Odjel za matematiku
Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Matematički praktikum

K. Sabo, R. Scitovski, I. Vazler

Pravac – reprezentant podataka u ravnini

1 Uvod

U prvom dijelu smo promatrali problem u kojem smo za podatke $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$, u ravnini tražili točku $T^* = (x^\star, y^\star)$ koja je predstavljala reprezentant tih točaka. To smo radili na način da smo najprije definirali kvazimetričku funkciju $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ s kojom je moguće mjeriti "udaljenost" točaka u ravnini, te smo koordinate $T^* = (x^\star, y^\star)$ reprezentanta odredili tako da je

$$(x^\star, y^\star) = \underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{m} d((x, y), A_i).$$

U ovisnosti o izboru kvazimetričke funkcije dobivali smo različite reprezentante.

2 Pravac kao reprezent podataka

Analogno prethodno opisanom problemu smisleno je promatrati problem u kome je reprezentant točaka $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$, pravac $p^*(a^*, b^*, c^*)$ u ravnini, koji je zadan generalno u implicitnom obliku $a^*x + b^*y - c^* = 0$, $a^*, b^*, c^* \in \mathbb{R}$, $(a^*)^2 + (b^*)^2 = 1$, $c^* \geq 0$. U tu svrhu najprije će trebati odrediti kvazimetričku funkciju $\mathcal{D} : \mathcal{L} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ kojom je moguće mjeriti "udaljenost" točke do pravca, gdje smo s $\mathcal{L}$ označili skup svih pravaca u ravnini. Pri tome od funkcije $\mathcal{D}$ tražimo da zadovoljava sljedeće uvjete

a) $\mathcal{D}(p(a, b, c), A) \geq 0$,

b) $\mathcal{D}(p(a, b, c), A) = 0 \Leftrightarrow A \in p(a, b, c)$.

Kako postoji bijekcija između skupa pravaca $\mathcal{L}$, koji ne prolaze kroz ishodište i skupa $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 = 1,\ c > 0\}$, funkciju $\mathcal{D}$ možemo promatrati kao funkciju $\mathcal{D} : \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 = 1,\ c > 0\} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$. Ako pravac prolazi kroz ishodište ($c = 0$), barem je jedan od brojeva a ili b različit od 0 te bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \neq 0$. Kako bismo osigurali jedinstvenost pravca koji prolazi kroz ishodište, zahtijevat ćemo da je $a > 0$. U tom smislu za domenu funkcije $\mathcal{D}$ možemo promatrati skup $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 = 1,\ c \geq 0$.

Traženi pravac $p^*(a^*, b^*, c^*)$ dobivamo tako da je

$$(a^*, b^*, c^*) = \underset{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, a^2+b^2=1,\, c\geq 0}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{m} \mathcal{D}(p(a, b, c), A_i).$$

Ako specijalno reprezentant točaka tražimo u obliku pravca $ax + by - c = 0,\ a^2 + b^2 = 1,$ $c \geq 0$ za koji je $b \neq 0$, odnosno koji nije paralelan s $y-$osi, onda se takav pravac može zapisati u eksplicitnom obliku $y = kx + l,\ k, l \in \mathbb{R}$. Prema tome u ovom slučaju reprezentant točaka $A_i = (x_i, y_i)$ tražimo u obliku pravca $p^*(k^*, l^*)$ zadanog s $y = k^*x + l^*$, $k^*, l^* \in \mathbb{R}$. Analogno kao prije definiramo kvazimetričku funkciju $D : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ kojom je moguće mjeriti "udaljenost" točke do pravca, onda traženi pravac $p^*(k^*, l^*)$ dobivamo tako da je

$$(k^*, l^*) = \underset{(k,l)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{m} D(p(k, l), A_i).$$

Promatrat ćemo sljedeće četiri funkcije kojima je moguće mjeriti udaljenost točke do pravca:

a) vertikalne udaljenosti točke $A_i = (x_i, y_i)$ do pravca $p(k, l)$, zadanog s $y = kx + l$

   – LS (*engl. least square*) $D_2(p(k, l), (x_i, y_i)) = (y_i - kx_i - l)^2$, a odgovarajući reprezentant zvat ćemo LS pravac

   – LAD (*engl. least absolute deviation*) $D_1(p(k, l), (x_i, y_i)) = |y_i - kx_i - l|$, a odgovarajući reprezentant zvat ćemo LAD pravac

b) ortogonalne udaljenosti točke $A_i = (x_i, y_i)$ do pravca $p(a, b, c)$, zadanog s $ax + by - c = 0$, $a^2 + b^2 = 1,\ c \geq 0$

