a) *Definirajte što znači da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna na $\mathbb{R}^n$.*
(b) *Pokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 1| + |6x - 7|$ konveksna na $\mathbb{R}$.*

Zadatak 3. [20 bodova] *Neka je $(\overline{x}, \overline{y}) = (3, 7)$ centroid točaka $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$ te neka je matrica* $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 - \overline{x} & y_1 - \overline{y} \\ x_2 - \overline{x} & y_2 - \overline{y} \\ \vdots & \vdots \\ x_m - \overline{x} & y_m - \overline{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 2}$, *takva da je* $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$.
(a) *Odredite svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$.*
(b) *Odredite jednadžbu TLS pravca-reprezentanta točaka A_i, $i = 1, \ldots, m$.*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Neka je $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}$. Kako se definira particija Π skupa $\mathcal{A}$ s $k = 2$ klastera π_1, π_2 ?*
(b) *Kako se pomoću LS-kvazimetričke funkcije, a kako pomoću LAD-metričke funkcije definira centar klastera π_j ?*
(c) *Napišite funkciju cilja G koja predstavlja sumu težinskih LS-udaljenosti centara klastera do centra čitavog skupa, pri čemu težine predstavljaju broj elemenata klastera. Neka je $\mathcal{A} = \{2, 4, 6\}$ i $k = 2$. Konstruirajte tablicu iz koje će se vidjeti sve dvočlane particije, njihovi centri, te vrijednost funkcije cilja G na svakoj particiji. Što je optimalna particija ?*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Standardni k-means algoritam sadržava dva osnovna koraka, koji se međusobno izmjenjuju:* pridruživanje (assignment step) *i* korekcija (update step). *Detaljnije opišite korak* korekcija.
(b) *Provedite k-means algoritam na skupu $\mathcal{A} = \{2, 4, 8, 10, 12\}$ za $k = 2$ i početne centre $z_1 = 12$, $z_2 = 13$ uz primjenu LS-kvazimetričke funkcije.*
(c) *Što može biti rezultat provedbe k-means algoritma (u smislu optimalnosti i broja klastera) ?*
(d) *Što je optimalna particija u ovom slučaju ?*

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) *Neka je $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ LAD-kvazimetrička funkcija i $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. Koliko je $d(A, B)$?*
(b) *Neka je $\mathcal{A} = \{(0,1), (0,4), (2,7), (3,0), (3,7), (5,4), (7,4), (8,4), (8,7), (9,3)\}$. Uz LAD-kvazimetričku funkciju po principu najkraćih udaljenosti skup $\mathcal{A}$ grupirajte oko točaka $z_1 = (3, 4)$, $z_2 = (6, 6)$ u dva klastera π_1, π_2.*
(c) *Primjenom LAD-kvazimetričke funkcije odredite centre klastera π_1, π_2.*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.