Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
30. siječnja 2012.

A

Matematički praktikum (2011./2012.)

3. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x - \frac{1}{2}|$. *Što je* $x^\star = \operatorname*{argmin}_{x\in[0,2]} f(x)$*?*
(b) *Metodom bisekcije s točnošću* $\delta = 0.2$ *potražite prvu aproksimaciju točke* $x^\star$.

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Neka je* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-neprekidna funkcija s konstantom* $L > 0$ *i neka je* $u_0 \in [a,b]$. *Pokažite da je tada jedna donja ograda ove funkcije funkcija* $K(x) = f(u_0) - L|x - u_0|$.
(b) *Što je* $\mathcal{B} = \operatorname*{argmin}_{x\in[a,b]} K(x)$*?*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Neka je* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-neprekidna funkcija s konstantom* $L > 0$ *i neka je* $c = \frac{1}{2}(a+b)$. *Pokažite da je tada jedna donja ograda ove funkcije funkcija* $K(x) = \begin{cases} f(c) + L(x-c), & x \le c \\ f(c) - L(x-c), & x \ge c \end{cases}$.
(b) *Odredite* $\mathcal{U} = \operatorname*{argmin}_{x\in[a,b]} K(x)$.
(c) *Odredite* $\mathcal{B} = \min_{x\in[a,b]} K(x)$.

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Neka je* $\mathcal{K}$ *skup svih kružnica u ravnini. Navedite jednu kvazimetričku funkciju* $d : \mathcal{K} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, *na osnovi koje se može mjeriti udaljenost kružnice do točke.*
(b) *Zadana je kružnica* k_1 *s jednadžbom* $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 20$ *te* k_2 *s jednadžbom* $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 36$. *Skicirajte skup točaka ravnine koji sadrži sve točke sa svojstvom da su jednako udaljene od obje kružnice u smislu kvazimetričke funkcije iz (a).*

Zadatak 5. [20 bodova]
Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *formulom* $f(x) = \max\{x^2, -x+1\}$.
(a) *Skicirajte graf funkcije* f.
(b) *Odredite diferencijabilnu aproksimaciju* $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcije* f *za koju je* $\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(x) = f(x)$.

Zadatak 6. [20 bodova]
Zadani je skup $\mathcal{A} = \{a_i = i\colon i = 1,\dots,5\}$, *koji treba grupirati u tri klastera* π_1, π_2 *i* π_3. *Ako je* $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *LS kvazimetrička funkcija* $d(x,y) = (x-y)^2$, *onda se problem određivanja centara* c_1, c_2 *i* c_3 *klastera* π_1, π_2 *i* π_3 *svodi na minimizaciju funkcije* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$,

$$F(c_1, c_2, c_3) = \sum_{i=1}^{m} \min\{(c_1 - a_i)^2, (c_2 - a_i)^2, (c_3 - a_i)^2\}.$$

(a) *Odredite diferencijabilnu aproksimaciju* F_ϵ *funkcije* F.
(b) *Ako je* $\epsilon = 0.5$, *odredite* $\frac{\partial F_\epsilon}{\partial c_1}(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 4)$.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u ostalim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
30. siječnja 2012.

Matematički praktikum (2011./2012.)

3. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Što znači da je $f\colon D \to \mathbb{R}$ kvazikonveksna na $D \subseteq \mathbb{R}^n$?*
(b) *Je li funkcija $f\colon \mathbb{R} \to [0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = |arctg\, x|$ konveksna funkcija?*
(c) *Je li funkcija $f\colon \mathbb{R} \to [0, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = |arctg\, x|$ kvazikonveksna funkcija?*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Skicirajte graf funkcije $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x - \frac{3}{2}|$. Što je $x^\star = \operatorname*{argmin}_{x\in[0,2]} f(x)$?*
(b) *Metodom bisekcije s točnošću $\delta = 0.2$ potražite prvu aproksimaciju točke $x^\star$.*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna funkcija s konstantom $L > 0$ i neka je $u_0 \in [a,b]$. Pokažite da je tada jedna donja ograda ove funkcije funkcija $K(x) = \max\{f(a)-L|x-a|, f(b)-L|x-b|\}$.*
(b) *Odredite $\mathcal{U} = \operatorname*{argmin}_{x\in[a,b]} K(x)$ i $\mathcal{B} = K(\mathcal{U})$.*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Neka je $\mathcal{K}$ skup svih kružnica u ravnini. Navedite jednu kvazimetričku funkciju $d : \mathcal{K} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, na osnovi koje se može mjeriti udaljenost kružnice do točke.*
(b) *Zadane su kružnice k_1 s jednadžbom $(x-4)^2+(y-2)^2 = 25$ te k_2 s jednadžbom $(x-4)^2+(y-2)^2 = 30$. Skicirajte skup točaka ravnine koji sadrži sve točke sa svojstvom da su jednako udaljene od obje kružnice u smislu kvazimetričke funkcije iz (a).*

Zadatak 5. [20 bodova]
Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom $f(x) = \max\{x^3, -x+2\}$.
(a) *Skicirajte graf funkcije f.*
(b) *Odredite diferencijabilnu aproksimaciju $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije f za koju je $\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon(x) = f(x)$.*

Zadatak 6. [20 bodova]
Zadani je skup $\mathcal{A} = \{a_i = i\colon i = 1,\ldots,5\}$, koji treba grupirati u tri klastera π_1, π_2 i π_3. Ako je $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ LS kvazimetrička funkcija $d(x,y) = (x-y)^2$, onda se problem određivanja centara c_1, c_2 i c_3 klastera π_1, π_2 i π_3 svodi na minimizaciju funkcije $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$,

$$F(c_1,c_2,c_3) = \sum_{i=1}^{m} \min\{(c_1-a_i)^2, (c_2-a_i)^2, (c_3-a_i)^2\}.$$

(a) *Odredite diferencijabilnu aproksimaciju F_ϵ funkcije F.*
(b) *Ako je $\epsilon = 1$, odredite $\frac{\partial F_\epsilon}{\partial c_3}(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 4)$.*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u ostalim zadaćama.