   – LS (*engl. least square*) $\mathcal{D}_2(p(a, b, c), (x_i, y_i)) = (ax_i + by_i - c)^2,\ a^2 + b^2 = 1,\ c \geq 0$, a odgovarajući reprezentant zvat ćemo TLS pravac

   – LAD (*engl. least absolute deviation*) $\mathcal{D}_1(p(a, b, c), (x_i, y_i)) = |ax_i + by_i - c|,\ a^2 + b^2 = 1,\ c \geq 0$, a odgovarajući reprezentant zvat ćemo OD pravac

2.1 LS pravac

Zadani su podaci $A_i = (x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, m$. Treba odrediti pravac p s jednadžbom $y = kx + l$, $k, l \in \mathbb{R}$, koji ima svojstvo da je suma vertikalnih udaljenosti $D_2(p(k, l), A_i) = (kx_i + l - y_i)^2$, $i = 1, \ldots, m$ točaka $(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, m$ do pravca p minimalna. Drugim riječima želimo odrediti pravac $y = k^\star x + l^\star$ tako da je

$$(k^\star, l^\star) = \underset{(k,l)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^m D_2(p(k,l), T_i) = \underset{(k,l)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^m (y_i - kx_i - l)^2 =: \underset{(k,l)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} F_2(k,l)$$

Pravac $y = k^\star x + l^\star$ zovemo LS pravac (*engl. least square*).

Kako je funkcija F_2 derivabilna funkcija, možemo izračunati

$$\nabla F_2(k,l) = -2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m (y_i - kx_i - l)x_i \\ \sum_{i=1}^m (y_i - kx_i - l) \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 F_2(k,l) = 2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & m \end{bmatrix}.$$

Zadatak 1. *a) Dokažite da vrijedi*

$$m \sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 \geq 0,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $x_1 = \ldots = x_m$.

b) Dokažite da je matrica $\nabla^2 F_2(k,l) = 2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & m \end{bmatrix}$ *pozitivno semidefinitna. Nadalje, ako postoje* $i_0, j_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $i_0 \neq j_0$ *takvi da je* $x_{i_0} \neq x_{j_0}$, *onda je matrica* $\nabla^2 F_2(k,l)$ *je pozitivno definitna.*

Prisjetimo se da za funkciju $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna na $\mathbb{R}^2$, ako za svaki $x, y \in \mathbb{R}^2$ i svaki $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y).$$

Nadalje, može se pokazati da je dva puta neprekidno derivabilna funkcija je konveksna onda i samo onda ako je Hessian pozitivno semidenitna matrica, pa prema tome slijedi da je funkcija F_2 konveksna.

Zadatak 2. *Dokažite da je svaka pozitivno definitna matrica* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *regularna.*

2.1.1 Eksplicitne formule

Iz $\nabla F_2(k,l) = 0$ slijedi da je $(k^\star, l^\star)$ rješenje sustava jednadžbi

$$k \sum_{i=1}^m x_i^2 + l \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x_i y_i \tag{1}$$

$$k \sum_{i=1}^m x_i + lm = \sum_{i=1}^m y_i. \tag{2}$$

Razlikujemo sljedeća dva slučaja:

- Ako sve tocke A_i, $i = 1, \ldots, m$ ne leze na jednom vertikalnom pravce, odnosno ako postoje $i_0, j_0 \in \{1, \ldots, m\}$, $i_0 \neq j_0$ takvi da je $x_{i_0} \neq x_{j_0}$, onda zbog regularnosti matrice sustava $\nabla^2 F(k, l)$ slijedi da sustav (1-2) ima jedinstveno rješenje, koje je osim toga jedinstvena točka globalnog minimuma funkcije F. Odgovarajuće rješenje glasi

$$k^\star = \frac{m\sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m\sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2} \qquad l^\star = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_i y_i}{m\sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2}.$$

- Ako je $x_1 = \ldots = x_m = \overline{x}$, onda sustav (1-2) ima beskonačno mnogo rješenja, koja glase

$$(k^\star, \tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^m y_i - k^\star \overline{x}),\ k^\star \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 3. *Dokažite sljedeću tvrdnju: Ako su* $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m$ *te* $0 < y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_m$ *onda je*

$$m\sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i \geq 0,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_m$ *ili* $y_1 = y_2 = \ldots = y_m$.

