Numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednažbi

Prilikom rješavanja diferencijalnih jednadžbi u praktičnim primjenama vrlo često nailazimo na slučajeve, koje ne možemo elementarno riješiti ili bi elementarno rješenje bilo previše složeno. Tada problem možemo pokušati riješiti numeričkim metodama. Primjenom numeričkih metoda za rješavanje diferencijalnih jednadžbi s početnim ili rubnim uvjetom, dobivamo tablično zadanu funkciju, pri čemu korak u vrijednosti nezavisne varijable možemo dovoljno fino izabrati.

Promatramo sljedeći problem:

– *za zadanu funkciju* $f(x, y)$ *treba naći funkciju* $y(x)$, $x \in [x_0, b]$, *koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu* 1. *reda:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

uz početni uvjet:

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Ovaj problem nazivamo Cauchyjev problem ili inicijalni problem[1]. U nekim slučajevima (primjerice, ako je funkcija f linearna) ovaj problem može se riješiti elementarno (kao u *Primjeru 1*). Međutim, u većini praktičnih problema prisiljeni smo tražiti aproksimativno rješenje. Štoviše, u praktičnim istraživanjima obično se javlja problem rješavanja sustava diferencijalnih jednadžbi:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_k), \quad i = 1, ..., k,$$

s početnim uvjetima: $y_i(x_0) = c_i$, $i = 1, \ldots, k$, ili u vektorskom obliku:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{c}, \tag{3}$$

gdje je: $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T$.

Primjedba 1. Diferencijalna jednadžba višeg reda može se svesti na sustav diferencijalnih jednadžbi 1.reda. Primjerice diferencijalna jednadžba 3. reda:

$$y''' = g(x, y, y', y''),$$

s početnim uvjetima: $y(0) = c_1$, $y'(0) = c_2$, $y''(0) = c_3$, uz supstitucije:

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad z_3 = y'',$$

[1] Engl. = initial value problem, njem. = Anfangswertaufgabe

prelazi u sustav diferencijalnih jednadžbi 1. reda:

$$\begin{array}{ll} z_1' = z_2, & z_1(0) = c_1 \\ z_2' = z_3, & z_2(0) = c_2 \\ z_3' = g(x, z_1, z_2, z_3), & z_3(0) = c_3. \end{array}$$

Zato ima smisla posebnu pozornost posvetiti rješavanju Cauchyjevog problema (1)-(2), odnosno (3).

Pretpostavke za egzistenciju i jedinstvenost rjesenja>

- funkcije $f_1, \ldots, f_m$ trebaju biti neprekidne po svim argumentima u zatvorenom podrucju
$$D = \{|x| \leq a, \quad |y_i - c_i| \leq b, \quad i = 1, \ldots, m\}$$
- Zbog neprekidnosti sve funkcije su ogranicene, tj.
$$\exists M > 0, \quad |f_i|_D \leq M, \quad i = 1, \ldots, m$$
- $f_1, \ldots, f_m \in Lip_L D$, tj.
$$|f_i(x, y_1', \ldots, y_m') - f_i(x, y_1'', \ldots, y_m'')| \leq \|y' - y'\|, \quad \forall (x, y_1', \ldots, y_m'), (x, y_1'', \ldots, y_m'')$$

1 Eulerova metoda

Promatramo problem (1)-(2). Kako je zbog (1) u točki x_0 poznat koeficijent smjera tangente na traženu funkciju $x \mapsto y(x)$:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0),$$

onda možemo funkciju y u okolini točke x_0 aproksimirati linearnim aproksimantom, čiji je graf tangenta (*vidi Sliku 8.1*):

$$l(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \tag{4}$$

Za maleni h, točka $x_1 = x_0 + h$ je bliska točki x_0, pa ćemo vrijednost tražene funkcije y u točki x_1 aproksimirati vrijednošću linearnog aproksimanta (4)

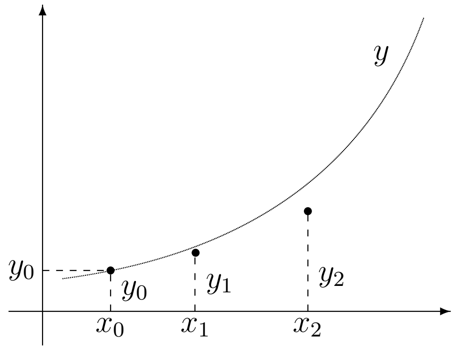
$$y_1 \equiv l(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

Ponavljajući postupak, dobivamo Eulerov iterativni proces:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

koji daje aproksimaciju funkcije y u točkama:

$$x_i = x_0 + i\,h, \quad i = 0, 1, \ldots$$



Slika 1: Eulerova metoda

Eulerova metoda[2] ne upotrebljava se za rješavanje praktičnih problema. Ako duljina koraka h nije jako malena, pogreške se mogu brzo akumulirati, a ako odaberemo potrebno maleni korak h, broj iteracija postaje nerazumno velik (*vidi Primjer 2*). Ipak, ova metoda ima važno teorijsko značenje, jer se druge, mnogo efikasnije metode, zasnivaju na ovoj ideji.

Primjer 1. *Treba riješiti Cauchyjev problem:*

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1,$$

na intervalu $[0, 1]$.

