Sveučilište u Osijeku
Odjel za matematiku
31. siječnja 2017.

A

Matematički praktikum (2016./2017.)

2. kolokvij

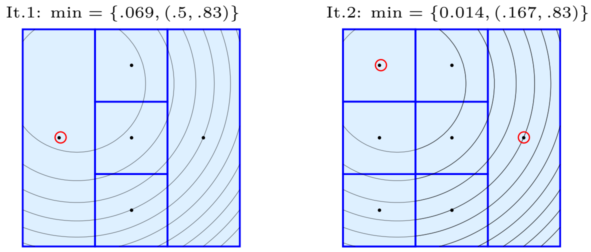
Zadatak 1. [20 bodova]
(a)*Kada za funkciju $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna?*
(b) *Pokažite da je funkcija* $g\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2+1, & \text{ako je } 0 \le x < 2 \\ 2|x-3|+2, & \text{ako je } 2 \le x < 3 \\ |x-3|+2, & \text{ako je } 3 \le x \le 5. \end{cases}$ *Lipschitz-neprekidna i odredite najmanju moguću Lipschitzovu konstantu* $L > 0$.
(c) *Konstruirajte jednu donju ogradu ove funkcije.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = 6$; *(c) Primjerice,* $d(x) = f(y) - 6|x-y|$ *je donja ograda za svaki* $y \in [0,5]$;

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Ako je* $f \in Lip_L[a,b]$, (u_n) *niz čvorova i* (P_n) *niz funkcija definiranih kao u Pijavskij-algoritmu slomljenih pravaca, koja svojstva ima niz funkcija* (P_n)*?*
(b) *Za funkciju iz Zadatka 1 uz* $u_0 = 2$ *provedite* 3 *koraka Pijavskij-algoritma.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $u_3 = \frac{7}{2}$;

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Kako se određuje donja ograda funkcije* $f \in Lip_L[a,b]$ *kod Shubertove metode?*
(b) *Za funkciju iz Zadatka 1 provedite* 3 *koraka Shubertovog algoritma.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $u_3 = \frac{11}{3}$;

Zadatak 4. [20 bodova]
(a)*Kada za funkciju $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna?*
(b) *Je li funkcija* $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1,x_2) = (x_1 - .25)^2 + (x_2 - .75)^2$ *Lipschitz-neprekidna? Ako je, odredite Lipschitzovu konstantu* $L > 0$.
(c) `DIRECT` *algoritmom provedite prve dvije iteracije dijeljenja jediničnog kvadrata* $[0,1]^2$ *na kome je definirana funkcija* g. *Odredite potencijalno optimalne subpravokutnike i trenutnu vrijednost minimuma.*
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = \frac{3}{2}$; *(c) Vidi Sliku 1;*

Zadatak 5. [20 bodova]
Zadane su točke $T_1 = (2,1)$, $T_2 = (1,1)$ *i* $T_3 = (3,2)$ *te funkcija* $f(x,y) = x^2y + 2xy^2$.
(a) *Odredite trokut* $\triangle(ABC)$ *tako da su* $A,B,C \in \{T_1,T_2,T_3\}$ *i* $f(A) \le f(B) \le f(C)$.
(b) *Odredite* T *centroid trokuta* $\triangle(ABC)$ *te vrijednost funkcije* $f(T)$.
(c) *Odredite refleksiju, ekspanziju, unutarnju i vanjsku kontrakciju te skraćivanje trokuta* $\triangle(ABC)$ *te vrijednosti funkcije u centroidu svake od tih transformacija. U kojem centroidu funkcija postiže najmanju vrijednost?*



Slika 1: Dijeljenje kvadrata $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ u slučaju funkcije $g(x_1, x_2) = (x_1 - .25)^2 + (x_2 - .75)^2$. Crvenim kružićima označeni su centri potencijalno optimalnih subpravokutnika

