Poglavlje 5

Dodatak

5.1 Osnove algebre skupova

Skup A **podskup je skupa** B ($A \subseteq B$) ako je svaki element skupa A ujedno element i skupa B.

Skup A **jednak je skupu** B ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Unija skupova A i B skup je $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$.

Presjek skupova A i B skup je $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.

Razlika skupova A i B skup je $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$.

Simetrična razlika skupova A i B skup je $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Komplement skupa (događaja) $A \subseteq \Omega$ skup je $A^C = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ kojeg nazivamo suprotan događaj događaja A.

Komplement prostora elementarnih događaja jest prazan skup, tj. $\Omega^C = \emptyset$. Cijeli prostor elementarnih događaja Ω nazivamo **siguran događaj**, a njegov komplement **nemoguć događaj**.

Konačna unija skupova (događaja) $A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq \Omega$ skup je

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \vee \omega \in A_2 \vee \ldots \vee \omega \in A_n\} =$$
$$= \{\omega \in \Omega : \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ t.d. } \omega \in A_i\}.$$

Konačan presjek skupova (događaja) $A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq \Omega$ skup je

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1 \wedge \omega \in A_2 \wedge \ldots \wedge \omega \in A_n\} =$$
$$= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Osnovna svojstva skupovnih operacija

1.	$A \cup B = B \cup A$	Komutativnost
2.	$A \cap B = B \cap A$	
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Asocijativnost
4.	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
5.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivnost
6.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
7.	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	De Morganovi zakoni
8.	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	

Tablica 5.1: Osnovna svojstva skupovnih operacija.

5.2 Osnovni kombinatorni rezultati

Najpoznatiji su kombinatorni principi prebrojavanja:

Princip jednakosti

Neka su S i T konačni skupovi. Ako postoji bijekcija među njima, tada su skupovi S i T jednakobrojni, tj. $k(S) = k(T)$, gdje su $k(S)$ i $k(T)$ oznake za kardinalne brojeve skupova S i T, redom.

Princip sume

Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi takvi da je $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$ (dakle, disjunktni su). Tada je $(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n)$ konačan skup i vrijedi:

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = k(S_1) + k(S_2) + \ldots + k(S_n).$$

Princip produkta

Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi (ne nužno disjunktni). Tada je njihov Kartezijev produkt konačan skup i vrijedi:

$$k(S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n) = k(S_1) \cdot k(S_2) \cdot \ldots \cdot k(S_n).$$

Teorem 5.1 (Teorem o uzastopnom prebrojavanju)**.** *Neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi i neka je $T \subset (A_1 \times \ldots \times A_n)$ skup uređenih n-torki $(a_1, \ldots, a_n)$ definiranih na sljedeći način: prva komponenta a_1 može se birati na k_1 načina (dakle, među k_1 različitih elemenata skupa A_1); za svaku već izabranu prvu komponentu drugu komponentu a_2 možemo birati na k_2 različitih načina itd. Za svaki izbor komponenata $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ n-tu komponentu a_n možemo odabrati na k_n različitih načina. Tada je kardinalni broj skupa T jednak:*

$$k(T) = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n.$$

Primjer 5.1. *Ako želimo odabrati jedan par, mladića i djevojku, iz razreda koji se sastoji od 21 djevojke i 2 mladića, broj načina na koji to možemo učiniti jednak je broju elemenata kartezijevog produkta skupa koji se sastoji od 21 elemenata i skupa koji se sastoji od 2 elementa. Dakle, prema principu produkta, to možemo učiniti na 42 načina.*

Uređeni razmještaji nazivaju se **permutacije**, a neuređeni razmještaji **kombinacije**.

Definicija 5.1. *Neka je $A = \{a_1, \dots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$.* **Varijacija r-tog razreda** *u skupu A svaka je uređena r-torka međusobno različitih elemenata iz skupa A. Broj varijacija r-tog razreda n-članog skupa je*

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Primjer 5.2. *Neka je A skup koji se sastoji od deset elemenata. Svaka uređena trojka elemenata skupa A jedna je varijacija trećeg razreda skupa A. Takvih varijacija ima*

$$V_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720.$$

Definicija 5.2. *Svaku uređenu n-torku skupa od n elemenata zovemo* **permutacija**. *Broj je permutacija n-članog skupa*

$$p_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Napomena 5.1. *Permutacija je u n-članom skupu svaka varijacija n-tog razreda tog skupa, odnosno permutacija n-članog skupa svaka je bijekcija tog skupa na samog sebe.*

Primjer 5.3. *Ako se pitamo na koliko načina pet ljudi može stati u red, zapravo se pitamo koliko permutacija ima peteročlani skup. Broj je permutacija peteročlanog skupa $V_5^5 = 5! = 120$.*

Definicija 5.3. *Neka je $A = \{a_1, \dots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$.* **Kombinacija r-tog razreda** *u skupu A svaki je r-člani podskup skupa A. Broj je kombinacija r-tog razreda skupa od n elemenata*

$$C_n^r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Primjer 5.4. *U razredu ima 15 dječaka i 10 djevojčica. Na primjer:*

