Grafička ilustracija pogreške u rješenju sustava linearnih jednadžbi

1 Uvod

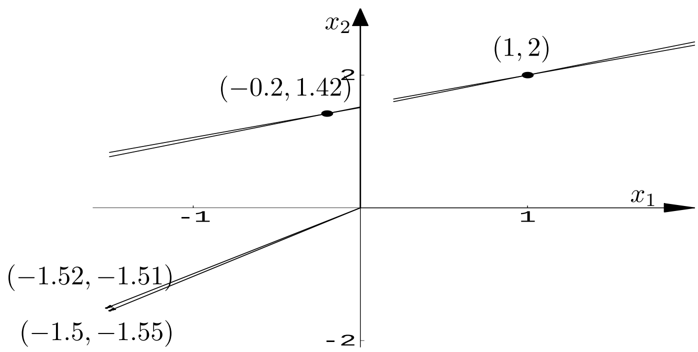
Zadan je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 0.5x_1 - x_2 &= -1.5 \\ 0.45x_1 - x_2 &= -1.55, \end{aligned} \tag{1}$$

čija rješenja su $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Pretpostavimo da smo greškom malo promijenili desnu stranu sustava te da sustav sada glasi

$$\begin{aligned} 0.5x_1 - x_2 &= -1.52 \\ 0.45x_1 - x_2 &= -1.51. \end{aligned} \tag{2}$$

Rješenja novog sustava su $x_1 = -0.2$ i $x_2 = 1.42$. Na *Slici 1.* prikazane su uređeni parovi rješenja sustava (1) i (2), dobiveni kao sjecišta odgovarajućih pravaca. Uočimo da je malena promjena desne strane sustava uzrokovala veliku promjenu rješenja.



Slika 1.

Općenito, prilikom rješavanja sustava linearnih jednadžbi

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

mogu se u elementima vektora $\mathbf{b}$ kao i matrice $\mathbf{A}$ pojaviti pogreške. Te pogreške kao što smo vidjeli na prethodnom primjeru mogu ponekad za posljedicu imati izrazito veliku promjenu rješenja sustava. Zanima nas o čemu ta promjena ovisi. U tu svrhu analizirat ćemo problem rješavanja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepozananice.

2 Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

Pretpostavimo da je $\mathbf{x}^\star = [x_1^\star, x_2^\star]^T$ rješenje sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, && (3)\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1. && (4) \end{aligned}$$

Označimo s p_1 i p_2 pravce čije su jednadžbe (3) i (4). Neka je $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi = \angle(p_1, p_2)$ kut između pravca pravaca p_1 i p_2. Vrijedi da je

$$\cos\varphi = a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22}.$$

Nakon jednostavnog računa dobivamo da rješenja sustava jednadžbi (3)-(4) iznose:

$$x_1^\star = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{i} \quad x_2^\star = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{5}$$

Zbog pogrešaka umjesto sustava (3)-(4) rješavamo sustav

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 + \Delta\, b_1 && (6)\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 + \Delta\, b_2, && (7) \end{aligned}$$

gdje su $\Delta\, b_1$ i $\Delta\, b_2$ pogreške. Označimo li s $\tilde{\mathbf{x}}^\star = \left[\ \tilde{x}_1^\star, \tilde{x}_2^\star\ \right]^T$ rješenje sustava (6)-(7), nakon jednostavnog računa dobivamo da su:

$$\tilde{x}_1^\star = \frac{a_{22}(b_1 + \Delta\, b_1) - a_{12}(b_2 + \Delta\, b_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{i} \quad \tilde{x}_2^\star = \frac{a_{11}(b_2 + \Delta\, b_2) - a_{21}(b_1 + \Delta\, b_1)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{8}$$

Relativno odstupanje vektora $\tilde{\mathbf{x}}^\star$ od vektora $\mathbf{x}^\star$ mjerit ćemo brojem