Rješenje problema je funkcija $y = 2e^x - x - 1$. Potražit ćemo rješenje i pomoću Eulerove metode uz korake $h = .2$ i $.1$ uz korištenje *Mathematica*-modula:

```
Euler[a_, b_, h_, f_, y0_] :=
 Module[{x = a, y = y0, tab = {{a, y0}}},n = Floor[(b - a)/h];
   If[IntegerQ[n], n = n, n = n + 1];
   Do[y = y + h f[x, y]; x = i h;
    tab = Append[tab, {x, y}]
    , {i, n}]; tab
                           ]
```

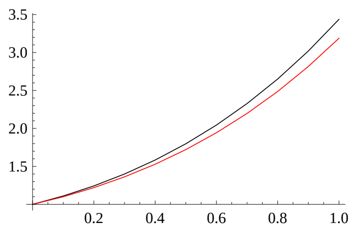
[2]Ovu metodu neki puta naći ćemo u literaturi pod imenom: **metoda tangenti** ili Cauchyjeva metoda jer je Cauchy otprilike 100 godina kasnije (1828.) dokazao konvergenciju ove metode

Dobiveni rezultati, kao i usporedba sa stvarnim vrijednostima prikazani su u *Tablici 8.1.*

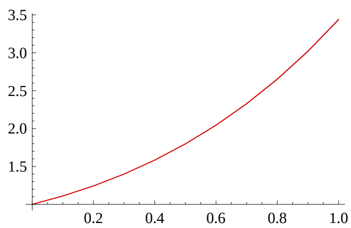
		$h = 0.2$		$h = 0.1$	
x_k	$y(x_k)$	y_k	$y(x_k) - y_k$	y_k	$y(x_k) - y_k$
0	1	1	0	1	0
0.1	1.11034			1.11	$-.00034$
0.2	1.24281	1.24	$-.00281$	1.241	$-.00181$
0.3	1.39972			1.3951	$-.00462$
0.4	1.58365	1.568	$-.01565$	1.57461	$-.00904$
0.5	1.79744			1.78207	$-.01537$
0.6	2.04424	2.0016	$-.04264$	2.02028	$-.02396$
0.7	2.32751			2.29231	$-.03520$
0.8	2.65108	2.56192	$-.08916$	2.60154	$-.04954$
0.9	3.01921			2.95169	$-.06752$
1	3.43656	3.2743	$-.16226$	3.34686	$-.08970$

Tablica 8.1. *Rješavanje inicijalnog problema* $y' = x + y,\ y(0) = 1$

(a) Eulerova metoda



(b) Simetricna formula



Slika 2: Numericko rjesavanje Caucyjevog problema iz Primjera 1

Primjer 2. *Promatrajmo jednostavni Cauchyjev problem:*

$$y' = y, \qquad y(0) = 1.$$

U ovom slučaju Eulerov iterativni postupak (5) postaje:

$$y_{k+1} = y_k(1 + h), \qquad k = 0, 1, \dots$$

ili općenito, za neki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$y_n = y_{n-1}(1 + h) = y_{n-1}(1 + h)^2 = \cdots = y_0(1 + h)^n = (1 + h)^n.$$

Da bismo izračunali vrijednost tražene funkcije y u nekoj fiksnoj točki $x > 0$, u intervalu $[0, x]$ odredit ćemo n jednoliko raspoređenih točaka x_i s razmakom $h = \frac{x}{n}$. Primjenom Eulerove metode dobivamo

$$y^\star(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \qquad (*)$$

Kada pustimo $n \to \infty$ (tj. $h \to 0$), dobivamo egzaktno rješenje: $y(x) = \exp(x)$, što znači da Eulerova metoda konvergira.

U svrhu ispitivanja brzine konvergencije Eulerove metode u ovom slučaju raspišimo (*) pomoću Taylorove formule

$$y^\star(x) = \exp\left(n\ln(1+\frac{x}{n})\right) = \exp\left(x - \frac{x^2}{2n} + \dots\right) \approx e^x e^{-\frac{x^2}{2n}}.$$

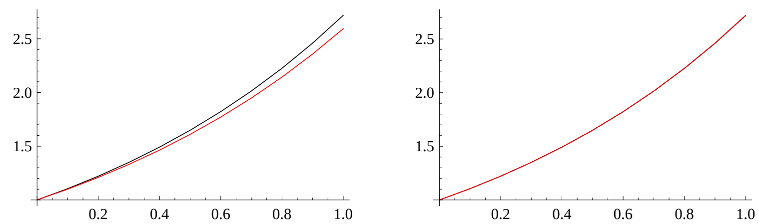
Tako dobivamo približnu pogrešku aproksimacije u fiksnoj točki x:

$$\Delta y^\star(x) = |y^\star(x) - e^x| \approx e^x\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2n}}\right).$$

Tako primjerice, ako želimo vrijednost funkcije y u točki $x = 1$ dobiti s jednom točnom decimalom ($\epsilon = 0.05$), potrebno je staviti $n = 27$ (odnosno $h \approx 0.04$). Za 5 točnih decimala ($\epsilon = 0.5 \times 10^{-5}$) treba staviti $n = 271\,828$ ($h \approx 0.000004$).

```
In[1]:=Clear[n]
       eps = .05; x = 1;
          nn = NSolve[eps == Exp[x] (1 - Exp[-x^2/(2 n)]), n]
             h = x/Floor[n /. nn] // N
```

(a) Eulerova metoda (b) Simetricna formula



Slika 3: Numericko rjesavanje Caucyjevog problema iz Primjera 1

Primjedba 2. Kod Eulerove metode sljedeću aproksimaciju funkcije uvijek izračunavamo samo na bazi jedne prethodne aproksimacije. Zato kažemo da je to jednokoračna metoda. Eulerova metoda može se poboljšati pomoću tzv. simetrične formule.

