Sveučilište u Osijeku **A**
Odjel za matematiku
28. siječnja 2013.

Matematički praktikum (2012./2013.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) Ako skup $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ od m elemenata treba grupirati u k klastera, kako se može definirati funkcija cilja na skupu svih particija $\mathcal{F}\colon P(A,m,k) \to \mathbb{R}_+$, a kako funkcija cilja ovisna o centrima klastera $F\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}_+$?
(b) Skup $\mathcal{A} = \{2,4,5,6,10\}$ treba grupirati u dva klastera. Odredite lokalno-optimalnu particiju primjenom k-means algoritma uz LS-kvazimetričku funkciju počevši s inicijalnim točkama (assignment points) $z_1 = 3$, $z_2 = 6$. Popunite niže navedenu tablicu.

R.br.	z_1	z_2	$F(z_1,z_2)$	π_1	π_2	ζ_1	ζ_2	$\mathcal{F}(\{\pi_1,\pi_2\})$
1	3	6		$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			
2				$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			
3				$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			

Zadatak 2. [20 bodova]
Skup $\mathcal{A} = \{(-2,-1),(-1,1),(1,-2),(1,3),(3,-2),(3,2)\}$ treba grupirati u dva klastera. Odredite lokalno-optimalnu particiju primjenom k-means algoritma uz LAD-kvazimetričku funkciju počevši s inicijalnim točkama (assignment points) $z_1 = (0,0)$, $z_2 = (3,4)$. Popunite niže navedenu tablicu.

R.br.	z_1	z_2	$F(z_1,z_2)$	π_1	π_2	ζ_1	ζ_2	$\mathcal{F}(\{\pi_1,\pi_2\})$
1	$(0,0)$	$(3,4)$		$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			
2				$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			
3				$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			

Zadatak 3. [15 bodova]
(a) Što znači da je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kvazikonveksna na D ?
(b) Pokažite da je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kvazikonveksna na D onda ako je za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ nivo-skup (level set) $D_\lambda = \{x \in D : f(x) \le \lambda\}$ konveksan.
(c) Je li funkcija $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ kvazikonveksna ?

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) Napišite definiciju Lipschitz-neprekidne funkcije na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Navedite primjer funkcije koja nije Lipschitz-neprekidna.
(b) Za funkciju $f\colon [0,9] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \le 3 \\ 4 - \frac{1}{2}(x-5)^2, & 3 < x \le 7 \\ \frac{1}{2}(x-9)^2, & 7 < x \le 9 \end{cases}$$

skicirajte graf funkcije f i odredite njenu najmanju moguću Lipschitzovu konstantu.

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) Za funkciju f iz Zadatka 4 na intervalu $[0,9]$ prema Shubertovoj metodi odredite točku (U,B) u kojoj donja ograda funkcije f prima najmanju vrijednost.
(b) Primjenom metode Pijavskog za funkciju f iz Zadatka 4 uz početnu aproksimaciju $u_0 = 0$ odredite u_3.

Zadatak 6. [20 bodova]
Za funkciju f iz Zadatka 4 prema `DIRECT` metodi početni interval $[0,9]$ podijelite na tri jednaka dijela i na svakom odredite njegovu B-vrijednost.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u ostalim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
28. siječnja 2013.

Matematički praktikum (2012./2013.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Ako skup* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ *od* m *elemenata treba grupirati u* k *klastera, kako se može definirati funkcija cilja na skupu svih particija* $\mathcal{F}\colon P(A,m,k) \to \mathbb{R}_+$, *a kako funkcija cilja ovisna o centrima klastera* $F\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}_+$?
(b) *Skup* $\mathcal{A} = \{-3,-1,1,2,4,9\}$ *treba grupirati u dva klastera. Odredite lokalno-optimalnu particiju primjenom k-means algoritma uz LS-kvazimetričku funkciju počevši s inicijalnim točkama (assignment points)* $z_1 = -2$, $z_2 = 2$. *Popunite niže navedenu tablicu.*

R.br.	z_1	z_2	$F(z_1,z_2)$	π_1	π_2	ζ_1	ζ_2	$\mathcal{F}(\{\pi_1,\pi_2\})$
1	-2	2		$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			
2				$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			
3				$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			

Zadatak 2. [20 bodova]
Skup $\mathcal{A} = \{(-2,-2),(-2,1),(-1,2),(0,-2),(1,1),(1,3)\}$ *treba grupirati u dva klastera. Odredite lokalno-optimalnu particiju primjenom k-means algoritma uz LAD-kvazimetričku funkciju počevši s inicijalnim točkama (assignment points)* $z_1 = (-1,0)$, $z_2 = (0,1)$. *Popunite niže navedenu tablicu.*

R.br.	z_1	z_2	$F(z_1,z_2)$	π_1	π_2	ζ_1	ζ_2	$\mathcal{F}(\{\pi_1,\pi_2\})$
1	$(-1,0)$	$(0,1)$		$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			
2				$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			
3				$\{\quad\}$	$\{\quad\}$			

Zadatak 3. [15 bodova]
(a) *Što znači da je funkcija* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *strogo kvazikonveksna na* D ?
(b) *Pokažite da ako je za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$ *nivo-skup (level set)* $D_\lambda = \{x \in D : f(x) \le \lambda\}$ *konveksan, onda je funkcija* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *kvazikonveksna na* D.
(c) *Je li funkcija* $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ *kvazikonveksna* ?

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Napišite definiciju Lipschitz-neprekidne funkcije na intervalu* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Navedite primjer funkcije koja je Lipschitz-neprekidna i odredite njenu najmanju moguću Lipschitzovu konstantu.*
(b) *Za funkciju* $f\colon [\frac{1}{2}, \frac{13}{2}] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \le 2 \\ 1 - \frac{1}{2}|x-3|, & 2 < x \le 4 \\ \frac{14}{10}x - \frac{51}{10}, & 4 < x \le \frac{13}{2} \end{cases}$$

skicirajte graf funkcije f *i odredite njenu najmanju moguću Lipschitzovu konstantu.*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Za funkciju* f *iz Zadatka 4 prema Shubertovoj metodi odredite točku* (U,B) *u kojoj donja ograda funkcije* f *prima najmanju vrijednost.*
(b) *Primjenom metode Pijavskog za funkciju* f *iz Zadatka 4 uz početnu aproksimaciju* $u_0 = \frac{1}{2}$ *odredite* u_3.

Zadatak 6. [20 bodova]
Za funkciju f *iz Zadatka 4 prema* `DIRECT` *metodi početni interval* $[\frac{1}{2}, \frac{13}{2}]$ *podijelite na tri jednaka dijela i na svakom odredite njegovu* B*-vrijednost.*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u ostalim zadaćama.