Rješenje: (a) $A = (1,1)$, $B(2,1)$, $C = (3,2)$; (b) $T = (2, 4/3), f(T) \approx 12.44$; (c) refleksija: $\triangle(ABR)$, $R = (0,0)$, $f(T_R) \approx 1.56$, ekspanzija: $\triangle(ABE)$, $E = (-3/2, -1)$, $f(T_E) \approx 0.19$, unutarnja kontrakcija: $\triangle(ABP_1)$, $P_1 = (3/4, 1/2)$, $f(T_{P_1}) \approx 3.04$, vanjska kontrakcija: $\triangle(ABP_2)$, $P_2 = (9/4, 3/2)$, $f(T_{P_2}) \approx 8.34$, skraćivanje: $\triangle(AMH)$, $M = (3/2, 1)$, $H = (2, 3/2)$, $f(T_S) = 6.71$. Funkcija postiže najmanju vrijednost u centroidu ekspanzije.

Zadatak 6. [20 bodova]
Zadana je funkcija $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$, formulom $f(x) = 2\cos x + \frac{1}{5}x$.
(a) Dokažite da je $f(x) \geq -2 + \frac{1}{5}x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.
(b) Odredite jednadžbu tangente $y = t_1(x)$ na graf funkcije f u točki $x = -4$ te jednadžbu tangente $y = t_2(x)$ na graf funkcije f u točki $x = 4$.
(c) Odredite $\underset{x\in[-4,4]}{\operatorname{argmin}} \max\left\{-2 + \frac{1}{5}x, t_1(x), t_2(x)\right\}$.

Rješenje: (a) Iz $-1 \leq \cos x \leq 1$; (b) $t_1(x) = -7.36171 - 1.3136x$, $t_2(x) = -7.36171 + 1.7136x$; (c) -3.54234;

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
31. siječnja 2017.

Matematički praktikum (2016./2017.)

2. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a)*Kada za funkciju $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da je Lipschitz-neprekidna?*

(b) *Pokažite da je funkcija* $g\colon [0,9] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} |x-1|+2, & \textit{ako je } 0 \le x < 1 \\ 2, & \textit{ako je } 1 \le x < 2 \\ .5(x-3)^2+1.5, & \textit{ako je } 2 \le x < 5 \\ |x-6|+2.5, & \textit{ako je } 5 \le x \le 9. \end{cases}$ *Lipschitz-neprekidna i odredite najmanju moguću Lipschitzovu konstantu* $L > 0$.

(c) *Konstruirajte jednu donju ogradu ove funkcije.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = 2$; *(c) Primjerice,* $d(x) = f(y) - 2|x-y|$ *je donja ograda za svaki* $y \in [0,9]$;

Zadatak 2. [20 bodova]
(a) *Kako se određuje donja ograda funkcije* $f \in Lip_L[a,b]$ *kod* **`DIRECT`** *optimizacijskog algoritma?*

(b) *Za funkciju iz Zadatka 1 provedite prva* 3 *koraka* **`DIRECT`** *optimizacijskog algoritma.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) aproksimacija minimuma nakon treće iteracije je* $\{\hat{c}, f(\hat{c})\} = \{\frac{5}{2}, \frac{13}{8}\}$;

Zadatak 3. [20 bodova]
(a) *Ako je* $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ *niz subintervala dobiven algoritmom* **`DIRECT`**, *kako se definira potencijalno optimalni interval?*

(b) *Za funkciju iz Zadatka 1 odredite potencijalno optimalne intervale dobivene u Zadatku 2.*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) Potencijalno optimalni intervali su:* $[2,3]$, $[3,4]$ *i* $[6,9]$;

Zadatak 4. [20 bodova]
(a) *Kada za funkciju* $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, *kažemo da je Lipschitz-neprekidna?*

(b) *Je li funkcija* $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = (x_1 - .75)^2 + (x_2 - .25)^2$ *Lipschitz-neprekidna? Ako je, odredite Lipschitzovu konstantu* $L > 0$.