Ako (5) modificiramo na sljedeci nacin

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \tfrac{1}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right), \quad y_0 = y(x_0), \quad k = 0, 1, 2\dots \tag{6}$$

onda primjerice za $k = 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= \tfrac{1}{2}h\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right) \\ y_1 - \tfrac{1}{2}hf(x_1, y_1) &= F_0, \quad F_0 = y_0 + \tfrac{1}{2}hf(x_0, y_0) \end{aligned}$$

sto znaci da treba rijesiti nelinearnu jednadzbu da bi se dobila vrijednost y_1.

Opcenito, (6) mozemo zapisati kao

$$y_{k+1} - \tfrac{1}{2}hf(x_{k+1}, y_{k+1}) = F_k, \quad F_k = y_k + \tfrac{1}{2}hf(x_k, y_k) \tag{7}$$

Uz poznavanje y_k, sljedeca vrijednost y_{k+1} dobiva se rjesavanjem nelinearne jednadzbe (7). Zato kazemo da je simetricna formula implicitna metoda. Ona daje bolje rezultate od Eulerove metode (vidi Sliku 2b.

```
Sim[a_, b_, h_, f_, y0_] :=
 Module[{x = a, y = y0, tab = {{a, y0}}},n = Floor[(b - a)/h];
   If[IntegerQ[n], n = n, n = n + 1];
   Do[x = i h; F = y + .5 h f[x - h, y];
   sol = NSolve[yy - .5 h f[x, yy] - F, yy]; y = yy /. sol[[1]];
    tab = Append[tab, {x, y}]
    , {i, n}]; tab
                           ]
```

Primjer 3. *(Kosi hitac u zrakom ispunjenom prostoru)*
Pretpostavljamo da je otpor zraka proporcionalan trenutnoj brzini kretanja projektila.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\gamma\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, \\ m\ddot{y} &= -m\,g-\gamma\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, \end{aligned}$$

gdje je $\gamma = C\delta S$ (vidi Primjer 6, str.10).

Uz oznake

$$z = \tfrac{\gamma}{m}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, \qquad u := \dot{x}, \qquad v := \dot{y}$$

prethodni sustav postaje

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -z\,u, \\ \ddot{y} &= -g-z\,v, \end{aligned}$$

čime dobivamo Cauchyjev problem s četiri diferencijalne jednadžbe prvog reda s odgovarajućim početnim uvjetima

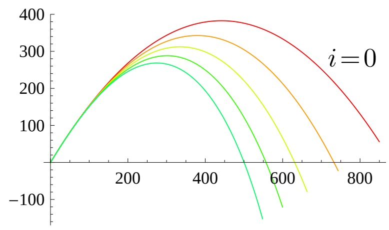
$$\begin{aligned} &\tfrac{dx}{dt} = u, && \tfrac{du}{dt} = -z\,u, \\ &\tfrac{dy}{dt} = v, && \tfrac{dv}{dt} = -g-z\,v, \\ &x(0) = 0, \quad y(0) = 0, && u(0) = z_0\cos\varphi, \quad v(0) = z_0\sin\varphi \end{aligned}$$

gdje je φ izlazni kut projektila, a z_0 njegova pocetna brzina.
Primjedba: koristite $\mathrm{kg-m-s}$ sustav.

Eulerova metoda:

$$\begin{aligned} &x_{n+1} = x_n + h\,u_n, && u_{n+1} = u_n - hz_nu_n, \\ &y_{n+1} = y_n + h\,v_n, && v_{n+1} = v_n - h(g+z_nv_n), \\ &z_n := \tfrac{\gamma}{m}\sqrt{u_n^2+v_n^2}. && \end{aligned}$$

```
In[1]:= n = 1700;
        Euler[h_, ff_] := Module[{g = 9.81, gam = .25 10^(-3) ff,
        x = 0, y = 0, u = 100 Cos[Pi/3], v = 100 Sin[Pi/3]},
         tab = {{x, y, u, v}} // N;
   Do[x = x + h u; y = y + h v; z = gam Sqrt[u^2 + v^2];
                u = u - h z u; v = v - h (g + z v);
    tab = Append[tab, {x, y, u, v}]
          ,{i, n}]; tab]
In[2]:=Do[
            ee = Euler[.01, i];
            xx = ee[[All, 1]]; yy = ee[[All, 2]];
            sl[i + 1] =  ListPlot[Table[{xx[[i]], yy[[i]]}, {i, n}],
               PlotStyle -> {Hue[.1 i]}, Joined -> True, ImageSize -> 200], {i, 0, 4
In[3]:=Show[sl[1], sl[2], sl[3], sl[4], sl[5]]
```



