Udaljenost točke do pravca

1 Uvod u problem

Zadane su točka $T_0 = (x_0, y_0)$ u pravokutnom koordinatnom sustavu te pravac π s jednadžbom $y = kx + l$, $k, l \in \mathbb{R}$. Promatrat ćemo problem određivanja najkraće udaljenosti točke T_0 do pravca π. U radu (Melachrinoudis, 1997) napravljen je generalni analitički izvod formule za udaljenost točke do hiperravnine u proizvoljnoj l_p, $1 \leq p \leq \infty$ normi. Ovdje ćemo se zadržati na određivanju udaljenosti točke do pravca u ravnini. Udaljenost točke do pravca možemo definirati na različite načine, u ovisnosti o izboru norme. U svrhu definiranja udaljenosti točke do pravca koristit ćemo geometrijski pristup. Neka su $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ te

$$d_p(A,B) = \begin{cases} \left(|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p\right)^{1/p}, & p < \infty \\ \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}, & p = \infty, \end{cases}$$

l_p udaljenost točaka A i B. Pretpostavimo da smo konstruirali l_p, $1 \leq p \leq \infty$ kuglu

$$K_p(T_0, \varepsilon) = \{T \in \mathbb{R}^2 : d_p(T, T_0) \leq \varepsilon\},$$

sa središtem u točki T_0 malenog polumjera $\varepsilon > 0$. Napuhujemo li kuglu $K_p(T_0, \varepsilon)$, $1 \leq p \leq \infty$ ona će u jednom trenutku za neki $\varepsilon_p > 0$ dotaknuti pravac π. Polumjer tako dobivene kugle $K_p(T_0, \varepsilon_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ zovemo l_p udaljenost točke T_0 do pravca π i označavamo $d_p(T_0, \pi)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Uočimo da je problem određivanja udaljenosti točke do pravca možemo zapisati kao optimizacijski problem na sljedeći način:

$$d_1(T_0, p) = \min_{x \in \mathbb{R}} |kx + l - y_0| + |x - x_0|,$$

$$d_p^p(T_0, p) = \min_{x \in \mathbb{R}} |kx + l - y_0|^p + |x - x_0|^p, \quad 1 < p < \infty,$$

$$d_\infty(T_0, p) = \min_{x \in \mathbb{R}} \max\{|kx + l - y_0|, |x - x_0|\}.$$

Ovaj tekst je organiziran na sljedeći način. U drugom odjeljku izvest ćemo udaljenost točke do pravaca u l_1 normi. U trećem odjeljku razmatrat ćemo slučaj l_p udaljenosti $1 < p < \infty$. Dok je u četvrtom odjeljku za domaću zadaću ili projektni zadatak ostavljen izvod udaljenosti u l_∞ normi.

2 l_1 udaljenost točke do pravca

Izvedimo formulu za l_1 udaljenost točke T_0 do pravca π. Pri tome posebno ćemo promatrati dva slučaja

Ako je $k = 0$, onda funkcija

$$x \mapsto |l - y_0| + |x - x_0|, \tag{1}$$

postiže minimum u točki $x = x_0$, te je

$$d_1(T_0, p) = |l - y_0|. \tag{2}$$

Pretpostavimo da je $k \neq 0$. Funkcija $x \mapsto |kx + l - y_0| + |x - x_0|$ je omeđena odozdo te je

$$\lim_{x\to\infty} |kx + l - y_0| + |x - x_0| = \lim_{x\to-\infty} |kx + l - y_0| + |x - x_0| = \infty,$$

pa postoji točka x^* u kojoj se postiže njezin minimum. Nadalje funkcija (1) je po dijelovima linearna i nederivabilna u točkama $\frac{y_0-l}{k}$ i x_0 te se stoga minimum funkcije (1) postiže u jednoj od te dvije točke. Očigledno je

$$\begin{aligned}
d_1(T_0, \pi) &= \min\left\{|kx_0 + l - y_0|, \left|\frac{y_0 - l}{k} - x_0\right|\right\} \\
&= \min\left\{|kx_0 + l - y_0|, \frac{|kx_0 + l - y_0|}{|k|}\right\} \\
&= \frac{|kx_0 + l - y_0|}{\max\{1, |k|\}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Konačno iz formula (2) i (3) dobivamo

$$d_1(T_0, \pi) = \frac{|kx_0 + l - y_0|}{\max\{1, |k|\}}.$$

Točku (ξ_1, η_1) na pravcu π koja je u smislu l_1 norme najbliža točki T_0 zovemo l_1 projekcija točke T_0 na pravac π.

Odredimo l_1 projekciju točke T_0 na pravac π. Uočimo da se za $|k| > 1$ minimum fukcije (1) postiže u $x = \frac{y_0-l}{k}$ dok se za $|k| < 1$ minimum funkcije (1) postiže u $x = x_0$.