(c) **`DIRECT`** *algoritmom provedite prve dvije iteracije dijeljenja jediničnog kvadrata* $[0,1]^2$ *na kome je definirana funkcija* g. *Odredite potencijalno optimalne subpravokutnike i trenutnu vrijednost minimuma.*

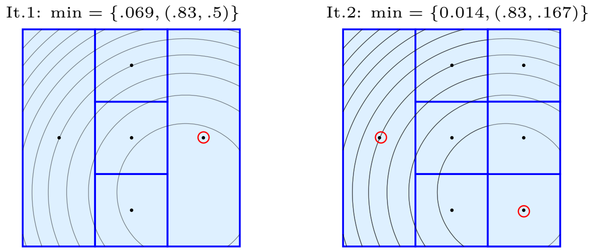
Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b)* $L = \frac{3}{2}$; *(c) Vidi Sliku 2;*

Zadatak 5. [20 bodova]
Zadane su točke $T_1 = (5,1)$, $T_2 = (2,1)$ *i* $T_3 = (1,2)$ *te funkcija* $f(x,y) = x^2y + 2xy^2$.

(a) *Odredite trokut* $\triangle(ABC)$ *tako da su* $A, B, C \in \{T_1, T_2, T_3\}$ *i* $f(A) \le f(B) \le f(C)$.

(b) *Odredite* T *centroid trokuta* $\triangle(ABC)$ *te vrijednost funkcije* $f(T)$

(c) *Odredite refleksiju, ekspanziju, unutarnju i vanjsku kontrakciju te skraćivanje trokuta* $\triangle(ABC)$ *te vrijednosti funkcije u centroidu svake od tih transformacija. U kojem centroidu funkcija postiže najmanju vrijednost?*



Slika 2: Dijeljenje kvadrata $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ u slučaju funkcije $g(x_1,x_2) = (x_1 - .75)^2 + (x_2 - .25)^2$. Crvenim kružićima označeni su centri potencijalno optimalnih subpravokutnika

Rješenje: (a) $A = (2,1)$, $B(1,2)$, $C = (5,1)$ (b) $T = (8/3, 4/3)$, $f(T) \approx 18.96$ (c) refleksija: $\triangle(ABR)$, $R = (-2,2)$, $f(T_R) \approx 2.04$, ekspanzija: $\triangle(ABE)$, $R = (-11/2, 5/2)$, $f(T_E) \approx -4.33$, unutarnja kontrakcija: $\triangle(ABP_1)$, $P_1 = (-1/4, 3/4)$, $f(T_{P_1}) \approx 5.93$, vanjska kontrakcija: $\triangle(ABP_2)$, $P_2 = (3.25, 1.25)$, $f(T_{P_2}) \approx 14.51$, skraćivanje: $\triangle(AMH)$, $M = (3/2, 3/2)$, $H = (7/2, 1)$, $f(T_S) = 12.7$. Funkcija postiže najmanju vrijednost u centroidu ekspanzije.

Zadatak 6. [20 bodova]
Zadana je funkcija $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$, formulom $f(x) = 3\cos x + \frac{1}{3}x$.

(a) Dokažite da je $f(x) \geq -3 + \frac{1}{3}x$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

(b) Odredite jednadžbu tangente $y = t_1(x)$ na graf funkcije f u točki $x = -4$ te jednadžbu tangente $y = t_2(x)$ na graf funkcije f u točki $x = 4$.

(c) Odredite $\operatorname*{argmin}_{x\in[-4,4]} \max\left\{-2 + \frac{1}{5}x, t_1(x), t_2(x)\right\}$.

Rješenje: (a) Iz $-1 \leq \cos x \leq 1$, (b) $t_1(x) = -11.0426 - 1.93707x$, $t_2(x) = -11.0426 + 2.60374x$, (c) -3.54234

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.