Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
26. siječnja 2016.

A

Matematički praktikum (2015./2016.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [25 bodova]
(a) *Napišite definiciju Lipschitz neprekidne funkcije. Je li funkcija* $f\colon[-2,3]\to\mathbb{R}$,
$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0,\\ (x-1)^2-1, & x\geq 0,\end{cases}$ *Lipschitz neprekidna?*

(b) *Odredite Lipschitzovu konstantu* $L>0$ *funkcije* f, *te za* $u_0=2$ *skicirajte graf funkcije* $K(u;u_0)=f(u_0)-L|u-u_0|$ *i navedite njena osnovna svojstva.*

(c) *Daje li metoda Pijavskog sve točke globalnog minimuma ili samo jedan njihov reprezentant?*
Rješenje: *(a) Da; (b)* $L=4$*; (c) Sve točke;*

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Neka je* (u_n) *niz brojeva dobiven metodom Pijavskog, a* (P_n) *niz funkcija definiran s:* $P_0(u)=K(u;u_0)$, $\quad P_n(u):=\max\{K(u;u_n),P_{n-1}(u)\}$, $n\geq 1$. *Navedite svojstva niza funkcija* (P_n).
(b) *Za funkciju* f *iz Zadatka 1 i početnu aproksimaciju* $u_0=2$ *provedite prve tri iteracije metode Pijavskog. Skicirajte funkciju* P_3.
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $u_1=-2$, $u_2=1/2$, $u_3=3$*;*

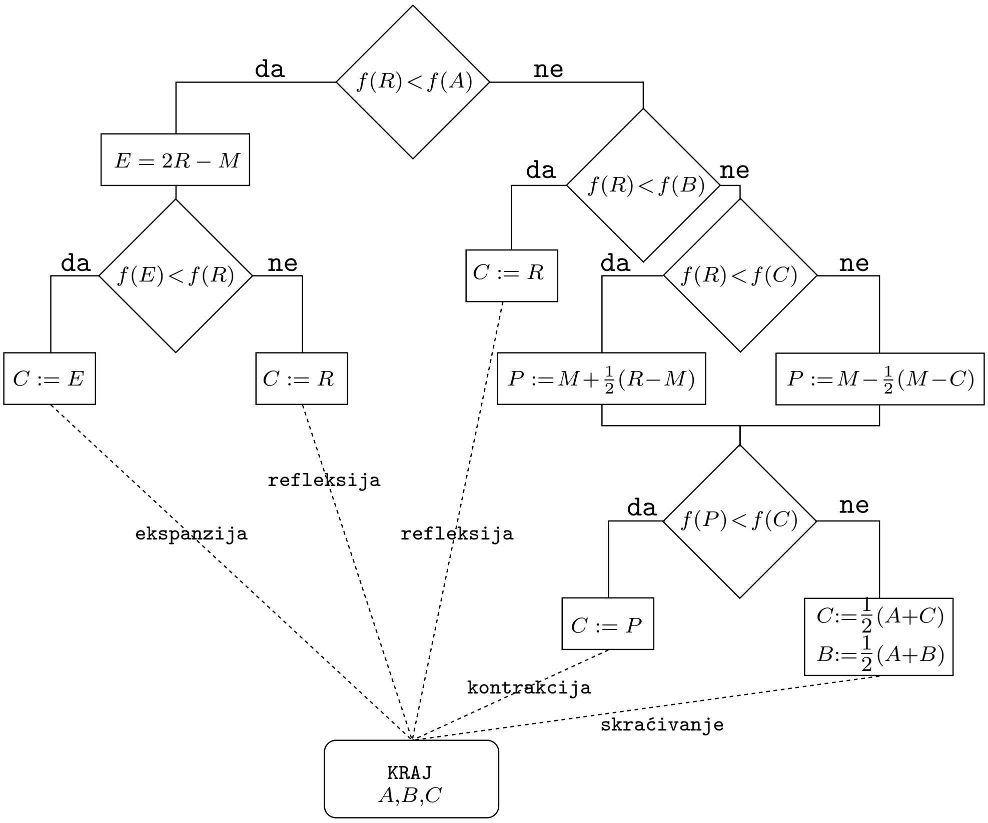
Zadatak 3. [25 bodova]
(a) *Odredite preslikavanje* $T\colon[1,4]\times[2,5]\to[0,1]^2$, *koje pravokutnik* $[1,4]\times[2,5]$ *preslikava u kvadrat* $[0,1]^2$. *Je li* T *linearan operator ?*

(b) *Odredite inverzno preslikavanje* T^{-1}.
(c) *Ako je* $g\colon[1,4]\times[2,5]\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=(x-2)^2+(y-3)^2$ *pomoću preslikavanja* T *transformirajte funkciju* g *na kvadrat* $[0,1]^2$.
Rješenje: *(a)* $Tx=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\left(x-\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$*; (b)* $T^{-1}x=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$*; (c)* $f=g\circ T^{-1}$*;*