Slika 4: Kosi hitac u zrakom ispunjenom prostoru s form-faktor $i = 0, \dots, 4$

Vektorski:

$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(a) = c,$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}; \quad f(x,y) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ -zu \\ -g - zv \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ -zy_3 \\ -g - zy_4 \end{bmatrix}; \quad c = z_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix},$$

$z = \frac{\gamma}{m}\sqrt{y_3^2 + y_4^2}, \qquad z_0(900\, m/s$ za puščani metak$)$

Euler:

$$y^{\star}_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n).$$

Modifikacija:

$$\begin{aligned} t_{n+\frac{1}{2}} &:= t_n + \tfrac{h}{2}, \\ y_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \tfrac{1}{2}h\, f(t_n, y_n), \\ y^{\star\star}_{n+1} &= y_{n+\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}h\, f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Richardson:

$$y_{n+1} = y_{n+1}^{\star\star} + (y_{n+1}^{\star\star} - y_{n+1}^{\star}).$$

Runge-Kutta 2. reda:

$$\begin{aligned} k_1 &= h_n f(t_n, y_n), \\ k_2 &= h_n f(t_n + \tfrac{h_n}{2}, y_n + \tfrac{k_1}{2}), \\ y_{n+1} &= y_n + k_2. \end{aligned}$$

Literatura:(Dahlquist and Björck, 2008)

Zadatak 1.

$$\tfrac{dy}{dt} = -\tfrac{1}{2}y^3, \qquad y(1) = 1.$$

Rjesenje: $y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Osim navedenih, postoje i brojne druge metode za numeričko rješavanje Cauchyjevog problema, kao primjerice: Richardson-ove ekstrapolacije (specijalno Bulirsch-Stoerova metoda), višekoračne metode: predictor-corrector metoda, Milne-ova metoda, Adams-ova metoda itd. (vidi primjerice Gear (1971), Ortega (1981), Stoer (1993)).

2 Metoda Runge - Kutta

Promatramo Cauchyjev problem (1)-(2):

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Posebno važno mjesto za rješavanje ovog problema u primjenama zauzima dobro poznata Runge–Kutta (RK) metoda[3]. Pretpostavimo da poznajemo aproksimaciju y_n tražene funkcije $x \mapsto y(x)$ u točki x_n. Želimo odrediti $(n+1)$-vu aproksimaciju y_{n+1} u točki $x_n + h$. U tu svrhu na intervalu $(x_n, x_n + h)$ u nekoliko strateških točaka aproksimirat ćemo vrijednost funkcije $x \mapsto f(x, y(x))$, te pomoću njih što bolje aproksimirati razliku $y_{n+1} - y_n$. Egzaktni izvod i analiza ovih metoda izlazi iz okvira ove skripte, a može se naći primjerice kod Schwarz (1986)) Stoer (1993).

Najjednostavniji primjer iz familije RK metoda je tzv. Heunova metoda

$$\begin{aligned} y_{n+1} \;&=\; y_n + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2), \\ &\quad k_1 = hf(x_n, y_n), \\ &\quad k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1). \end{aligned} \tag{8}$$

[3]Ideju je prvi izložio C. Runge u radu *Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen*, Mathematische Annalen **46**(1895), 167–178, a kasnije razvio W. Kutta u radu *Beitrag zur naherungsweisen Integration von Differentialgleichungen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **46**(1901), 435–453

Primjedba 3. Kako je

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int\limits_{x_n}^{x_n+h} \frac{dy}{dx}\, dx = \int\limits_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x))\, dx, \tag{9}$$

ako pretpostavimo da je f samo funkcija od x, Heunova metoda (8) odgovara trapeznom pravilu (**??**), str. **??**, koja ima pogrešku reda veličine $O(h^2)$. Primijetimo također da je za svaku aproksimaciju y_n potrebno dva puta izračunavati vrijednost funkcije f.

Klasična RK metoda definirana je s

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ & k_1 = hf(x_n, y_n), \\ & k_2 = hf(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_1}{2}), \\ & k_3 = hf(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{k_2}{2}), \\ & k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned} \tag{10}$$

Primjedba 4. Ako pretpostavimo da je f samo funkcija od x, onda iz (9) možemo pokazati da RK-metoda (10) odgovara Simpsonovoj formuli (**??**), str. **??**, uz zamjenu $h \mapsto \frac{h}{2}$. Sjetimo se da Simpsonova formula ima pogrešku reda veličine $O(h^2)$, što se prenosi i na RK metodu (10) i u općem slučaju – kada je f funkcija od x i od y. Primijetimo također da je kod RK metode (10) za svaku aproksimaciju y_n potrebno četiri puta izračunavati vrijednost funkcije f.

