Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
28. siječnja 2014.

A

Matematički praktikum (2013./2014.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) *Pokažite da je funkcija $f(x) = e^x + x^2$ rješenje sljedećeg rubnog problema*

$$y'' - y' = 2(1-x), \qquad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e.$$

(b) *U matričnoj formi napišite odgovarajući sustav diferencijskih jednadžbi kojim se traži diskretno rješenje ovog problema.*
Rješenje: *(b)* $(2-h)y_{k+1} - 4y_k + (2+h)y_{k-1} = 2h^2 f(x_k)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $y_0 = 1$, $y_n = 1 + e$

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Kada je moguće sustav jednadžbi $Ax = y$ rješavati LU-dekompozicijom. Kratko opišite proceduru za rješavanje trodijagonalnog sustava LU-dekompozicijom.*

(b) *Pokažite da matrica sustava iz prethodnog zadatka zadovoljava uvjete za provedbu LU-dekompozicije ? Je li ova matrica pozitivno definitna ?*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Zadovoljava jer su svi glavni minori su različiti od nule:* $\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 12 + h^2 > 0$, $\ldots$

Zadatak 3. [25 bodova]
(a) *Kada je moguće sustav jednadžbi $Ax = y$ rješavati Cholesky-dekompozicijom. Kratko opišite proceduru za rješavanje trodijagonalnog sustava Cholesky-dekompozicijom.*

(b) *Glavna dijagonala matrice trodijagonalnog sustava A je $a = (2, 2, 2, 2, 2)^T$. Donja i gornja sporedna dijagonala su $b = c = (1, 1, 1, 1)^T$. Vektor slobodnih koeficijenata je $y = (1, 1, 1, 1, 1)^T$. Zadovoljava li matrica A uvjete za provedbu Cholesky-dekompozicije ? Riješite sustav $Ax = y$ metodom Cholesky. Možete li generalizirati rezultat za proizvoljni neparni $n \in \mathbb{N}$?*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Zadovoljava jer je:* $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$, $\Delta_3 = 4 > 0$, $\Delta_4 = 5 > 0$, $\Delta_5 = 6 > 0$, $\quad x^\star = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) *Eksplicitno riješite sljedeći Cauchyjev problem*

$$y' = 4x - 2y, \quad y(0) = 0.$$

(b) *Napišite Eulerov iterativni postupak za rješavanje ovog Cauchyjevog problema.*

(c) *Napišite iterativni postupak za rješavanje ovog Cauchyjevog problema uz primjenu simetrične formule.*
Rješenje: *(a)* $y(x) = e^{-2x} + 2x - 1$; *(b)* $y_{k+1} = (1-2h)y_k + 4hx_k$, $y_0 = 0$ *(c)* $F_k = (1-h)y_k + 2hx_k$, $y_{k+1} = (F_k + 2hx_{k+1})/(1-h)$, $y_0 = 1$

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) *Provjerite da je funkcija* $y = xe^{-\frac{3}{2}x}$ *rješenje Cauchyjevog problema*

$$4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(b) *Odgovarajućim supstitucijama svedite problem na sustav Cauchyjevih problema i napišite odgovarajući iterativni postupak.*

Rješenje: *(a)* – *(b)* $y_{1,k+1} = y_{1,k} + hy_{2,k},\ y_{2,k+1} = y_{2,k} + h(-4y_{2,k} - 15/4y_{1,k} + 4e^{-3/2x_k}),\ y_{1,0} = 0, y_{2,0} = 1$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 125 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnom kolokviju.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
28. siječnja 2014.

Matematički praktikum (2013./2014.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) *Pokažite da je funkcija* $f(x) = 4e^x + 2e^{3x}$ *rješenje sljedećeg rubnog problema*

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 6, \quad y(1) = 4e + 2e^3.$$

(b) *U matričnoj formi napišite odgovarajući sustav diferencijskih jednadžbi kojim se traži diskretno rješenje ovog problema.*
Rješenje: *(b)* $(1-2h)y_{k+1} + (-2+3h^2)y_k + (1+2h)y_{k-1} = 0,\ k = 1,\dots,n-1,\ y_0 = 6,\ y_n = 4e + 2e^3$

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Kada je moguće sustav jednadzbi* $Ax = y$ *rješavati* LU*-dekompozicijom. Kratko opišite proceduru za rješavanje trodijagonalnog sustava* LU*-dekompozicijom.*

(b) *Pokažite da matrica sustava iz prethodnog zadatka zadovoljava uvjete za provedbu* LU*-dekompozicije ? Je li ova matrica pozitivno definitna ?*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Zadovoljava jer su svi glavni minori su različiti od nule:* $\Delta_1 = -2 + 3h^2 < 0,\ \Delta_2 = 3 - 8h^2 + 9h^4 > 0,\ \dots$

Zadatak 3. [25 bodova]
(a) *Kada je moguće sustav jednadžbi* $Ax = y$ *rješavati Cholesky-dekompozicijom. Kratko opišite proceduru za rješavanje trodijagonalnog sustava Cholesky-dekompozicijom.*

(b) *Glavna dijagonala matrice trodijagonalnog sustava* A *je* $a = (2,2,2,2,2)^T$*. Donja i gornja sporedna dijagonala su* $b = c = (-1,-1,-1,-1)^T$*. Vektor slobodnih koeficijenata je* $y = (2,0,2,0,2)^T$*. Zadovoljava li matrica* A *uvjete za provedbu Cholesky-dekompozicije ? Riješite sustav* $Ax = y$ *metodom Cholesky. Možete li generalizirati rezultat za proizvoljni neparni* $n \in \mathbb{N}$ *?*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Zadovoljava jer je:* $\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = 3 > 0,\ \Delta_3 = 4 > 0,\ \Delta_4 = 5 > 0,\ \Delta_5 = 6 > 0,\ x^\star = (3,4,5,4,3)^T$

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) *Eksplicitno riješite sljedeći Cauchyjev problem*

$$y' = 2xe^{-x^2} - 2xy, \quad y(0) = 1.$$

(b) *Napišite Eulerov iterativni postupak za rješavanje ovog Cauchyjevog problema.*

(c) *Napišite iterativni postupak za rješavanje ovog Cauchyjevog problema uz primjenu simetrične formule.*
Rješenje: *(a)* $y(x) = e^{-x^2}(1+x^2)$*; (b)* $y_{k+1} = (1 - 2x_k h)y_k + 2hx_k e^{-x_k^2},\ y_0 = 1$ *(c)* $F_k = (1 - x_k h)y_k + hx_k e^{-x_k^2},\ y_{k+1} = (F_k + hx_{k+1}e^{-x_{k+1}^2})/(1 - hx_{k+1}),\ y_0 = 1$

Zadatak 5. [25 bodova]
(a) *Provjerite da je funkcija* $y = x^2 + e^x$ *rješenje Cauchyjevog problema*

$$y'' - y' = 2(1-x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

(b) *Odgovarajućim supstitucijama svedite problem na sustav Cauchyjevih problema i napišite odgovarajući iterativni postupak.*
Rješenje: *(a) –;* *(b)* $y_{1,k+1} = y_{1,k} + hy_{2,k},\ y_{2,k+1} = y_{2,k} + h(y_{1,k} + 2(1-x_k)),\ y_{1,0} = 1, y_{2,0} = 1$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 125 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnom kolokviju.