Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
16. prosinca 2013.

A

Matematički praktikum (2013./2014.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) Neka je $\mathcal{A} = \{a^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \dots, m\}$ *skup točaka u* $\mathbb{R}^n$. *Kako se definira centroid, kako medijan, a kako geometrijski medijan skupa* $\mathcal{A}$. *?*

(b) Za skup $\mathcal{A} = \{(-8,-8), (-6,-3), (-2,0), (8,4), (7,-8), (2,6), (5,4), (-2,7)\}$ *odredite centroid i medijan.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Centroid:* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, *Medijan:* $[-2,2] \times [0,4]$

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *strogo kvazi konveksna funkcija. Algoritamski opišite prve dvije iteracije metode polovljenja za rješavanje problema* $\operatorname*{argmin}_{x \in [a,b]} f(x)$.

(b) Zadana je funkcija $f : [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2|+1$. *Metodom polovljenja uz* $\delta = .2$ *odredite prve četiri aproksimacije rješenja problema* $\operatorname*{argmin}_{x \in [a,b]} f(x)$. *Kolika je apsolutna pogreška ?*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $1.3, 1.9, 2.2, 2.05$; $|x^\star - x_k^\star| \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) + \delta$ $(.36)$

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) Što znači da je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz neprekidna funkcija na* $[a,b]$ *? Ako je funkcija* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz neprekidna na* $[a,b]$, *je li ona derivabilna na* $[a,b]$ *? Obrazložite svoju tvrdnju.*

(b) Pokažite da je funkcija $f : [0,18] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{|x-5|+1, |x-10|+2\}$ *Lipschitz neprekidna na* $[0,18]$ *i odredite Lipschitzovu konstantu* L.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = 1$

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-neprekidna funkcija s konstantom* $L > 0$ *i neka je* $u_0 \in [a,b]$. *Pokažite da je tada jedna donja ograda ove funkcije funkcija* $K(x) = f(u_0) - L|x-u_0|$. *Koja svojstva ima funkcija* K *?*

(b) Algoritamski opišite prve tri iteracije metode slomljenih pravaca. Za $u_0 = -6$, *metodom slomljenih pravaca odredite prve tri aproksimacije globalnog minimuma funkcije*
$f : [-6,12] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{|x-1|+1, |x-8|+2\}$.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) 12,4,1*

Zadatak 5. [25 bodova]
(a) Zadana je funkcija $f : [0,18] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{|x-5|+1, |x-10|+2\}$. *Provedite prva tri koraka* `DIRECT` *algoritma i u svakom koraku popišite podintervale s kojima se nastavlja algoritam*

(b) Za sedam podintervala iz trećeg koraka odredite točke $T_i = [d_i, f(c_i)]$, $i = 1, \dots, 7$, *gdje su* d_i *poluširine, a* c_i *centri podintervala. Grafički prikažite dobivene točke. Kako se pomocu točaka*

T_i *mogu odrediti* $\mathcal{B}$*-vrijednosti podintervala ?*

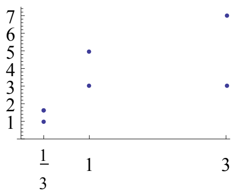
(c) *Kako se definiraju potencijalno optimalni podintervali ? Koji intervali su potencijalno optimalni podintervali u ovom primjeru ? Koje točke* T_i *im odgovaraju ?*

Rješenje: *(a)*

1.	$[0,6]$	$[6,12]$	$[12,18]$	–	–	–	–
2.	$[0,2]$	$[2,4]$	$[4,6]$	$[6,12]$	$[12,18]$	–	–
3.	$[0,2]$	$[2,4]$	$[4,4\frac{2}{3}]$	$[4\frac{2}{3},4\frac{4}{3}]$	$[4\frac{4}{3},6]$	$[6,12]$	$[12,18]$

(b) $(1,5),(1,3),(1/3,5/3),(1/3,1),(1/3,5/3),(3,3),(3,7)$

(c) Vidi Nastavne materijale; $[4\frac{2}{3},4\frac{4}{3}] \leftrightarrow (1/3,1)$, $[6,12] \leftrightarrow (3,3)$



Slika 1:

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
16. prosinca 2013.