Primjer 4. *Na primjeru Cauchyjevog problema*

$$y' = 30(\sin x - y), \qquad y(0) = 0,$$

čije je egzaktno rješenje lako dobiti (linearna diferencijalna jednadžba!),

$$y(x) = \frac{30}{901}\left(30 \sin x - \cos x + e^{-30x}\right),$$

na intervalu $[0, 1]$ *usporedit ćemo efikasnost Eulerove i RK metode (10).*

Rezultati prikazani u *Tablici 8.2* dobiveni su korištenjem niže navedenog *Mathematica*-modula

```
RK[a_, b_, h_, f_, y0_] := Module[{i, x, y, k1, k2, k3, k4},
   n=Floor[(b-a)/h];
   If[IntegerQ[n], n=n, n=n+1];  tab=Table[{a+(i-1) h,0}, {i,n+1}];
   x=a; y=y0; tab[[1,2]] = y0;
        Do[
            k1 = h f[x, y];              k2 = h f[x+h/2, y+k1/2];
            k3 = h f[x+h/2, y+k2/2];     k4 = h f[x+h, y+k3];
                y = y + (1/6) (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);
                          tab[[i, 2]] = y;    x = x+h, {i,2,n+1}]
                                  ]
```

		Eulerova metoda		RK metoda	
x_k	$y(x_k)$	y_k	$y(x_k)-y_k$	y_k	$y(x_k)-y_k$
0	0	0	0	0	0
0.1	0.068250	0.29950	-0.23125	0.112391	$-.04414$
0.2	0.165899	-0.00299	0.16889	0.228523	$-.06262$
0.3	0.263387	0.89255	-0.62915	0.349063	$-.08567$
0.4	0.358318	-0.61684	0.97515	0.475312	$-.11699$
0.5	0.449673	2.67195	-2.22228	0.60946	$-.15979$
0.6	0.536535	-3.64997	4.18651	0.754908	$-.21837$
0.7	0.618036	9.23259	-8.61456	0.916725	$-.29869$
0.8	0.693362	-16.31310	17.00650	1.10226	$-.40890$
0.9	0.76176	34.97620	-34.21450	1.32199	$-.56023$
1	0.822547	-67.42800	68.25060	1.59067	$-.76813$

Tablica 8.2 $y' = 30(\sin x - y), \quad y(0) = 0, \quad x \in [0,1]$

Primjer 5. *Treba riješiti Cauchyjev problem:*

$$y' = xy^2 + 1, \qquad y(0) = 0,$$

na intervalu $[0,1]$.

Primjenom RK metode (10) dobivamo rezultate vidljive u *Tablici 8.3.*

x_k	y_k
0	0
0.1	0.1
0.2	0.2
0.3	0.302
0.4	0.4065
0.5	0.5162
0.6	0.6345
0.7	0.7666
0.8	0.92
0.9	1.1073
1	1.3503

Tablica 8.3 $y' = xy^2 + 1, \; y(0) = 0$

t_k	v_k	$v(t_k)$
0	0	0
2	18.568	18.573
4	32.193	32.211
6	40.093	40.123
8	44.070	44.1
10	45.933	45.955
12	46.766	46.79
14	47.152	47.16
16	47.319	47.323
18	47.391	47.394
20	47.424	47.425

Tablica 8.4 $\dot v = g - \frac{\gamma}{m}v^2, \; v(0) = 0$

Primjer 6. *Promatramo slobodni pad tijela mase m u zraku.*

Uz pretpostavku da je otpor zraka proporcionalan kvadratu brzine, vrijedi jednadžba gibanja

$$m\ddot s = mg - \gamma \dot s^2, \qquad (*)$$

gdje je $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$, $\gamma = C\,\delta\,S$, gdje je S površina poprečnog presjeka tijela (m^2), δ specifična gustoća zraka ($\mathrm{kg\,m}^{-3}$), a C konstanta bez dimenzije koja ovisi o obliku tijela - tzv. form-faktor (vidi Molitz (1967)). Veličina δ u jednadžbi $(*)$ je funkcija temperature (u K) i visine (s), ali uz pretpostavku da se radi o malim visinama (nekoliko stotina metara), možemo pretpostaviti da je ona konstantna i jednaka svojoj vrijednosti na razini mora $\delta_0 = 1.22\,\mathrm{kgm}^{-3}$.

Uz oznake: $v = \dot{s}$ i $\frac{dv}{dt} = \ddot{s}$, jednadžba $(*)$ glasi:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v^2,$$

čije rješenje je:

$$v = b \,\mathrm{th}\,(abt), \qquad (**)$$

gdje je: $a = \gamma/m$, $b^2 = mg/\gamma$. Primijetimo da za $t \to \infty$ brzina v teži konačnoj veličini b.

Za $m = 70\,\mathrm{kp}$, $S = 0.25\,\mathrm{m}^2$ i $C = 1$ primjenom RK metode riješit ćemo jednadžbu $(*)$, na intervalu $[0, 20]$ (pad tijela pratimo prvih 20 sekundi) uz korak u metodi $h = 2$. Dobiveni rezultati u *Tablici 8.4* uspoređeni su s egzaktnim vrijednostima iz jednadžbe $(**)$.

