Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
8. prosinca 2014.

A

Matematički praktikum (2014./2015.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Neka je* $q(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ *zadana funkcija. Postavite optimizacijski problem traženja udaljenosti točke* $T_0 = (1, 0)$ *do grafa kubne parabole* q *na intervalu* $[-1, 5]$.

(b) *Napišite Newtonovu iterativnu proceduru traženja točke minimuma funkcije* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. *Primijenite ovu proceduru za rješavanje prethodno spomenutog optimizacijskog problema uz početnu aproksimaciju* $x_0 = 0$. *Odredite sljedeću aproksimaciju* x_1.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $\{x_0, f(x_0), f'(x_0), f''(x_0)\} = \{0, 1, -2, 130\}$*;*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Definirajte pojam konveksne i strogo konveksne funkcije na konveksnom skupu* $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) *Odredite područje konveksnosti funkcije* $q: [-1, 5] \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ *iz Zadatka 1.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $[2, 5]$*;*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Kako se definira stacionarna točka, a kako lokalni minimizator funkcije* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

(b) *Odredite stacionarne točke i lokalne minimizatore funkcije* $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Stacionarne točke:* $0, \pm 1$*; lokalni minimizator:* 0*;*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Neka je* $f \in C^1([a, b])$, $[a_0, b_0] := [a, b]$ *početni interval i* $x_0^\star = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ *početna aproksimacija točke minimuma funkcije* f *na* $[a, b]$. *Kako se kod metode bisekcije za diferencijabilnu funkciju određuje sljedeći podinterval* $[a_1, b_1]$, *a kako sljedeća aproksimacija* $x_1^\star$ *?*

(b) *Izračunajte aproksimacije* $x_1^\star$ *i* $x_2^\star$ *za funkciju* $q: [2, 4] \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

(c) *Koliko koraka ove metode treba primijeniti na funkciju* $q: [2, 4] \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ *za određivanje točke minimuma s točnošću* $\epsilon = 0.005$ *?*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $x_1^\star = 3.5$, $x_2^\star = 3.25$*; (c)* $k = 8$*;*

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Kako se definira Lipschitz neprekidna funkcija* $f \in Lip_L[a, b]$ *?*

(b) *Odredite Lipschitzovu konstantu* L *za funkciju* q *iz Zadatka 1.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = 23$*;*

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) *Kako se može definirati donja ograda Lipschitz neprekidne funkcije* $f \in Lip_L[a, b]$ *?*

(b) *Počevši od* $u_0 = 3.5$ *metodom Pijavskog odredite sljedeće dvije aproksimacije za funkciju* $q: [2, 4] \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = 8$, $u_1 = 2$*;* $f(u_1) = 0$, $u_2 = 2.91$*;* $f(u_1) = -2.89$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
8. prosinca 2014.

B

Matematički praktikum (2014./2015.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Neka je* $\mathcal{A} = \{a^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \dots, m\}$ *skup točaka s odgovarajućim težinama* $w_i > 0$. *Kako se definira centroid, a kako median skupa* $\mathcal{A}$ *?*

(b) *Odredite centroid i median skupa*
$\mathcal{A} = \{(-3,1),(5,7),(7,-3),(-4,-4),(7,1),(7,-1),(7,1),(1,6),(-3,6),(-4,0)\}$.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) centroid:* $(2, \frac{7}{2})$, $\operatorname{med} A = [1,5] \times \{1\}$;

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Neka je* $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *jedinična kružnica u ravnini. Kako se može definirati metrička funkcija* $d_K : K \times K \to \mathbb{R}_+$ *na* K *?*

(b) *Odredite:* $d_K\left((-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (0,1)\right)$, $d_K((0,1),(0,-1))$, $d_K((1,0),(0,-1))$.

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $d_K\left((-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (0,1)\right) = \frac{\pi}{4}$, $d_K((0,1),(0,-1)) = \pi$, $d_K((1,0),(0,-1)) = \frac{\pi}{2}$.

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Definirajte pojam kvazikonveksne i strogo kvazikonveksne funkcije na konveksnom skupu* $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) *Navedite jedan kriterij za ispitivanje kvazikonveksnosti neke funkcije i primijenite ga na funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |arctg\, x|$.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Funkcija* f *je strogo kvazikonveksna na* $\mathbb{R}$;

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *strogo kvazi konveksna funkcija. Ako je* $[a_0, b_0] = [a,b]$ *početni interval,* $\delta > 0$ *i* $x_{1,2} = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) \pm \frac{\delta}{2}$. *Kako se kod metode bisekcije za nediferencijabilnu funkciju određuje sljedeći podinterval* $[a_1, b_1]$, *a kako sljedeća aproksimacija* $x_1^\star$ *? Čemu je jednako* $b_1 - a_1$*? Kako se može ocijeniti* $|x^\star - x_1^\star|$ *?*

(b) *Metodom bisekcije odredite prve dvije aproksimacije za funkciju* $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |arctg\, x|$ *uz* $\delta = 0.2$.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $x_1^\star = 0.2$, $x_2^\star = -0.15$

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Pokažite da je svaka Lipschitz neprekidna funkcija* $f \in Lip_L[a,b]$ *neprekidna na* $[a,b]$, *ali da neprekidna funkcija ne mora biti Lipschitz neprekidna.*

(b) *Odredite Lipschitzovu konstantu, ako postoji, funkcije* $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = 12$;

Zadatak 6. [20 bodova]
(a) *Neka je* $f \in Lip_L[a,b]$ *i* $u_0 \in [a,b]$. *Koja svojstva ima funkcija* $K : [a,b] \to \mathbb{R}$. $K(u; u_0) =$

$f(u_0) - L|u - u_0|$, a koja svojstva funkcija
$P_n(u) = \max\limits_{i=0,\ldots,n} K(u;u_i) = \max\{K(u;u_n), P_{n-1}(u)\}, \qquad P_0(u) = K(u;u_0),$
koja se pojavljuje kod metode Pijavskog ?

(b) Počevši od $u_0 = 3$ metodom Pijavskog odredite sljedeće dvije aproksimacije za funkciju iz Zadatka 5. (b).
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $L = 12$, $u_1 = 0$; $f(u_1) = 16$, $u_2 = 4$; $f(u_1) = 0$;*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.