B

Matematički praktikum (2013./2014.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) *Zadana je funkcija* $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5+11x-7x^2+x^3$ *i točka* $T_0 = (4,0)$. *Definirajte problem traženja najkraće udaljenosti točke* T_0 *do grafa funkcije* f *koristeći* l_1, l_2 *i* l_∞*-normu.*

(b) *Skicirajte graf funkcije* f *i geometrijski razmotrite problem.*
Rješenje: *Vidi Nastavne materijale*

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Za koju funkciju kažemo da je kvazi konveksnu? Navedite kriterij za ispitivanje kvazi konveksnosti funkcije* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) *Navedite primjer funkcije koja je konveksna i kvazi konveksna i primjer funkcije koja nije konveksna, ali je kvazi konveksna.*
Rješenje: *Vidi nastavne materijale*

Zadatak 3. [25 bodova]
(a) *Neka je* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *strogo kvazi konveksna funkcija. Algoritamski opišite prve dvije iteracije metode zlatnog reza za rješavanje problema* $\operatorname*{argmin}_{x\in[a,b]} f(x)$.

(b) *Zadana je funkcija* $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|+1$. *Metodom zlatnog reza odredite prve tri aproksimacije rješenja problema* $\operatorname*{argmin}_{x\in[0,4]} f(x)$.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $1.53, 0.944272, 0.944272$

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Što znači da je* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *Lipschitz neprekidna funkcija na* $[a,b]$. *Ako je funkcija* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivabilna na* $[a,b]$, *je li ona Lipschitz neprekidna na* $[a,b]$*? Obrazložite svoju tvrdnju.*

(b) *Pokažite da je funkcija* $f\colon [-6,12] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{|x-1|+1, |x-8|+2\}$ *Lipschitz neprekidna na* $[-6,12]$ *i odredite Lipschitzovu konstantu* L.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = 1$

Zadatak 5. [25 bodova]
(a) *Zadana je funkcija* $f\colon [-6,12] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{|x-1|+1, |x-8|+2\}$. *Provedite prva tri koraka* `DIRECT` *algoritma i u svakom koraku popišite podintervale s kojima se nastavlja algoritam*

(b) *Za sedam podintervala iz trećeg koraka odredite točke* $T_i = [d_i, f(c_i)]$, $i = 1,\ldots,7$, *gdje su* d_i *poluširine, a* c_i *centri podintervala. Grafički prikažite dobivene točke. Kako se pomoću točaka* T_i *mogu odrediti* $\mathcal{B}$*-vrijednosti podintervala?*

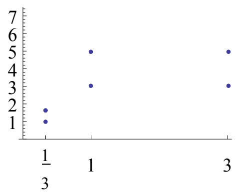
(c) *Kako se definiraju potencijalno optimalni podintervali? Koji intervali su potencijalno optimalni podintervali u ovom primjeru? Koje točke* T_i *im odgovaraju?*

Rješenje: *(a)*

1.	$[-6,0]$	$[0,6]$	$[6,12]$	$-$	$-$	$-$	$-$
2.	$[-6,0]$	$[0,2]$	$[2,4]$	$[4,6]$	$[6,12]$	$-$	$-$
3.	$[-6,0]$	$[0,\frac{2}{3}]$	$[\frac{2}{3},\frac{4}{3}]$	$[\frac{4}{3},2]$	$[2,4]$	$[4,6]$	$[6,12]$

(b) $(3,5),(1/3,5/3),(1/3,1),(1/3,5/3),(1,3),(1,5),(3,3)$

(c) Vidi Nastavne materijale; $[\frac{2}{3},\frac{4}{3}] \leftrightarrow (1/3,1)$, $[6,12] \leftrightarrow (3,3)$



Slika 2:

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.