Sveučilište u Osijeku **A**
Odjel za matematiku
27. siječnja 2015.

Matematički praktikum (2014./2015.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Što znači da je funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz neprekidna funkcija ? Je li funkcija* $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^2+3, & 0 \le x \le 2 \\ (x-4)^2+1, & 2 \le x \le 6 \end{cases}$ *Lipschitz neprekidna ? Kolika je njena Lipschitzova konstanta ?*

(b) *Kako se u algoritmu* **DIRECT** *definira $\mathcal{B}$-vrijednost Lipschitz neprekidne funkcije f na intervalu $[a,b]$? Odredite $\mathcal{B}$-vrijednosti prethodno zadane funkcije na intervalu $[0,6]$, te na sva tri podintervala jednake širine.*
Rješenje: *(a) $L = 4$; (b) $\mathcal{B}(c) = f(c) - L\frac{b-a}{2}$; $\mathcal{B}(0,6) = -10$; $\mathcal{B}(0,2) = -1$; $\mathcal{B}(2,4) = -2$; $\mathcal{B}(4,6) = -2$;*

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz neprekidna funkcija, a $[a_1,b_1], \ldots, [a_n,b_n]$ skup podintervala. Kako se definira potencijalno optimalan podinterval $[a_j,b_j]$?*

(b) *Provedite prve dvije iteracije* **DIRECT** *algoritma za funkciju iz Zadatka 1. U koordinatnom sustavu nacrtajte odgovarajuće točke $(d_i, f(c_i))$ i odredite potencijalno optimalne intervale.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Potencijalno optimalni intervali su $[4,6]$ i $[\frac{10}{3},4]$;*

Zadatak 3. [25 bodova]
(a) *Odredite preslikavanje $T\colon [2,6]\times[1,3] \to [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^2$, koje pravokutnik $[2,6]\times[1,3]$ preslikava u kvadrat $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^2$. Je li T linearan operator ?*

(b) *Odredite inverzno preslikavanje T^{-1}.*

(c) *Ako je $g\colon [2,6]\times[1,3] \to \mathbb{R}$, pomoću preslikavanja T transformirajte funkciju g na kvadrat $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^2$.*

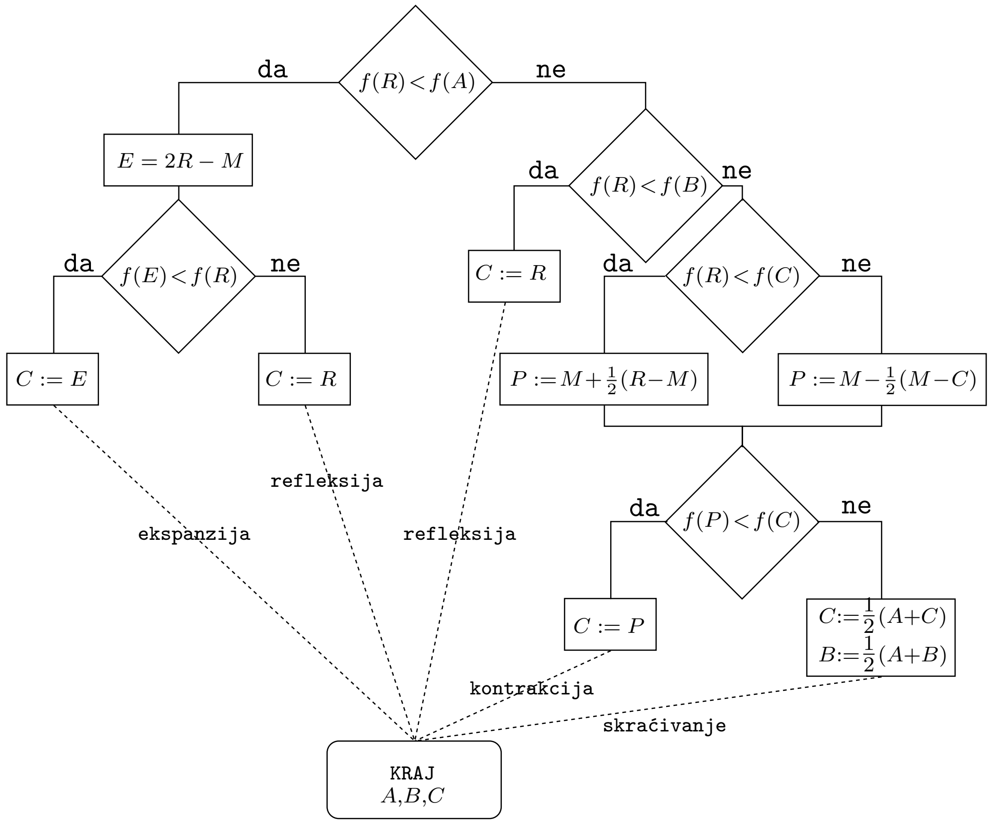
Rješenje: *(a) $Tx = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$; (b) $T^{-1}x = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$; (c) $f = g \circ T^{-1}$;*