2.1.2 LS pravac prolazi kroz centroid

Ako su (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ zadani podaci, onda točku $(\overline{x}, \overline{y})$ zovemo centroid podataka. Pokažimo da odgovarajući LS pravac prolazi kroz centroid. Zaista, ako je $y = k^\star x + l^\star$ LS pravac za podatke (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, onda $k^\star$ i $l^\star$ zadovoljavaju jednadžbu (2), odnosno vrijedi $k^\star \sum_{i=1}^m x_i + l^\star m = \sum_{i=1}^m y_i$, odakle slijedi

$$k^\star \overline{x} + l^\star = \overline{y},$$

odnoso LS pravac prolazi točkom $(\overline{x}, \overline{y})$.

2.1.3 Eksplicitne formule preko centroida

Kako LS pravac prolazi kroz centroid umjesto minimizacije funkcije F, ekvivalentno je promatrati minimizaciju funkcije

$$\overline{F}(k) = \sum_{i=1}^m ((y_i - \overline{y}) - k(x_i - \overline{x}))^2 \to \min_{k\in\mathbb{R}}, \tag{3}$$

što je problem jednodimenzionalne minimizacije kvadratne funkcije. Ako je $k^\star$ rješenje problema (3), onda za odgovarajući $l^\star$, vrijedi $l^\star = \overline{y} - k^\star \overline{x}$. Razlikujemo sljedeća dva slučaja:

- Ako sve tocke A_i, $i = 1, \dots, m$ ne leze na jednom vertikalnom pravce, odnosno ako postoje $i_0, j_0 \in \{1, \dots, m\}$, $i_0 \neq j_0$ takvi da je $x_{i_0} \neq x_{j_0}$, onda funkcija $\overline{F}$ ima jedinstveni globalni minimum, koji glasi

$$k^\star = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^m (x_i - \overline{x})^2}, \quad l^\star = \overline{y} - k^\star \overline{x}.$$

- Ako je $x_1 = \ldots = x_m = \overline{x}$, onda sustav (1-2) ima beskonačno mnogo rješenja

$$(k^\star, \overline{y} - k^\star \overline{x}),\ k^\star \in \mathbb{R}.$$

2.2 LAD pravac

Zadani su podaci $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, m$. Treba odrediti pravac p s jednadžbom $y = kx + l$, $k, l \in \mathbb{R}$, koji ima svojstvo da je suma vertikalnih udaljenosti $D_1(p(k,l), A_i) = |y_i - kx_i - l|$, $i = 1, \dots, m$ točaka (x_i, y_i), $i = 1, \dots, m$ do pravca p minimalna. Drugim riječima želimo odrediti pravac $y = k^\star x + l^\star$ tako da je

$$(k^\star, l^\star) = \underset{(k,l)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^m D_1(p(k,l), T_i) = \underset{(k,l)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^m |y_i - kx_i - l| =: \underset{(k,l)\in\mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} F_1(k,l)$$

Pravac $y = k^\star x + l^\star$ zovemo LAD pravac (*engl. least absolute deviation*). Funkcija F_1 nije derivabilna te za njezinu minimizaciju ne možemo koristiti standardnim metodama za minimizaciju diferencijabilnih funkcija. Umjesto toga koristit ćemo neke druge metode, o kojima će biti govora nešto kasnije. Prije toga analizirat ćemo neka svojstva funkcionala F_1. Najprije ćemo pokazati da funkcija F_1 može imati beskonačno mnogo točaka u kojima postiže globalni minimum.

Ako su podaci $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, m$ takvi da je $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = \overline{x}$, onda je

$$F_1(k,l) = \sum_{i=1}^m |y_i - k\overline{x} - l| \geq \sum_{i=1}^m |y_i - \operatorname{med}(y_i)|,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda ako je $\operatorname{med}(y_i) = k\overline{x} + l$. Prema tome funkcija F_1 u ovom slučaju postiže globalni minimum u svakoj točki oblika $(k^*, \operatorname{med}(y_i) - k^*\overline{x})$, $k^* \in \mathbb{R}$.

