Algebarska aproksimacija kružnicom

1 Algebarska aproksimacija kružnicom

U koordinatnoj ravnini zadani su podaci (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$ koje treba aproksimirati s kružnicom $K(S, r)$, sa središtem u točki $S = (p, q)$ i radijusom r čija pripadna jednadžba glasi

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \tag{1}$$

Uočimo da jednadžbu (1) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0,$$

pri čemu su $\alpha \neq 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} = (x, y)^T, \mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$, $c \in \mathbb{R}$. Primijetimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|\mathbf{a}\|_2 = 1$, pri čemu smo s $\mathbf{a}$ označili vektor $\mathbf{a} = (\alpha, b_1, b_2, c)^T$.

Zadatak 1. *Dokažite da je* $p = -\frac{b_1}{2\alpha}$, $q = -\frac{b_2}{2\alpha}$ *te* $r = \sqrt{\frac{\|\mathbf{b}\|_2^2}{4\alpha^2} - \frac{c}{\alpha}}$.

Jedan od pristupa za rješavanje problema aproksimacije podataka s kružnicom je minimizacija sume kvadrata

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i + \mathbf{b}^T \mathbf{x}_i + c \Big)^2 \to \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4 : \|a\|_2 = 1} . \tag{2}$$

Ovakav pristup u literaturi poznat je još i pod imenom algebarska implicitna aproksimacija kružnicom, vidi primjerice (Gander at al., 1994). Nije teško vidjeti da problem (2) možemo zapisati u obliku

$$\|\mathbf{B}\mathbf{a}\|_2 \to \min, \quad \|\mathbf{a}\|_2 = 1, \tag{3}$$

gdje je

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}.$$

U sljedećem teoremu dano je eksplicitno rješenje problema (3).

Teorem 1. *Optimalni vektor* $\mathbf{a}^\star$ *koji je rješenje problema (3) jednak je jediničnom svojstvenom vektoru koji je pridružen najmanjoj svojstvenoj vrijednosti matrice* $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

Dokaz. Primijetimo da je $\mathbf{B}^T\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ simetrična matrica. Prema teoremu o dijagonalizaciji simetrične matrice (Demmel, 1997) postoji ortogonalna matrica $\mathbf{V}$ i dijagonalna matrica $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ takva da je $\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$. Za jedinični vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^4$ vrijedi

$$\|\mathbf{B}\mathbf{a}\|_2^2 = (\mathbf{B}\mathbf{a})^T \mathbf{B}\mathbf{a} = \mathbf{a}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{a} = \mathbf{a}^T\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T\mathbf{a} = \mathbf{u}^T\mathbf{D}\mathbf{u},$$

gdje je $\mathbf{u} = \mathbf{V}^T\mathbf{a}$, $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. Tada je zbog ortogonalnosti matrice $\mathbf{V}^T$

$$\|\mathbf{Ba}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i^2 \geq \lambda_{\min}(\mathbf{B}^T\mathbf{B}).$$

Posljednja nejednakost posljedica je činjenice da se minimum konveksne kombinacije postiže na najmanjem broju. Nije teško vidjeti da se jednakost postiže upravo kada je $\mathbf{a}$ jednak jediničnom svojstvenom vektoru koji je pridružen najmanjoj svojstvenoj vrijednosti matrice $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

□

Konačno, kružnicu koja najbolje aproksimira zadane podatke dobivamo na primjenom sljedećeg jednostavnog algoritma:

ALGORITAM

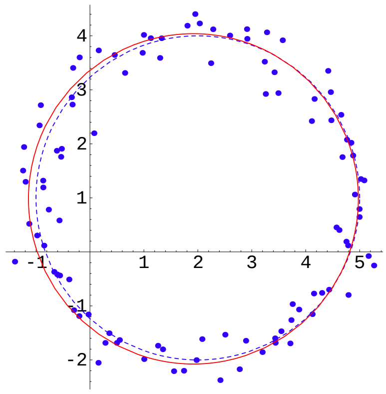
1. Na osnovi podataka definirati matricu $\mathbf{B}$ te odrediti $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.
2. Odrediti jedinični svojstveni vektor $\mathbf{a}^\star = (\alpha^\star, b_1^\star, b_2^\star, c^\star)^T$ koji koji je pridružen najmanjoj svojstvenoj vrijednosti matrice $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.
3. Izračunati središte kružnice $S(p^\star, q^\star)$ te radijus $r^\star$, pri čemu su

$$p^\star = -\frac{b_1^\star}{2\alpha^\star}, \quad q^\star = -\frac{b_2^\star}{2\alpha^\star}, \quad r^\star = \sqrt{\frac{\|\mathbf{b}^\star\|_2^2}{4\alpha^{\star 2}} - \frac{c^\star}{\alpha^\star}}.$$

Odgovarajući *Mathematica* modul izgleda ovako:

```
algaapro[pod_] := Module[{redak, stupac, b1, b2, c, a},
      redak = Length[pod];
      stupac = 4;
      B = Table[0, {i, redak}, {j, stupac}];
      Table[B[[i, 1]] = pod[[i, 1]]^2 + pod[[i, 2]]^2;
        B[[i, 2]] = pod[[i, 1]];
        B[[i, 3]] = pod[[i, 2]];
        B[[i, 4]] = 1, {i, redak}];
      sv = N[Last[Eigenvectors[Transpose[B].B]]];
      a = sv[[1]]; b1 = sv[[2]]; b2 = sv[[3]]; c = sv[[4]];
      p = -b1/(2a); q = -b2/(2 a); r = Sqrt[((b1^2 + b2^2)/(4 a^2)) - c/a];
      ];
```

Primjer 1. *Zadani su podaci* $(2 + 3\sin\varphi_i + \varepsilon_i, 1 + 3\sin\varphi_i + \delta_i)$, $i = 1, \ldots, 100$, *gdje su* $\varepsilon, \delta \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$ *te* $\varphi = \frac{2\pi}{99}(i-1)$, $i = 1, \ldots, 100$. *Primjenom prethodnog modula odredit ćemo kružnicu koja aproksimira zadane podatke. Na Slici 1 prikazani su podaci, originalna kružnica* $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ *te rekonstruirana kružnica.*



Slika 1. ... Originalna kružnica — rekonstruirana kružnica

Primjer 2. *Umjesto Mathematica naredbe za računanje svojstvenog vektora koji je pridružen najmanjoj svojstvenoj vrijednosti, koristite ranije napravljen modul koji se zasniva na inverznoj power metodi.*

Primjedba 1. Problem određivanja jediničnog svojstvenog vektora koji je pridružen najmanjoj svojstvenoj vrijednosti matrice $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ ekvivalentan je problemu određivanja desnog singularnog vektora koji je pridružen najmanjoj singularnoj vrijendosti matrice $\mathbf{B}$, vidi primjerice (Demmel, 1997). Iz numeričkih razloga treba izbjeći računanje produkta $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ te je stoga uputnije problem rješavati primjenom singularne dekompozicije matrice $\mathbf{B}$.

Problem aproksimacije točaka ravnine općenito krivuljama drugog reda čest je problem u literaturi. Osim opisanog pristupa algebarske aproksimacije postoji mnoštvo različitih numeričkih procedura za rješavanje tog problema (Gander at al., 1994; Sabo i Baumgartner, 2001; Späth, 1996, 1997).

Literatura

J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

W. Gander, G. H. Golub and R. Strebel, *Least squares fitting of circles and ellipses*, BIT, **34**(1994), 558–578.

D. Kincaid,W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000

K. Sabo, A. Baumgartner, *One method for searching the best discrete TL_p approximation*, Mathematical Communications - Supplement, **1**(2001), 63–68.

H. Späth,*Least-squares fitting by circles*, Computing, **57**(1996), 179–185.

H. Späth, *Least-squares fitting of ellipses and hyperbolas*, Computational Statistics, **12**(1997), 329–341.

J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 1993.