Očito je

$$\xi_1 = \begin{cases} \frac{y_0-l}{k}, & |k| > 1, \\ x_0, & |k| < 1, \end{cases}, \quad \eta_1 = k\xi_1 + l = \begin{cases} y_0, & |k| > 1, \\ kx_0 + l, & |k| < 1. \end{cases} \tag{4}$$

Pokažimo da se u slučaju $|k| = 1$ minimum funkcije (1) postiže u bilo kojoj konveksnoj kombinaciji brojeva $\frac{y_0-l}{k}$ i x_0 tj. za svaki $x_\lambda = \lambda\frac{y_0-l}{k} + (1-\lambda)x_0$, $\lambda \in [0, 1]$. Zaista za $|k| = 1$ imamo

$$\begin{aligned}
|kx_\lambda + l - y_0| + |x_\lambda - x_0| &= \left|k(\lambda\frac{y_0 - l}{k} + (1-\lambda)x_0) + l - y_0\right| + \left|\lambda\frac{y_0 - l}{k} + (1-\lambda)x_0 - x_0\right| \\
&= (1-\lambda)|kx_0 + l - y_0| + \lambda|kx_0 + l - y_0| \\
&= |kx_0 - l - y_0| \\
&= d_1(T_0, \pi).
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je l_1 projekcija točke T_0 na pravac π jedinstvena točka (ξ_1, η_1) zadana s (4), ako je $|k| \neq 1$, dok je za $|k| = 1$ svaka točka oblika $(x_\lambda, kx_\lambda + l - y_0)$, $\lambda \in [0, 1]$, l_1 projekcija točke T_0 na pravac π.

3 l_p, $1 < p < \infty$ udaljenost točke do pravca

Funkcija $\varphi_p(x) = |kx + l - y_0|^p + |x - x_0|^p$ nije derivabilna u točkama $x = x_0$ te $x = \frac{y_0 - l}{k}$. Analizirat ćemo funkciju φ_p na skupu $\mathbb{R} \backslash \{x_0, \frac{y_0-l}{k}\}$. Pretpostavimo da je $x_0 < \frac{y_0-l}{k}$ (slučaj $x_0 \geq \frac{y_0-l}{k}$ može se analizirati posve analogno).

Pokažimo najprije da funkcija φ_p nema stacionarnih točaka na intervalima $\langle -\infty, x_0 \rangle$ te $\langle \frac{y_0-l}{k}, +\infty \rangle$.

Ako je $x \in \langle -\infty, x_0 \rangle$, onda je

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_p(x)}{dx} &= |k|^p p \left| x - \frac{y_0 - l}{k} \right|^{p-1} \operatorname{sign}\left(x - \frac{y_0 - l}{k} \right) + p|x - x_0|^{p-1} \operatorname{sign}(x - x_0) \\ &= -|k|^p p \left| x - \frac{y_0 - l}{k} \right|^{p-1} - p|x - x_0|^{p-1} < 0. \end{aligned}$$

Ako je $x \in \langle \frac{y_0-l}{k}, +\infty \rangle$, onda je

$$\frac{d\varphi_p(x)}{dx} = |k|^p p \left| x - \frac{y_0 - l}{k} \right|^{p-1} + p|x - x_0|^{p-1} > 0.$$

Preostaje promatrati slučaj $x \in \langle x_0, \frac{y_0-l}{k} \rangle$. Ovdje je

$$\frac{d\varphi_p(x)}{dx} = -|k|^p p \left| x - \frac{y_0 - l}{k} \right|^{p-1} + p|x - x_0|^{p-1}. \tag{5}$$

Rješenje jednadžbe $\frac{d\varphi_p(x)}{dx} = 0$, glasi

$$\xi_p = \frac{1}{|k|^{\frac{p}{p-1}} + 1} x_0 + \frac{|k|^{\frac{p}{p-1}}}{|k|^{\frac{p}{p-1}} + 1} \frac{y_0 - l}{k}. \tag{6}$$

Uočimo da je $\xi_p \in \langle x_0, \frac{y_0-l}{k} \rangle$. Kandidati za točku u kojoj se postiže minimum funkcije φ_p^p su x_0, $\frac{y_0-l}{k}$ te ξ_p zadana s (6). Pokažimo da je

$$d_p(T_0, \pi) = \min \left\{ \varphi_p^p(x_0), \varphi_p^p\left(\frac{y_0 - l}{k} \right), \varphi_p^p(\xi_p) \right\} = \varphi_p^p(\xi_p).$$

Uočimo da za svaki $1 < p < \infty$ i svaki $k \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left(|k|^{\frac{p}{p-1}} + 1 \right)^{\frac{p-1}{p}} > |k|, \tag{7}$$

te

$$\left(|k|^{\frac{p}{p-1}}+1\right)^{\frac{p-1}{p}} > 1. \tag{8}$$

Prema (7) i (8) imamo

$$d_p(T_0,\pi) = \min\left\{\frac{|kx_0+l-y_0|}{|k|}, |kx_0+l-y_0|, \frac{|kx_0+l-y_0|}{\left(|k|^{\frac{p}{p-1}}+1\right)^{\frac{p-1}{p}}}\right\} = \frac{|kx_0+l-y_0|}{\left(|k|^{\frac{p}{p-1}}+1\right)^{\frac{p-1}{p}}}$$

4 Domaća zadaća

Zadatak 1. *Pokažite da* l_∞ *udaljenost točke* $T_0 = (x_0, y_0)$ *do pravca* π *zadanog jednadžbom* $y = kx + l$ *glasi*

$$d_\infty = \frac{|kx_0+l-y_0|}{|k|+1}.$$

Zadatak 2. *Izvedite formulu za* l_∞ *projekciju točke* $T_0 = (x_0, y_0)$ *na pravac* π *koji je zadan jednadžbom* $y = kx + l$*.*

Literatura

E. Melachrinoudis, *An Analytical Solution to the Minimum* L_p*-Norm of a Hyperplane*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **211**(1997), 172-189