U narednim zadacima navedena su još neka važna svojstva funkcije F_1

Zadatak 4. *Dokažite da je funkcija $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ konveksna na $\mathbb{R}^2$.*

Definicija 1. Za funkciju $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ kažemo da je Lipshitzova ako postoji $L > 0$ takav da je

$$|F(x) - F(y)| \leq L\|x - y\|, \text{ za svaki } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Zadatak 5. *Dokažite da je funkcija $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ Lipshitzova na $\mathbb{R}^2$.*

Zadatak 6. Malo teži zadatak *Pokazali smo da najbolji LAD pravac ne mora biti jedinstven. Pokažite da među svim najboljim LAD pravcima postoji pravac koji prolazi kroz dvije različite točke podataka $A_\mu = (x_\mu, x_\nu)$ i $A_\nu = (x_\nu, y_\nu)$.*

Postoje više različitih metoda za minimizaciju funkcije F_1. Navedimo dri pristupa:

- svođenje na problem linearnog programiranja
- specijalna metoda koja koristi tvrdnju da postoji pravac koji prolazi kroz dvije različite točke podataka.
- specijalne metode za minimizaciju Lipshitzovih funkcija (DIRECT)

3 TLS pravac

Za podatke $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$ treba odrediti pravac s jednadžbom $a^\star x + b^\star y - c^* = 0$, $(a^*)^2 + (b^*)^2 = 1$, $c^* \geq 0$ koji ima svojstvo da je suma ortogonalnih udaljenosti točaka (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ do pravca minimalna, odnosno tako da vrijedi

$$(a^\star, b^\star, c^\star) = \operatorname*{argmin}_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, a^2+b^2=1, c\geq 0} \sum_{i=1}^m (ax_i + by_i - c)^2 =: \operatorname*{argmin}_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, a^2+b^2=1,\, c\geq 0} G_2(a,b,c).$$

Pravac $a^\star x + b^\star y + c^\star = 0$, zovemo TLS pravac (*engl. total least square*).

Slično kao kod LS pravca ovdje se može pokazati da TLS pravac prolazi kroz centroid podataka, naime vrijedi

$$G(a,b,c) = \sum_{i=1}^m (ax_i + by_i - c)^2 \geq \sum_{i=1}^m (a(x_i - \overline{x}) + b(y_i - \overline{y}))^2 =: \overline{G}_2(a,b),$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako je $c = a\overline{x} + b\overline{y}$, odnosno ako TLS pravac prolazi kroz centroid podataka.

Problem određivanja TLS pravca svodi se na sljedeći optimizacijski problem

$$\min_{a^2+b^2=1} \overline{G}_2(a,b) = \min_{a^2+b^2=1} \sum_{i=1}^m (a(x_i - \overline{x}) + b(y_i - \overline{y}))^2. \tag{4}$$

Problem (4) moguće je rješavati kao problem uvjetnog ekstrema, uvođenjem Lagrangeove funkcije

$$L(a,b,\lambda) = \sum_{i=1}^m (a(x_i - \overline{x}) + b(y_i - \overline{y}))^2 + \lambda(a^2 + b^2 - 1). \tag{5}$$

Zadatak 7. *Analizirajte problem minimizacije Lagrangeove funkcije L zadane s (5).*

Umjesto korištenja Lagrangeove funkcije, problem (4) svest ćemo na jedan drugi poznati minimizacijski problem. Označimo u tu svrhu s $\mathbf{u} = [a, b]^T \in \mathbb{R}^2$ te

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 - \overline{x} & y_1 - \overline{y} \\ x_2 - \overline{x} & y_2 - \overline{y} \\ \vdots & \vdots \\ x_m - \overline{x} & y_m - \overline{y} \end{bmatrix}.$$

Uz ovakve oznake problem (4) prelazi u sljedeći problem

$$\mathbf{u}^* = \underset{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2, \|\mathbf{u}\|=1}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{X}\mathbf{u}\|_2^2. \tag{6}$$

Vrijedi sljedeći teorem

Teorem 1. *Optimalni vektor $\mathbf{u}^\star$ koji je rješenje problema (6) jednak je jediničnom svojstvenom vektoru koji je pridružen najmanjoj svojstvenoj vrijednosti matrice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$.*

Dokaz. Primijetimo da je $\mathbf{X}^T\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simetrična matrica. Prema teoremu o dijagonalizaciji simetrične matrice (Demmel, 1997) postoji ortogonalna matrica $\mathbf{V}$ i dijagonalna matrica $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ takva da je $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$. Pri tome su λ_1 i λ_2 nenegativne svojstvene vrijednosti, stupci matrice $\mathbf{V}$ odgovarajući svojstveni vektori matrice $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