Primjedba 5. Runge-Kuttovom metodom možemo rješavati i sustave diferencijalnih jednadžbi. Postupak je analogan iterativnom procesu (10). Primjerice za sustav:

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = g(x, y, z), \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0,$$

imamo:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ z_1 &= z_0 + \tfrac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \end{aligned} \tag{11}$$

gdje je:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0, z_0) & m_1 &= hg(x_0, y_0, z_0) \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{k_1}{2}, z_0 + \tfrac{m_1}{2}\right), & m_2 &= hg\left(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{k_1}{2}, z_0 + \tfrac{m_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{k_2}{2}, z_0 + \tfrac{m_2}{2}\right), & m_3 &= hg\left(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{k_2}{2}, z_0 + \tfrac{m_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + m_3), & m_4 &= hg(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + m_3). \end{aligned}$$

Primjerice, za funkcije $f(x, y, z) = x + z$, $g(x, y, z) = -x$ i početni uvjet $y(0) = z(0) = 1$ na intervalu $[0, 1]$ dobivamo vrijednosti funkcija $x \mapsto y(x)$ i $x \mapsto z(x)$ prikazane u *Tablici 8.5.*

x_k	y_k	z_k
0	1	1
0.1	1.1048	0.995
0.2	1.2187	0.98
0.3	1.3405	0.955
0.4	1.4693	0.92
0.5	1.6042	0.875
0.6	1.744	0.82
0.7	1.8878	0.755
0.8	2.0347	0.68
0.9	2.1835	0.595
1	2.333	0.5

Tablica 8.5

x_k	y_k	y_k'
0	1	0
0.2	1.0202	0.2040
0.4	1.0833	0.4333
0.6	1.1972	0.7183
0.8	1.3771	1.1017
1.0	1.6487	1.6487
1.2	2.0543	2.4652
1.4	2.6642	3.7298
1.6	3.5960	5.7536
1.8	5.0518	9.0932
2	7.3862	14.7724

Tablica 8.6

Primjedba 6. Diferencijalna jednadžba višeg reda rješava se svođenjem na sustav diferencijalnih jednadžbi 1. reda. Tako primjerice Cauchyjev problem:

$$y'' = g(x, y, y'), \quad y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta,$$

svodimo na sustav:

$$\begin{aligned} y' &= z, & y(x_0) &= y_0, \\ z' &= g(x, y, z), & z(x_0) &= z_0, \end{aligned}$$

koji možemo riješiti RK metodom:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ z_1 &= z_0 + \tfrac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hz_0 & m_1 &= hg(x_0, y_0, z_0) \\ k_2 &= h\left(z_0 + \tfrac{m_1}{2}\right), & m_2 &= hg\left(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{k_1}{2}, z_0 + \tfrac{m_1}{2}\right), \\ k_3 &= h\left(z_0 + \tfrac{m_2}{2}\right), & m_3 &= hg\left(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{k_2}{2}, z_0 + \tfrac{m_2}{2}\right), \\ k_4 &= h(z_0 + m_3), & m_4 &= hg(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + m_3). \end{aligned}$$

Primjer 7. *Treba riješiti Cauchyjev problem:*

$$y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Problem ćemo pretransformirati na sustav diferencijalnih jednadžbi 1. reda

$$\begin{aligned} y' &= z, & y(0) &= 1, \\ z' &= xz + y, & z(0) &= 0, \end{aligned}$$

a rješenje potražiti na intervalu $[0, 2]$ primjenom RK metode s korakom $h = 0.2$ (vidi *Tablicu 8.6)*.

Primjer 8. *Tzv. Lotka–Volterrin biološki model grabežljivac - plijen opisuje se sustavom diferencijalnih jednadžbi (vidi primjerice* Gear (1971)*):*

$$\frac{dx}{dt} = x(p_1 - p_2 y), \quad \frac{dy}{dt} = y(p_3 x - p_4).$$

Uz početne uvjete $x(0) = 1$, $y(0) = 0.3$ i vrijednosti parametara:

$$p_1 = 0.77069, \quad p_2 = p_3 = 2.1268, \quad p_4 = 1.984,$$

primjenom RK metode dobivamo funkcije x i y tablično prikazane u *Tablici 8.7* i na *Slici 8.2.a*.

t	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
x	1.0	1.052	1.060	1.013	0.934	0.860	0.819	0.8198	0.854	0.915
y	0.3	0.332	0.381	0.427	0.446	0.428	0.386	0.341	0.307	0.291
t	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
x	0.986	1.044	1.062	1.026	0.950	0.873	0.824	0.816	0.844	0.901
y	0.296	0.324	0.370	0.419	0.445	0.434	0.396	0.350	0.312	0.293

Tablica 8.7 *Podaci za Lotka–Volterrin model: grabežljivac - plijen*

Možemo potražiti i tzv. fazno rješenje, odnosno opće rješenje $y = y(x;c)$ rješavajući jednadžbu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(p_3 x - p_4)}{x(p_1 - p_2 y)}.$$

Uz oznake: $P = p_4/p_3$, $Q = p_1/p_2$, dobivamo familiju elipsa (vidi također *Sliku 8.2.b*):

$$\frac{(x-P)^2}{p_4} + \frac{(y-Q)^2}{p1} = c.$$

Konstanta c odreduje se iz početnog uvjeta: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, čime je izabrana jedna elipsa. Funkcije $x(t)$ i $y(t)$ su vremenske periodične funkcije.

Slika 8.2 *Lotka–Volterrin model: grabežljivac - plijen*

3 Metoda diskretizacije

Osim inicijalnih problema koje smo do sada razmatrali, rješavanje praktičnih problema često vodi na rješavanje tzv. rubnih problema[4].

Za danu funkciju $f(x,y,y')$ treba odrediti funkciju $x \mapsto y(x)$, $x \in [a,b]$, koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu 2. reda:

$$y'' = f(x,y,y'), \tag{12}$$

uz tzv. rubne uvjete:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad (a < b). \tag{13}$$

Postoji također više metoda za rješavanje rubnih problema (vidi primjerice Stoer, Bulirsch (1993). Mi ćemo ovdje samo kratko opisati tzv. metodu diskretizacije.