Zadatak 4. [20 bodova]
Zadane su točke $A=(\frac{1}{2},1)$, $B=(1,0)$ *i* $C=(3,1)$ *i funkcija* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *formulom* $f(x,y)=x^2+x^2y^2$. *Odredite transformaciju trokuta* $\triangle ABC$ *primjenom jedne iteracije Nelder-Meadove metode, čiji je dijagram toka prikazan na Slici 1, gdje je* $M=\frac{1}{2}(A+B)$ *te* $R=2M-C$. *Nacrtajte originalni trokut* $\triangle ABC$ *i njegovu transformaciju.*
Rješenje: Trokut $\triangle ABC$ ***se transformira u*** $\triangle ABP$***, gdje je*** $P=(-3/8,1/4)$.

Zadatak 5. [25 bodova]
Zadana je funkcija $f:[-3,7]\to\mathbb{R}$ *formulom* $f(x)=4\sin x+\frac{1}{3}x$. *Neka je* $y=\varphi_1(x)$ *tangenta na graf funkcije* f *u točki* $x=-3$ *te* $y=\varphi_2(x)$ *tangenta na graf funkcije* f *u točki* $x=6$.
(a) *Odredite funkciju* $\Phi_{LB}:[-3,7]\to\mathbb{R}$ *zadanu s* $\Phi_{LB}(x)=\max\{\phi_1(x),\phi_2(x)\}$.
(b) *Odredite* $\Phi_{LB}([-3,7]):=\min_{x\in[-3,7]}\Phi_{LB}(x)$.
(c) *Odredite* $\Phi_{UB}([-3,7]):=f(x_2)$, *gdje je* (x_k) *niz dobiven primjenom Newtonove metode s početnom aproksimacijom* $x_0=4$.

Rješenje: *(a)* $\Phi_{LB}(x) = \begin{cases} -3.627x - 12.445, & x < 1.502, \\ 4.174x - 24.162, & x \geq 1.502, \end{cases}$*; (b)* $\Phi_{LB}([-3,7]) = 1.502$*; (c)* $x_2 = 4.629$, $\Phi_{UB}([-3,7]) = -2.4431$*;*



Slika 1: Dijagram toka za Nelder-Meadeovu metodu u $\mathbb{R}^2$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
26. siječnja 2016.

Matematički praktikum (2015./2016.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon [-2,4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} (x-1)^2+2, & x<2, \\ 3(x-3)^2, & x \geq 2. \end{cases}$,

Je li ova funkcija Lipschitz neprekidna?

(b) *Odredite Lipschitzovu konstantu, funkciju koja predstavlja donju ogradu i $\mathcal{B}$-vrijednost funkcije f na intervalu $[-2,4]$ u skladu s metodom* ***DIRECT***.

(c) *U skladu sa Shubertovom metodom odredite funkciju koja predstavlja donju ogradu funkcije f na intervalu $[-2,4]$.*

(d) *U kojem slučaju se Shubertova metoda podudara s metodom Pijavskog?*

Rješenje: *(a) Da; (b)* $L=6$, $x \mapsto \begin{cases} 6x-5, & x<1, \\ -6x+7, & x\geq 1. \end{cases}$, *$\mathcal{B}$-vrijednost:* -17; $x \mapsto \begin{cases} -6x-1, & x<5/3, \\ 6x-21, & x \geq 5/3. \end{cases}$;

(d) Vidi Nastavne materijale;

Zadatak 2. [25 bodova]

(a) *Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz neprekidna funkcija, a $[a_1,b_1], \ldots, [a_n,b_n]$ skup podintervala. Kako se definira potencijalno optimalan podinterval $[a_j,b_j]$?*

(b) *Provedite prve dvije iteracije* ***DIRECT*** *algoritma za funkciju f iz Zadatka 1. U koordinatnom sustavu nacrtajte odgovarajuće točke $(d_i, f(c_i))$ i odredite potencijalno optimalne intervale.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Potencijalno optimalni su $[0,2]$ i $[8/3,10/3]$;*

Zadatak 3. [25 bodova]

(a) *Za funkciju $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2$ provedite prvu iteraciju* ***DIRECT*** *metode.*

(b) *Odredite potencijalno optimalne pravokutnike i skicirajte podjelu pravokutnika u idućoj iteraciji.*

Rješenje: *(b) Potencijalno optimalni su 1, 2 i 4 u standardnoj numeraciji;*

Zadatak 4. [20 bodova]

Zadane su točke $A=(0,1)$, $B=(1,-1)$ i $C=(3,1)$ i funkcija $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formulom $f(x,y) = x^2y^2+2y^2$. Odredite transformaciju trokuta $\triangle ABC$ primjenom jedne iteracije Nelder-Meadove metode, čiji je dijagram toka prikazan na Slici 2, gdje je $M = \frac{1}{2}(A+B)$ te $R = 2M-C$. Nacrtajte originalni trokut $\triangle ABC$ i njegovu transformaciju.