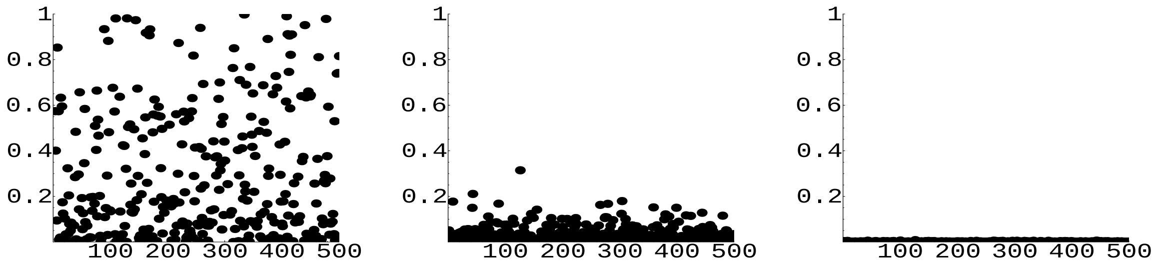
$$\eta_R := \frac{\|\tilde{\mathbf{x}}^\star - \mathbf{x}^\star\|^2}{\|\mathbf{x}^\star\|^2} = \frac{(x_1^\star - \tilde{x}_1^\star)^2 + (x_2^\star - \tilde{x}_2^\star)^2}{(x_1^\star)^2 + (x_2^\star)^2}.$$

Iz (5) i (8) dobivamo da je

$$\eta_R = \frac{(\Delta\, b_1)^2 + (\Delta\, b_2)^2 - 2\Delta\, b_1 \Delta\, b_2 \cos\varphi}{b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2\cos\varphi}. \tag{9}$$

Prema (9) očigledno η_R bitno ovisi o kutu φ, što ćemo ilustrirati sljedećim numeričkim eksperimentom.

Primjer 1. *Neka su* $\Delta\, b_1^{(i)}, \Delta\, b_2^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, 0.05)$, $b1 = 2, b_2 = 0.1$ *te* $\varphi_1 = \frac{\pi}{100}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{10}$ *i* $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. *Na Slici 2. prikazane su točke* $(i, \eta_R^{(i)})$, $i = 1, \ldots, 500$ *redom za kutove* φ_1, φ_2 *i* φ_3.



Slika 2.

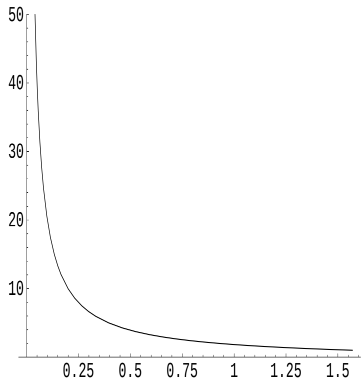
U prethodnom primjeru uočavamo da za male kutove φ dobivamo velike brojeve za η_R. Također primijetimo da je

$$\eta_R = \frac{((\Delta\, b_1)^2 + (\Delta\, b_2)^2)(1+\cos\varphi) - (\Delta\, b_1 + \Delta\, b_2)^2\cos\varphi}{(b_1^2+b_2^2)(1-\cos\varphi) + (b_1-b_2)^2\cos\varphi} \leq \kappa^2(\varphi)\frac{(\Delta\, b_1)^2 + (\Delta\, b_2)^2}{b_1^2+b_2^2}, \tag{10}$$

pri čemu je

$$\kappa(\varphi) := \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}. \tag{11}$$

Na *Slici 3.* prikazan je graf funkcije κ odakle vidimo da je κ padajuća funkcija kuta φ.



Slika 3.

Primijetimo da formulu (9) možemo zapisati u obliku

$$(x_1^\star - \tilde{x}_1^\star)^2 + (x_2^\star - \tilde{x}_2^\star)^2 = r^2, \quad r := \sqrt{((x_1^\star)^2 + (x_2^\star)^2)\frac{(\Delta\, b_1)^2 + (\Delta\, b_2)^2 - 2\Delta\, b_1 \Delta\, b_2 \cos\varphi}{b_1^2+b_2^2-2b_1b_2\cos\varphi}}, \tag{12}$$

što u geometrijskom smislu znači da točka $(\widetilde{x_1^\star}, \widetilde{x_2^\star})$ leže na kružnici polumjera r sa središtem u točki $(x_1^\star, x_2^\star)$. Ilustrirat ćemo to na primjerima dvaju bitno različita sustava linearnih jednadžbi.