Interval $[a,b]$ podijelit ćemo na n jednakih dijelova, stavljajući:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih.$$

[4]Engl. = two point boundary value problem, njem. = Randwertaufgabe

Prvu (y') i drugu (y'') derivaciju funkcije y možemo aproksimirati s:

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}, \quad y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}.$$

Na taj način rubni problem (12)-(13) svodi se na rješavanje sustava tzv. diferencijskih jednadžbi:

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = h^2 f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, .$$

$$y_0 = \alpha, \quad y_n = \beta,$$

gdje je:

$$f_k = f\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}\right).$$

ili u matričnom obliku:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{y} = h^2\mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{r}, \tag{14}$$

gdje je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Ako je funkcija f linearna, sustav (14) je sustav linearnih jednadžbi i možemo ga pokušati riješiti nekom metodom navedenom u *t.*??, str. ?? (posebno vidi *Zadatak* ??, str. ??). Ako je funkcija f nelinearna, onda treba koristiti neku iterativnu metodu za rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi (t.??, str. ??).

Primjedba 7. Postoji opsežna literatura o numeričkom rješavanju običnih diferencijalnih jednadžbi (vidi npr. COLLATZ (1966), ORTEGA (1981), STOER (1993)). FORTRAN-programska podrška iz ovog područja može se naći u FORSYTHE (1974), PRESS (1989) i u The Nag-Library (*Philips* (1986). U programu *Mathematica* mogu se naći gotovi moduli za rješavanje ovakvih problema, te svi potrebni prateći "alati".

4 Zadaci

Zadatak 2. *Numerički riješite diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetom na intervalu $[a, b]$. Numerički dobiveno rješenje usporedite s egzaktnim, te nacrtajte pripadne grafove.*

$$\begin{array}{llll}
a) & y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}, & y(\frac{\pi}{2}) = 1, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \\
b) & y' = 3x^2 y, & y(0) = 2, & x \in [0, 1], \\
c) & x + yy' = 0, & y(0) = 2, & x \in [0, 2], \\
d) & 2xy' = y, & y(1) = 2, & x \in [1, 3], \\
e) & y' + y = 0, & y(0) = 1, & x \in [0, 0.6], \\
f) & y' = y_2, & y(0) = 0.25, & x \in [0, 3], \\
g) & y' = 1 + xy + y^2, & y(0) = 0, & x \in [0, 2]
\end{array}$$

Rješenje:

$$\begin{array}{llll}
a)\ y = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\pi}{2x}, & b)\ y = 2\exp(x^3), & c)\ x^2 + y^2 = 4, & d)\ y^2 = 4x, \\
e)\ y = e^{-x}, & f)\ y = 1/(4 - x), & g) &
\end{array}$$

Zadatak 3. *Primjenom Runge-Kutta metode riješite Cauchyjev problem:*

$$y' = 100(\sin x - y), \quad y(0) = 0,$$

na intervalu $[0, \pi/2]$ za različite veličine koraka $h = 0.1$, 0.01, 0.001. Dobivene rezultate usporedite s egzaktnim rješenjem:

$$y = \frac{1}{1.0001}(\sin x - 0.01\cos x + 0.01e^{-100x}).$$

Nacrtajte odgovarajuće grafove funkcije-rješenja i funkcije-aproksimacije rješenja.

Zadatak 4. *Numerički riješite Cauchyjev problem na intervalu $I = [0, 1]$:*

a) $y'' = \sqrt{1 + y'^2}, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0,$

b) $y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Rješenje: *a)* $y = \operatorname{ch} x$, *b)*

Zadatak 5. *Numerički riješite sustav diferencijalnih jednadžbi:*

$$\begin{array}{lll@{\qquad}lll}
a) & y' = -7y + z, & y(0) = 0, & b) & y' = z, & y(1) = 1 \\
 & z' = -2y - 5z, & z(0) = 1, & & z' = -y, & z(1) = 1 \\
 & x \in [0, \pi] & & & x \in [1, 2] &
\end{array}$$

Zadatak 6. *Primjenom Runge-Kutta metode riješite Cauchyjev problem:*

a) $y'' + 1001y' + 1000y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad x \in [0, 0.2].$

b) $y'' + y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad x \in [0, 1].$

za različite veličine koraka $h = 0.01$, 0.005, 0.001. Dobivene rezultate usporedite s egzaktnim rješenjem, te nacrtajte odgovarajuće grafove funkcije rješenja i funkcije-aproksimacije rješenja.

Rješenje: *a)* $y = (e^{-x} - e^{-1000x})/999, \qquad$ *b)* $y = \cos x - \sin x + x.$

Zadatak 7. *Rješenje rubnog problema:*

$$y'' + y = x, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi/2) = \pi/2 - 1,$$

je funkcija:

$$y = \cos x - \sin x + x.$$

Riješite ovaj problem metodom diskretizacije koja je spomenuta u t.3, *str. 13 uzevši $m = 5$ ili $m = 10$, te usporedite rješenja s egzaktnim rješenjem. Nacrtajte grafove funkcije rješenja i funkcije-aproksimacije rješenja.*

Zadatak 8. *Za koju vrijednost parametra λ rubni problem:*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

ima netrivijalno rješenje ($y \neq 0$).