Zadatak 4. [25 bodova]
(a) *Za funkciju $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = \max\{|2x_1+x_2-1|, |2x_1-2x_2|\}$ napravite prvu iteraciju* **DIRECT** *metode.*

(b) *Odredite potencijalno optimalne pravokutnike i skicirajte podjelu pravokutnika u idućoj iteraciji.*
Rješenje: *(a) $\{c^*, f_{min}\} = \{(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), \frac{1}{2}\}$; (b) Potencijalno optimalni pravokutnici su 1 i 2;*

Zadatak 5. [25 bodova]
Zadane su točke $T_1 = (1,2)$, $T_2 = (1,1)$ i $T_3 = (2,1)$ i funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formulom $f(x,y) = x^2y + 2xy^2$.
(a) *Odredite trokut $\triangle(ABC)$ tako da su $A,B,C \in \{T_1,T_2,T_3\}$ i $f(A) \le f(B) \le f(C)$.*

(b) Odredite centroid M točaka A i B.
(c) Odredite novi trokut koji je dobiven transformacijom trokuta $\triangle(ABC)$ primjenom jedne iteracije Nelder-Meadove metode, čiji je dijagram toka prikazan na Slici 2. Nacrtajte originalni trokut $\triangle(ABC)$ i njegovu transformaciju.
Rješenje: *(a)* $A = (1,1) = T_2, B = (2,1) = T_3, C = (1,2) = T_1, f(A) = 3, f(B) = 8, f(C) = 10$; *(b)* $M = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$; *(c)* $R = (2,0),\ f(R) = 0,\ f(R) < f(A),\ E = \left(\frac{5}{2}, -1\right),\ f(E) = -\frac{5}{4},$ $f(E) < f(R) \Rightarrow C := E$ *(ekspanzija).*



Slika 1: Dijagram toka za Nelder-Meadeovu metodu u $\mathbb{R}^2$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
27. siječnja 2015.

Matematički praktikum (2014./2015.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *konveksna neprekidno diferencijabilna funkcija.*
(a) *Pokažite da tada za nju vrijedi tzv.* gradijentna nejednakost
$f(u) \geq f(v) + f'(v)(u-v), \quad \forall u, v \in [a,b]$
Što je geometrijski smisao ove nejednakosti ?

(b) *Napišite prva tri koraka algoritma metode tangenti za traženje globalnog minimuma konveksne neprekidno diferencijabilne funkcije* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
Rješenje: *Vidi Nastavne materijale;*

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Odredite Lipschitzovu konstantu funkcije* $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 + x, & 0 \leq x \leq 4 \\ (x-5)^2 + 4, & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$.

(b) *Provedite prve dvije iteracije* ***DIRECT*** *algoritma. U koordinatnom sustavu nacrtajte odgovarajuće točke* $(d_i, f(c_i))$ *i odredite potencijalno optimalne intervale.*
Rješenje: *(a)* $L = 5$*; (b) Potencijalno optimalni intervali su* $[4,6]$ *i* $[2, \frac{8}{3}]$*;*

Zadatak 3. [25 bodova]
(a) *Odredite preslikavanje* $T\colon [2,4] \times [3,6] \to [0,2]^2$, *koje pravokutnik* $[2,4] \times [3,6]$ *preslikava u kvadrat* $[0,2]^2$. *Je li* T *linearan operator ?*

(b) *Odredite inverzno preslikavanje* T^{-1}.