Primjer 2. *Neka su* $(\Delta\, b_1)^{(i)}, (\Delta\, b_2)^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, 0.05)$, $i = 1, \ldots, 250$. *Za* $i = 1, \ldots, 250$ *zadani su sustavi*

sustav i)

$$\begin{aligned} 0.5x_1 - x_2 &= -1.5 + (\Delta\, b_1)^{(i)} \\ 0.45x_1 - x_2 &= -1.55 + (\Delta\, b_2)^{(i)}, \end{aligned} \tag{13}$$

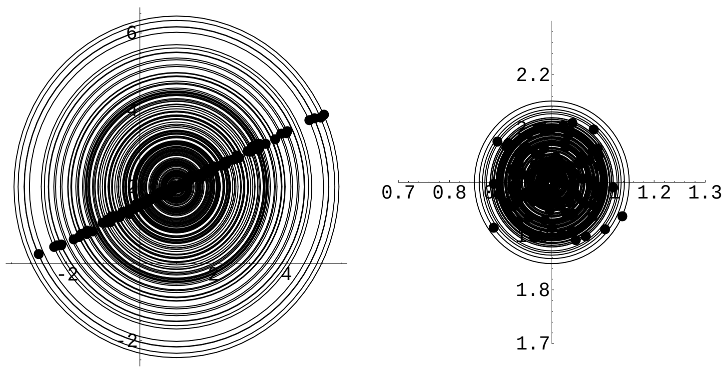
čija su rješenja $x_1 = 1$ *i* $x_2 = 2$. *Za kut* φ_1 *između odgovarajućih pravaca vrijedi da je* $\cos\varphi_1 = 0.0408$.

sustav ii)

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 2 + (\Delta\, b_1)^{(i)} \\ x_1 + 4x_2 &= 9 + (\Delta\, b_2)^{(i)}, \end{aligned} \tag{14}$$

čija rješenja su također $x_1 = 1$ *i* $x_2 = 2$. *Za kut* φ_2 *između odgovarajućih pravaca vrijedi da je* $\cos\varphi_2 = 0$, *tj.* $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Na Slici 3. prikazane su redom kružnice (12) te rješenja za sustave (13) i (14). Primijećujemo da se uređeni parovi rješenja sustava (13) sadržani u elipsi sa središtem u točki $(1, 2)$*, koja je izrazito izduljena. Za razliku od toga skup svih uređenih parova rješenja sustava (14) sadržan je u malom krugu sa središtem u točki* $(1, 2)$.



Slika 3.

Ovako pravilno geometrijsko mjesto uređenih parova rješenja sustava iz prethodnog primjera nije posve slučajno. Za potpuno razumijevanje ove pojave potrebno nam je nekoliko važnih pojmova i tvrdnji numeričke linearne algebre, koje ćemo navesti u sljedećoj točki.

3 Singularna dekompozicija

Singularna dekompozicija matrice izrazito je važna i koristi se u različitim primjenama numeričke matematike. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1. *(Demmel, 1997) Neka je $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica ranga r. Tada postoji dijagonalna matrica*

$$\mathbf{\Sigma} = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$$

te ortogonalne matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takve da vrijedi

$$\mathbf{M} = \mathbf{U\Sigma V}^T. \tag{15}$$

Brojeve $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ zovemo singularne vrijednosti matrice $\mathbf{M}$*, a rastav (15) zovemo* singularna dekompozicija matrice $\mathbf{M}$.

Kako je $\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{V\Sigma}^T\mathbf{\Sigma V}^T$, kvadrati singularnih vrijednosti σ_i^2 su svojstvene vrijednosti simetrične pozitivno semidefinitne matrice $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$, a stupci matrice $\mathbf{V}$ su odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori.

Primjedba 1. Pretpostavimo da je $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kvadratna regularna matrica te da njezina singularna dekompozicija glasi

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\,\mathbf{V}^T,$$

pri čemu su $\sigma_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Jednostavno se vidi da singularna dekompozicija matrice $\mathbf{M}^{-1}$ glasi

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{V}\mathrm{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \ldots, \frac{1}{\sigma_n})\mathbf{U}^T.$$

U sljedećem jednostavnom primjeru vidjet ćemo kako odrediti singularnu dekompoziciju matrice iz $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Primjer 3. *Zadana je matrica* $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$*. Jednostavno se može pokazati da su $\lambda_1 = 9$ i $\lambda_2 = 1$ svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$, a*

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T \quad i \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T,$$

odgovarajući normirani svojstveni vektori. Prema tome imamo da su

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da (15) možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{U\Sigma} = \mathbf{MV},$$

odakle dobivamo je

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Konačno, singularna dekomozicija matrice $\mathbf{M}$ *glasi:*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T.$$

Vratimo se sada sustavu linearnih jednadžbi (3)-(4), odnosno (6)-(7) te primijetimo da za odgovarajuću matricu sustava $\mathbf{A}$ vrijedi da je