Rješenje: Trokut $\triangle ABC$ se transformira u $\triangle ABP$, gdje je $P = (-3/4, -1/2)$.

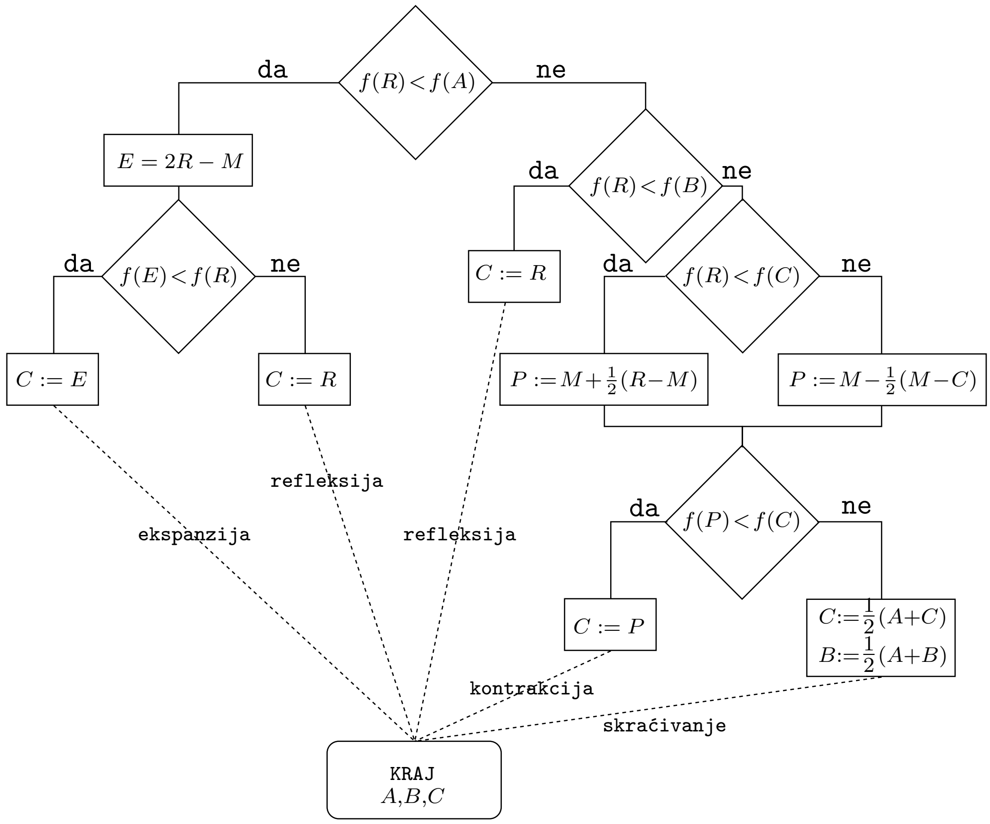
Zadatak 5. [25 bodova]

Zadana je funkcija $f:[-3,7] \to \mathbb{R}$ formulom $f(x) = 3\sin x + \frac{1}{4}x$. Neka je $y=\varphi_1(x)$ tangenta na graf funkcije f u točki $x=-3$ te $y=\varphi_2(x)$ tangenta na graf funkcije f u točki $x=5$.

(a) *Odredite funkciju $\Phi_{LB} : [-3,7] \to \mathbb{R}$ zadanu s $\Phi_{LB}(x) = \max\{\phi_1(x), \phi_2(x)\}$.*

(b) *Odredite $\Phi_{LB}([-3,7]) := \min_{x\in[-3,7]} \Phi_{LB}(x)$.*

(c) Odredite $\Phi_{UB}([-3,7]) := f(x_2)$, gdje je (x_k) niz dobiven primjenom Newtonove metode s početnom aproksimacijom $x_0 = 4$. ***Rješenje:*** *(a) $\Phi_{LB}(x) = \begin{cases} -2.72x - 9.333, & x < -0.576, \\ 1.101x - 7.132, & x \geq -0.576, \end{cases}$; (b) $\Phi_{LB}([-3,7]) = -0.576$; (c) $x_2 = 4.628$, $\Phi_{UB}([-3,7]) = -1.8323$;*



Slika 2: Dijagram toka za Nelder-Meadeovu metodu u $\mathbb{R}^2$

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u prethodnim zadaćama.