Rješenje: $\lambda = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$

Zadatak 9. *Zadatak 8 riješite metodom diskretizacije uz $n = 3$.*

Rješenje:

$$\lambda = 9 \text{ (prava vrijednost:} \pi^2 = 9.8696\text{)},$$
$$\lambda = 27 \text{ (prava vrijednost:} 4\pi^2 = 39.48\text{)}.$$

Zadatak 10. *S podacima iz Primjera 6, str. 10 odredite put s kao funkciju vremena t na intervalu vremena* $[0, 20]$.

Uputa: riješite diferencijalnu jednadžbu $\frac{ds}{dt} = b\,\mathrm{th}\,(abt)$.

Zadatak 11. *S podacima iz Primjera 6, str. 10 odredite brzinu v kao funkciju puta s na intervalu* $[0, 800]$.

Rješenje: $v = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}\sqrt{1 - \exp(-\frac{2\gamma}{m})}$.

Zadatak 12. *Pokažite da se Runge-Kuttova metoda podudara sa Simpsonovom formulom ako funkcija f ne ovisi o y.*

Zadatak 13. *Izradite kompjuterski program za metodu diskretizacije (t.3, str. 13) koristeći LU-dekompoziciju matrice.*

Zadatak 14. *Slično kao u (10), str. 9 definirajte Runge-Kutta metodu za rješavanje diferencijalne jednadžbe* 3. *reda iz Primjedbe 1, str. 1 Izradite odgovarajući kompjuterski program.*

Zadatak 15. *Riješite Cauchyjev problem zadan s:*

$$
\begin{array}{llll}
a) & x' = x - xy, & x(0) = 4, & \\
 & y' = -y + xy, & y(0) = 1, & t \in [0,8],\ h = 0.1 \\
b) & x' = -3x - 2y - 2xy^2, & x(0) = 0.8, & \\
 & y' = 2x - y + 2y^3, & y(0) = 0.6, & t \in [0,4],\ h = 0.1 \\
c) & x' = y^2 - x^2, & x(0) = 2, & \\
 & y' = 2xy, & y(0) = 0.1, & t \in [0,1.5],\ h = 0.05 \\
d) & x' = x^2 - y^2, & x(0) = 2, & \\
 & y' = 2xy, & y(0) = 0.6, & t \in [0,1.6],\ h = 0.02 \\
e) & x' = 1 - y, & x(0) = -1.2, & \\
 & y' = x^2 - y^2, & y(0) = 0, & t \in [0,5],\ h = 0.1 \\
f) & x' = x^3 - 2xy^2, & x(0) = 1, & \\
 & y' = 2x^2y - y^3, & y(0) = 0.2, & t \in [0,2],\ h = 0.025
\end{array}
$$

Zadatak 16. *Za sustave diferencijalnih jednadžbi iz Zadatka 15, nađite fazno rješenje $y = y(x;c)$, te nacrtajte odgovarajući pramen (familiju) krivulja.*

Zadatak 17. *Riješite sljedeće rubne probleme za $h = 0.2, 0.1, 0.05$:*

$$
\begin{array}{llll}
a) & x'' = \frac{2t}{1+t^2}x'(t) - \frac{2}{1+t^2}x(t) + 1, & x(0) = 1.25, & x(4) = -0.95, \\
b) & x'' = -\frac{2}{t}x'(t) + \frac{2}{t^2}x(t) + \frac{10\cos(\ln t)}{t^2}, & x(1) = 1, & x(3) = -1, \\
c) & x'' + \frac{1}{t}x'(t) + \frac{16}{t^2}x(t) = \frac{1}{t^2}, & x(1) = 0.75, & x(7) = 0.3, \\
d) & x'' + \frac{2}{t}x'(t) - \frac{2}{t^2}x(t) = \frac{\sin t}{t^2}, & x(1) = -0.02, & x(6) = 0.02.
\end{array}
$$

Literatura

A. Björck, G. Dahlquist, *Numerical Methods in Scientific Computing*, volume II, SIAM, Philadelphia, 2008.

L. Collatz, *Numerical Treatment of Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

G. Dahlquist, A. Björck, *Numerische Methoden*, R.Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1972.

G. Dahlquist, A. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, volume 1, SAIM, 2008.

B. P. Demidovich, I. Maron, *Computational Mathematics*, MIR, Moscow, 1981.

P. Deuflhard, *Numerical Analysis: A First Course in Scientific Computation*, Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

P. Deuflhard, A. Hohmann, *Numerische Mathematik 1, Eine algorithmisch orientierte Einführung*, W. de Gruyter, Berlin, 2008.

D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2004.

R. Kress, *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

A. A. Samarskij, A. V. Gulin, *Numeričke metode (na ruskom)*, Nauka, Moskva, 1989.

H. R. Schwarz, N. Köckler, *Numerische Mathematik*, Springer Verlag, Berlin, 2011.

R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2004.

E. Süli, D. Mayers, *An introduction to numerical analysis /*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis, 2nd Ed.*, Springer Verlag, New York, 2002.

N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Odjel za matematiku, 2010.