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednostavno se vidi da su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ jednake $\lambda_1 = 1 + \cos\varphi$ i $\lambda_2 = 1 - \cos\varphi$ te da odgovarajuće singularne vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ glase:

$$\sigma_1 = \sqrt{1+\cos\varphi}, \quad \sigma_2 = \sqrt{1-\cos\varphi}.$$

To znači da matricu $\mathbf{A}$ možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\,\mathrm{diag}\,(\sqrt{1+\cos\varphi}, \sqrt{1-\cos\varphi})\mathbf{V}^T,$$

gdje su $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ortogonalne matrice. Uzmemo li u obzir da je $\mathbf{x}^\star$ rješenje sustava (3)-(4), a $\tilde{\mathbf{x}}^\star$ rješenje sustava (6)-(7) te ako oduzmemo ta dva sustava dobivamo da je

$$\tilde{\mathbf{x}}^\star = \mathbf{x}^\star + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Delta b} = \mathbf{x}^\star + \mathbf{V}\mathrm{diag}(\frac{1}{\sqrt{1+\cos\varphi}}, \frac{1}{\sqrt{1-\cos\varphi}})\,\mathbf{U}^T\mathbf{\Delta b}. \tag{16}$$

Neka je

$$K(0, \|\mathbf{\Delta b}\|) := \{\mathbf{y} : \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{\Delta b}\|\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

kružnica sa središtem u ishodištu polumjera $\|\mathbf{\Delta b}\|$. Uočimo da je u tom slučaju skup

$$\mathbf{A}^{-1}K(0, \|\mathbf{\Delta b}\|) := \{\mathbf{V}\mathrm{diag}(\frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\sqrt{1+\cos\varphi}}, \frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\sqrt{1-\cos\varphi}})\,\mathbf{U}^T\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| = 1\},$$

zarotirana elipsa sa središtem u ishodištu čije pouluosi leže na stupcima matrice $\mathbf{V}$ te imaju duljinu $\frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\sqrt{1+\cos\varphi}}$ i $\frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\sqrt{1-\cos\varphi}}$.

Prema (16) to znači da se vektor $\tilde{\mathbf{x}}^\star$ nalazi na elipsi $E(\mathbf{x}^\star)$ sa središtem u točki $x^\star$ čije poluosi leže na stupcima matrice $\mathbf{V}$ te imaju duljinu $\frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\sqrt{1+\cos\varphi}}$ i $\frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\sqrt{1-\cos\varphi}}$. Sada je očito da su duljine poluosi elipse $E(\mathbf{x}^\star)$ približno jednake ako je kut $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$. Ako je $\varphi \approx 0$ duljina druge poluosi izrazito velik broj, što znači da se odgovarajuća elipsa degenerira u pravac.

4 Kondicija matrice i opći sustav

Neka su σ_1 i σ_2, $\sigma_1 \geq \sigma_2$ singularne vrijednosti matrice regularne $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Označimo li s $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) := \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ uočavamo da zbog (11) vrijedi da je

$$\kappa(\varphi) = \mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

To znači da formulu (10) možemo zapisati u obliku:

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}^\star - \mathbf{x}^\star\|}{\|\mathbf{x}^\star\|} \leq \mathrm{cond}(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Broj $\mathrm{cond}(\mathbf{A})$ zovemo kondicija matrice $\mathbf{A}$.

Općenito, kondiciju proizvoljne matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo kao (Press at al., 1989; Scitovski, 1999):

$$\mathrm{cond}(\mathbf{A}) := \frac{\sigma_1}{\sigma_r},$$

pri čemu je σ_1 najveća, a σ_r najmanja pozitivna singularna vrijednost matrice $\mathbf{A}$

Pretpostavimo da je zadan sustav linearnih jednadžbi

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

no zbog pogreške rješavamo sustav

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}. \tag{18}$$

Ako s $\mathbf{x}^\star$ označimo rješenje sustava (17), a s $\tilde{\mathbf{x}}^\star$ rješenje sustava (18), može se pokazati (Press at al., 1989; Scitovski, 1999) da vrijedi

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}}^\star - \mathbf{x}^\star\|}{\|\mathbf{x}^\star\|} \leq \mathrm{cond}(\mathbf{A})\frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \tag{19}$$

Slične se ocjene mogu pokazati i slučajevima kada se pogreška pojavljuje u matrici $\mathbf{A}$, te kada se pojavljuju istovremeno i u matrici $\mathbf{A}$ i u vektoru $\mathbf{b}$. Više o tome se može naći u (Press at al., 1989; Scitovski, 1999).

Literatura

J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philalelphia, 1997.

W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

R. Scitovski, *Numerička matematika*, Elektrotehnički fakultet Osijek, Osijek, 1999.