Za proizvoljni jedinični vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$\|\mathbf{X}\mathbf{u}\|_2^2 = (\mathbf{X}\mathbf{u})^T\,\mathbf{X}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T\mathbf{u} = \mathbf{s}^T\mathbf{D}\mathbf{s},$$

gdje je $\mathbf{s} = \mathbf{V}^T\mathbf{u}$, $\|\mathbf{s}\|_2 = 1$. Tada je zbog ortogonalnosti matrice $\mathbf{V}^T$

$$\|\mathbf{X}\mathbf{u}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i s_i^2 \geq \lambda_{\min}(\mathbf{X}^T\mathbf{X}).$$

Posljednja nejednakost posljedica je činjenice da se minimum konveksne kombinacije postiže na najmanjem broju. Pokažimo da se jednakost postiže kada je $\mathbf{u}$ jednak jedničnom svojstvenom vektoru koji je pridružen najmanjoj svojstvenoj vrijednosti matrice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$.

Pretpostavimo u tu svrhu da je $\mathbf{u}$ jedinični svojstveni vektor koji odgovara najmanjoj svojstvenoj vrijednost matrice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, odnosno da vrijedi $\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{u} = \lambda_{\min}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\mathbf{u}$. Onda je

$$\|\mathbf{X}\mathbf{u}\|_2^2 = \mathbf{u}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{u} = \lambda_{\min}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\|\mathbf{u}\|_2^2 = \lambda_{\min}(\mathbf{X}^T\mathbf{X}).$$

$\square$

Zadatak 8. *Odredite eksplicitne formule za svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$.*

3.1 TLS pravac - primjena Hesseovog oblika

Hesseov oblik jednadžbe pravca glasi

$$x\cos\phi + y\sin\phi - c = 0, \quad \phi \in [0, 2\pi\rangle, c \geq 0.$$

Kako TLS pravac prolazi kroz centroid podataka, problem određivanja TLS pravca svodi se na sljedeći optimizacijski problem

$$\phi^* = \operatorname*{argmin}_{\phi\in[0,2\pi\rangle} \sum_{i=1}^{m} ((x_i - \overline{x})\cos\phi + (y_i - \overline{y})\sin\phi)^2 =: \operatorname*{argmin}_{\phi\in[0,2\pi\rangle} H_2(\phi),$$

dok je odgovarajući $d^* = \overline{x}\cos\phi + \overline{y}\sin\phi$.

Zadatak 9. *Izvedite formule za H_2' i H_2'' te odredite stacionarne točke i lokalne ekstreme funkcije H_2.*

4 OD pravac

Za podatke $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, m$ treba odrediti pravac s jednadžbom $a^\star x + b^\star y - c^* = 0$, $(a^*)^2 + (b^*)^2 = 1$, $c^* \geq 0$ koji ima svojstvo da je suma ortogonalnih udaljenosti $\mathcal{D}_1$ točaka (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ do pravca minimalna, odnosno tako da vrijedi

$$(a^\star, b^\star, c^\star) = \operatorname*{argmin}_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, a^2+b^2=1, c\geq 0} \sum_{i=1}^{m} |ax_i + by_i - c| =: \operatorname*{argmin}_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, a^2+b^2=1,\, c\geq 0} G_1(a,b,c).$$

Pravac $a^\star x + b^\star y - c^\star = 0$, zovemo OD pravac (*engl. orthogonal distance*).

Ovdje odmah prelazimo na Hesseov oblik i problem se svodi na sljedeći optimizacijski problem

$$(\phi^*, c^*) = \operatorname*{argmin}_{\phi\in[0,2\pi\rangle\times\mathbb{R}_+} \sum_{i=1}^{m} |x_i\cos\phi + y_i\sin\phi - c| =: \operatorname*{argmin}_{\phi\in[0,2\pi\rangle\times\mathbb{R}_+} H_1(\phi, c).$$

Zadatak 10. *Dokažite da je funkcija H_1 Lipshitzova na $[0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R}_+$.*

Literatura

M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. 3rd Edition*, Wiley, New Jersey, 2006.

J. A. Cadzow, *Minimum l_1, l_2, and l_∞ norm approximate solutions to an overdetermined system of linear equations*, Digital Signal Processing **12**(2002), 524—560

J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

J. E. Dennis, Jr. R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstreined Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1996

C. Gurwitz, *Weighted median algorithms for L_1 approximation*, BIT **30**(1990) 301–310

Y. Neivergelt, *Total least squares: state-of-the-art regression in numerical analysis*, SIAM Review 36 (1994), pp. 258–264.

K. Sabo, R. Scitovski, *The best least absolute deviations line - properties and two efficient methods for its derivation*, ANZIAM J. **50**(2008), 185-198