Sveučilište u Osijeku **A**
Odjel za matematiku
2. prosinca 2016.

Matematički praktikum (2016./2017.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Neka je* $\mathcal{A} = \{a^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, m\}$ *skup točaka. Kako se definira centroid, kako medijan, a kako geometrijski medijan skupa* $\mathcal{A}$ *?*

(b) *Odredite centroid i medijan skupa* $\mathcal{A} = \{(2,6), (4,9), (9,3)\}$.

(c) *Geometrijski medijan skupa* $\mathcal{A} = \{(0,0), (1,0), (-1,1)\}$ *postiže se u točki* $(0,0)$. *Može li se ovaj rezultat dobiti Weiszfeldovim algoritmom? Obrazložite svoju tvrdnju!*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) centroid:* $(5,6)$, $\operatorname{med}\mathcal{A} = (4,6)$; *(c) Ne može. Ako označimo* $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i) : i = 1,2,3\}$, *onda minimizirajuća funkcija za ovaj slučaj glasi* $F(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{3} \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$, *a njezin gradijent nije definirana u točki* $a^1 = (x_1, y_1) = (0,0)$.

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Neka je* $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = (x-2)^2 + 1$ *zadana funkcija. Postavite optimizacijski problem traženja najkraće Euklidske* ℓ_2*-udaljenosti točke* $T_0 = (3,4)$ *do grafa parabole* q. *Koliko lokalnih minimuma postiže minimizirajuća funkcija u ovom slučaju? Lokalizirajte intervale lokalnih minimuma. Na kome od njih se postiže globalni minimum?*

(b) *Postavite optimizacijski problem traženja najkraće* ℓ_1*-udaljenosti točke* $T_0 = (3,4)$ *do grafa parabole* q.

Rješenje: *(a) Minimizirajuća funkcija postiže dva lokalna minimuma; Intervali u kojima se nalaze lokalni minimumi su primjerice* $[0,1]$ *i* $[3,4]$; *Globalni minimum postiže se na intervalu* $[3,4]$ *(b) Vidi Nastavne materijale.*

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Dokažite da je svaka konveksna funkcija* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ *kvazikonveksna.*
(b) *Vrijedi li obrat ove tvrdnje? Obrazložite.*
Rješenje: *Vidi nastavne materijale.*

Zadatak 4. [20 bodova]
Zadana je funkcija $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + 2y^2$ *te neka je* $(x_0, y_0) = (2,3)$. *Odredite vektor* $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ *i* $\alpha > 0$ *tako da vrijedi*

$$f(x_0 + \alpha p_1, y_0 + \alpha p_2) < f(x_0, y_0).$$

Rješenje: *Primjerice:* $p = -\nabla f(x_0, y_0) = -(4,4)$, $\alpha^\star = \operatorname*{argmin}_{\alpha>0} f(x_0 + \alpha p_1, y_0 + \alpha p_2) = \frac{1}{2}$.

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Skicirajte graf funkcije* $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \leq 1, \\ |x^2 - 1| + 4, & x > 1. \end{cases}$

(b) *Odredite broj iteracija potreban da bi se metodom zlatnog reza odredila točka globalnog minima ove funkcije s točnošću na dvije decimale. Odredite prve dvije iteracije.*

Rješenje: *(b) Potrebno je 15 iteracija;* $x_1^* = x_2^* = 1.18034$;

Zadatak 6. [20 bodova]
Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 < x_1$, $x_0, x_1 \in [a,b]$. *Odredite* $\overline{x} = \operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} g(x)$, *gdje je* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *sa sljedećim svojstvima:*

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma = f(x_0) =: f_0, \\ g(x_1) &= \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = f(x_1) =: f_1, \\ g'(x_0) &= 2\alpha x_0 + \beta = f'(x_0) =: f_0'. \end{aligned}$$

Rješenje: $\overline{x} = -\frac{\beta}{2\alpha} = x_0 - \frac{1}{2}\frac{(x_0 - x_1)f_0'}{f_0' - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}$.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku

B

2. prosinca 2016.

Matematički praktikum (2016./2017.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Neka je* $\mathcal{A} = \{a^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, m\}$ *skup točaka. Kako se definira centroid, kako medijan, a kako geometrijski medijan skupa* $\mathcal{A}$ *?*

(b) *Odredite centroid i medijan skupa* $\mathcal{A} = \{(1,1), (6,9), (8,5)\}$.
(c) *Može li se geometrijski medijan proizvoljnog skupa* $\mathcal{A}$ *postići u nekoj od točaka skupa* $\mathcal{A}$*? Obrazložite svoju tvrdnju!*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) centroid:* $(5,5)$, $\operatorname{med}\mathcal{A} = (6,5)$*; (c) Može, primjerice za* $n = 1$ *geometrijski medijan je jednak medijanu koji je za neparan* m *točka iz skupa* $\mathcal{A}$.

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Neka je* $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = |x-4| + 2$ *zadana funkcija. Postavite optimizacijski problem traženja najkraće* ℓ_1*-udaljenosti točke* $T_0 = (5,5)$ *do grafa funkcije* q*. Skicirajte sliku. Gdje se postiže tražena najkraća udaljenost?*

(b) *Gdje bi se postigla tražena najkraća udaljenost za točku* $T_0 = (4,4)$*? Skicirajte sliku.*
Rješenje: *(a) Na segmentu* $\overline{AB}$*, gdje je* $A = (5,3)$, $B = (7,5)$*; (b) Na slomljenom segmentu* $\overline{ABC}$*, gdje je* $A = (2,4)$, $B = (4,2)$, $C = (6,4)$.

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Neka je* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *konveksna funkcija definirana na konveksnom skupu* D*. Dokažite da je nivo - skup* $D_\lambda(f) = \{x \in D : f(x) \le \lambda\}$ *konveksan skup za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$.
(b) *Vrijedi li obrat prethodne tvrdnje? Obrazložite.*
Rješenje: *Vidi nastavne materijale.*

Zadatak 4. [20 bodova]
Zadana je funkcija $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 2y^2$ *te neka je* $(x_0, y_0) = (2,3)$*. Odredite vektor* $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ *i* $\alpha > 0$ *tako da vrijedi*

$$f(x_0 + \alpha p_1, y_0 + \alpha p_2) < f(x_0, y_0).$$

Rješenje: *Primjerice:* $p = -\nabla f(x_0, y_0) = (4, -4)$, $\alpha^\star = \operatorname*{argmin}_{\alpha > 0} f(x_0 + \alpha p_1, y_0 + \alpha p_2) = \frac{1}{8}$.

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \le 3, \\ |x^2 - 1| - 6, & x > 3. \end{cases}$

(b) *Odredite broj iteracija potreban da bi se metodom zlatnog reza odredila točka globalnog minima ove funkcije s točnošću na dvije decimale. Odredite prve dvije iteracije.*
Rješenje: *(b) Potrebno je 15 iteracija;* $x_1^* = 1.18034$, $x_2^* = 2.36068$*;*

Zadatak 6. [20 bodova]

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *i* $x_0 < x_1$, $x_0, x_1 \in [a,b]$. *Odredite* $\overline{x} = \operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} g(x)$, *gdje je* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *sa sljedećim svojstvima:*

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma = f(x_0) =: f_0, \\ g'(x_0) &= 2\alpha x_0 + \beta = f'(x_0) =: f_0', \\ g'(x_1) &= 2\alpha x_1 + \beta = f'(x_1) =: f_1'. \end{aligned}$$

Rješenje: $\overline{x} = -\frac{\beta}{2\alpha} = x_0 - \frac{x_1 - x_0}{f_1' - f_0'} f_0'$.

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.