(c) *Ako je* $g\colon [2,4] \times [3,6] \to \mathbb{R}$, *pomoću preslikavanja* T *transformirajte funkciju* g *na kvadrat* $[0,2]^2$.
Rješenje: *(a)* $Tx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$*; (b)* $T^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$*; (c)* $f = g \circ T^{-1}$*;*

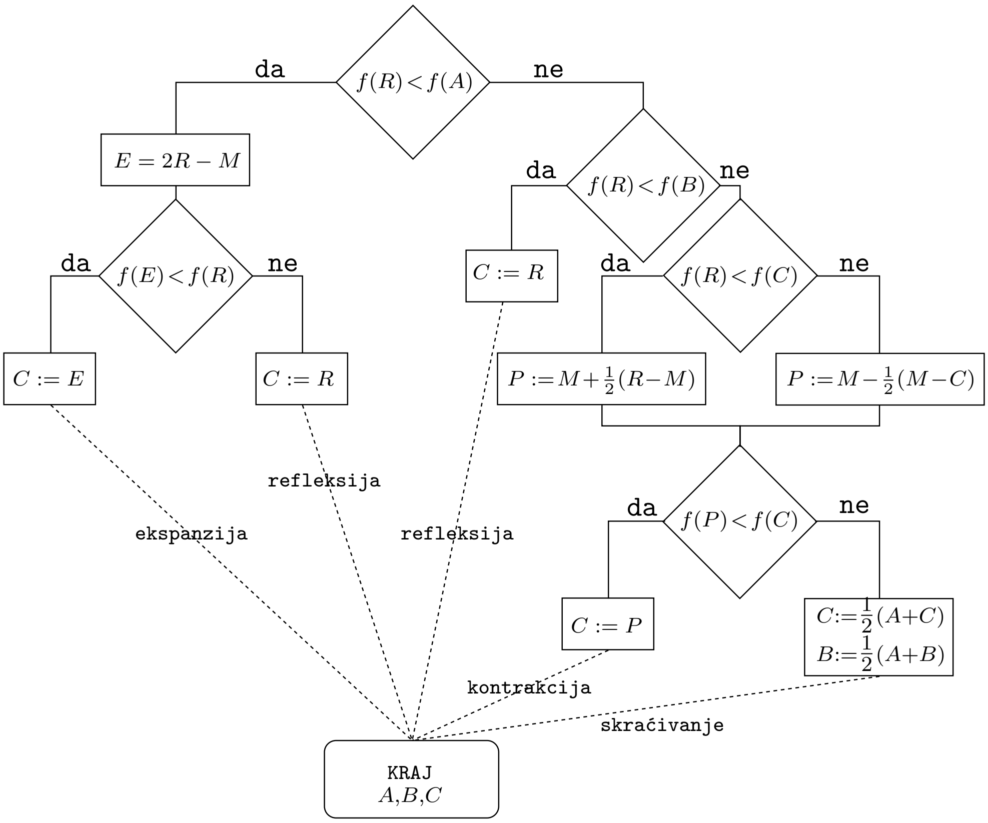
Zadatak 4. [25 bodova]
(a) *Za funkciju* $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \max\{|4x_1 + 2x_2 - 4|, |2x_1 - 2x_2|\}$ *napravite prvu iteraciju* ***DIRECT*** *metode.*

(b) *Odredite potencijalno optimalne pravokutnike i skicirajte podjelu pravokutnika u idućoj iteraciji.*
Rješenje: *(a)* $\{c^*, f_{min}\} = \{(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}), \frac{2}{3}\}$*; (b) Potencijalno optimalni pravokutnik je* 3*;*

Zadatak 5. [25 bodova]
Zadane su točke $T_1 = (1,1)$, $T_2 = (2,1)$ *i* $T_3 = (1,2)$ *i funkcija* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *formulom* $f(x,y) = 2x^2y + xy^2$.
(a) *Odredite trokut* $\triangle(ABC)$ *tako da su* $A, B, C \in \{T_1, T_2, T_3\}$ *i* $f(A) \leq f(B) \leq f(C)$.
(b) *Odredite centroid* M *točaka* A *i* B.
(c) *Odredite novi trokut koji je dobiven transformacijom trokuta* $\triangle(ABC)$ *primjenom jedne iteracije Nelder-Meadove metode, čiji je dijagram toka prikazan na Slici 2. Nacrtajte originalni*

trokut $\triangle(ABC)$ i njegovu transformaciju.

Rješenje: *(a)* $A = (1,1), B = (1,2), C = (2,1), f(A) = 3, f(B) = 8, f(C) = 10$ *; (b)* $M = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ *; (c)* $R = (0,2),\ f(R) = 0,\ f(R) < f(A),\ E = \left(-1, \frac{5}{2}\right),\ f(E) = -\frac{5}{4},\ f(E) < f(R)$ $\Rightarrow C := E$ *(ekspanzija).*



Slika 2: Dijagram toka za Nelder-Meadeovu metodu u $\mathbb{R}^2$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.