Sveučilište u Osijeku **A**
Odjel za matematiku
7. prosinca 2014.

Matematički praktikum (2015./2016.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Neka je $\mathcal{A} = \{a^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \dots, m\}$ skup točaka s odgovarajućim težinama $w_i > 0$. Kako se definira centroid, a kako median skupa $\mathcal{A}$?*

(b) *Odredite centroid i median skupa*
$\mathcal{A} = \{(8, -4), (-1, -5), (2, -5), (-5, 3), (1, -5), (10, 8), (-1, -4), (7,\ 3), (0, 10), (9, 9)\}$.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) centroid:* $(3, 1)$, $\operatorname{med} A = [1, 2] \times [-4, 3]$;

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Neka je $q(x) = -x^2 + 1$ zadana funkcija. Postavite optimizacijski problem traženja udaljenosti točke $T_0 = (1, -1)$ do grafa parabole q.*

(b) *Napišite Newtonovu iterativnu proceduru traženja točke minimuma funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Može li se ova procedura upotrijebiti za rješavanje prethodno spomenutog optimizacijskog problema u slučaju LS udaljenosti? Uz početnu aproksimaciju $x_0 = 1$, Newtonovom metodom odredite sljedeće dvije aproksimacije.*
Rješenje: *(a) – ; (b)* $x_1^\star \approx 1.66667$, $x_2^\star \approx 1.42818$.

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Definirajte pojam kvazikonveksne i strogo kvazikonveksne funkcije na konveksnom skupu $D \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(b) *Navedite jedan kriterij za ispitivanje kvazikonveksnosti neke funkcije. Je li funkcija iz Zadatka 2 kvazikonveksna na intervalu $[-2, 2]$?*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Nije kvazikonveksna na $[-2, 2]$ jer primjerice skup $D_{f(-1/\sqrt{2})}$ nije konveksan;*

Zadatak 4. [30 bodova]
(a) *Skicirajte graf funkcije* $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 6 - x^2, & x \le 2, \\ x^2 - 2x + 2, & x > 2. \end{cases}$
Je li ova funkcija strogo kvazikonveksna?

(b) *Za $\delta = 0.2$ napravite prve tri iteracije metodom polovljenja. Ocijenite pogrešku dobivene aproksimacije te stvarnu pogrešku.*

(c) *Procijenite broj iteracija potreban da bi se metodom zlatnog reza odredila točka globalnog minima ove funkcije s točnošću na dvije decimale. Odredite prve dvije iteracije.*
Rješenje: *(a) Da; (b)* $x_3^\star \approx 1.975$; *(c) 8 iteracija,* $x_2^\star \approx 2.1459$;

Zadatak 5. [25 bodova]
Zadana je konveksna funkcija $f \in C^2([a, b])$ koja u točki $\xi \in [a, b]$ postiže jedinstveni globalni minimum. Neka su $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ tri različite točke za koje su poznate vrijednosti $f(x_0)$, $f(x_1)$ te $f''(x_2)$.

a) Odredite kvadratnu interpolacijsku funkciju $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *sa sljedećim svojstvima*

$$g(x_0) = f(x_0) =: f_0, \quad g(x_1) = f(x_1) =: f_1, \quad g''(x_2) = f''(x_2) =: f_2''.$$

b) Odredite točku u kojoj funkcija g *postiže globalni minimum.*

c) Na osnovi b) predložite iterativnu formulu koja će konvergirati jedinstvenom globalnom minimumu funkcije f.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
7. prosinca 2014.

B

Matematički praktikum (2015./2016.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) *Neka je $q(x) = x^2$ zadana funkcija. Postavite optimizacijski problem traženja udaljenosti točke $T_0 = (1,2)$ do grafa parabole q. Odredite barem jedan lokalni minimum.*

(b) *Napišite Newtonovu iterativnu proceduru traženja točke minimuma funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Može li se ova procedura upotrijebiti za rješavanje prethodno spomenutog optimizacijskog problema u slučaju LS udaljenosti? Uz početnu aproksimaciju $x_0 = 1$, Newtonovom metodom odredite sljedeće dvije aproksimacije.*
Rješenje: *(a) – ; (b) $x_1^\star \approx 1.66667$, $x_2^\star \approx 1.42818$.*

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Neka je $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ jedinična kružnica u ravnini. Definirajte metričku funkciju $d_K\colon K \times K \to \mathbb{R}_+$ na K ?*

(b) *Odredite:*
$D_1 = d_K\left((1,0),(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})\right)$, $D_2 = d_K((1,0),(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}))$, $D_3 = d_K((-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}))$.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $D_1 = \frac{3}{4}\pi$, $D_2 = \frac{3}{4}\pi$, $D_1 = \frac{\pi}{2}$.*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Definirajte pojam konveksne i strogo konveksne funkcije na konveksnom skupu $D \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(b) *Odredite područje konveksnosti optimizacijske funkcije iz Zadatka 1.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) $\langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle \cup \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\rangle$;*

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Skicirajte graf funkcije $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \le 1, \\ -x^2+4x-2, & x > 1. \end{cases}$*
Je li ova funkcija strogo kvazikonveksna?

(b) *Za $\delta = 0.2$ napravite prve tri iteracije metodom polovljenja. Ocijenite pogrešku dobivene aproksimacije te stvarnu pogrešku.*

(c) *Procijenite broj iteracija potreban da bi se metodom zlatnog reza odredila točka globalnog minima ove funkcije s točnošću na dvije decimale. Odredite prve dvije iteracije.*
Rješenje: *(a) Da; (b) $x_3^\star \approx 1.025$; (c) 8 iteracija, $x_2^\star \approx 0.8541$;*

Zadatak 5. [20 bodova]
Zadana je konveksna funkcija $f \in C^1([a,b])$ koja u točki $\xi \in [a,b]$ postiže jedinstveni globalni minimum. Neka su $x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ tri različite točke za koje su poznate vrijednosti $f(x_0)$, $f(x_1)$ te $f'(x_2)$.

a) *Odredite kvadratnu interpolacijsku funkciju $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ sa sljedećim svojstvima*

$$g(x_0) = f(x_0) =: f_0, \quad g(x_1) = f(x_1) =: f_1, \quad g'(x_2) = f'(x_2) =: f_2'.$$

b) Odredite točku u kojoj funkcija g postiže globalni minimum.

c) Na osnovi b) predložite iterativnu formulu koja će konvergirati jedinstvenom globalnom minimumu funkcije f.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.