> *Tri dječaka možemo odabrati na onoliko načina koliko ima različitih kombinacija trećeg razreda skupa od 15 elemenata, dakle na*
>
> $$C_{15}^3 = \binom{15}{3}$$
>
> *načina.*
>
> *Prema principu produkta slijedi da tri dječaka i dvije djevojčice možemo odabrati na*
>
> $$C_{15}^3 \cdot C_{10}^2 = \binom{15}{3} \cdot \binom{10}{2}$$
>
> *načina.*
>
> *Jednak broj dječaka i djevojčica možemo odabrati na*
>
> $$\sum_{k=1}^{10} C_{15}^k \cdot C_{10}^k = \sum_{k=1}^{10} \binom{15}{k} \cdot \binom{10}{k}$$
>
> *načina.*

Definicija 5.4. *Neka je $A = \{a_1, \dots a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata.* **Varijacija s ponavljanjem r-tog razreda skupa od n-elemenata** *svaka je uređena r-torka elemenata iz skupa A. Broj je takvih varijacija s ponavljanjem n^r.*

Primjer 5.5. *Ako se pitamo koliko ima binarnih nizova (nizova čiji su elementi samo nule i jedinice), zapravo se pitamo koliko ima različitih varijacija sedmog razreda s ponavljanjem dvočlanog skupa. Takvih varijacija s ponavljanjem ima* $2^7 = 128$.

Definicija 5.5. *Neka je* $A = \{a_1, \dots a_n\}$ *skup koji se sastoji od* n *elemenata.* **Permutacija s ponavljanjem r-tog razreda** *svaka je uređena* r*-torka elemenata iz skupa* A *među kojima je* n_1 *elemenata međusobno jednakih,* n_2 *elemenata međusobno jednakih,* $\dots$, n_k *elemenata međusobno jednakih, pri čemu je* $n_1 + n_2 + \dots + n_k = r$. *Broj je takvih permutacija s ponavljenjem*

$$P_r^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{r!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Primjer 5.6. *Ako nas zanima koliko se različitih riječi, smislenih i besmislenih, može napisati od slova riječi "matematika", tada nas zapravo zanima broj permutacija s ponavljanjem desetog razreda, pri čemu imamo tri slova A, dva slova M i dva slova T. Takvih permutacija s ponavljanjem ima*

$$P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200.$$

Dakle, od slova riječi "matematika" može se napisati ukupno 151200 *različitih riječi.*

5.3 Ponovljeni red

U diskretnoj je teoriji vjerojatnosti česta potreba za računanjem sume tzv. ponovljenog reda[1]. Da bismo pojasnili razliku između ponovljenog reda i običnog reda, podsjetimo se da je red uređeni par dvaju nizova $((a_n), (s_n))$ od kojih drugi niz nastaje sumiranjem prvih n članova prvog niza, tj.

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots a_n.$$

Pritom kažemo da red konvergira ako konvergira niz parcijalnih suma (s_n) [13].
Ponovljeni red nastaje tako da prvo napravimo jednu particiju[2] skupa prirodnih brojeva $(M_i, i \in \mathbb{N})$ pa posebno zbrojimo one članove niza čiji indeksi pripadaju u M_i, a zatim sve tako dobivene sume, ako takve sume postoje.

Primjer 5.7. *Neka je zadan geometrijski red s kvocijentom* $\frac{1}{2}$ *i prvim članom* $\frac{1}{2}$, *tj.*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Taj red konvergentan je i suma mu je 1. *Isti rezultat dobit ćemo ako podijelimo skup indeksa* $\mathbb{N}$ *na parne i neparne brojeve, tj. ako promatramo particiju* $\{N, P\}$ *skupa prirodnih brojeva, pri čemu je*

$$N = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}, \quad P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

---

[1] Pod pojmom "ponovljeni red" ovdje porazumijevamo samo dvostruki red.

[2] Familija skupova $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$ čini particiju skupa A ako su zadovoljena sljedeća svojstva:

1. $M_i \subseteq A$, $\forall i \in \mathbb{N}$,
2. $M_i \cap M_j = \emptyset$ za sve $i \neq j$,
3. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = A$.

Budući da je $\mathbb{N} = P \cup N$, sumu spomenutog geometrijskog reda možemo izračunati tako da prvo zbrojimo sve članove niza s parnim eksponentima, zatim sve članove niza s neparnim eksponentima, a zatim te dvije sume:

$$\sum_{n\in N} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3},$$

$$\sum_{n\in P} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Očito vrijedi:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = \sum_{n\in N} \frac{1}{2^n} + \sum_{n\in P} \frac{1}{2^n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Za zadavanje ponovljenog reda treba nam niz (a_n) i particija skupa $\mathbb{N}$: $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$. Ako za svaki $i \in \mathbb{N}$ konvergiraju redovi $\sum\limits_{j\in M_i} a_j$ i sume im označimo

$$A_i = \sum_{j\in M_i} a_j,$$

tada definiramo ponovljeni red kao

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} a_j = \sum_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

Primjer 5.8. *Neka je zadana beskonačna matrica realnih brojava:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Takve matrice često koristimo za zadavanje ponovljenih redova s obzirom da se particije skupa $\mathbb{N}$ često mogu lakše prikazati korištenjem dvaju indeksa. Iz beskonačne matrice možemo definirati mnogo ponovljenih redova. Navedimo nekoliko primjera:

- *Sumirajmo prvo članove matrice po redovima:*

$$A_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Ako te sume postoje, tj. ako je $A_i < \infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$, možemo definirati ponovljeni red

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

- *Sumirajmo prvo članove matrice po stupcima:*

$$A_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Ako te sume postoje, tj. ako je $A_j < \infty$, $\forall j \in \mathbb{N}$, možemo definirati ponovljeni red

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

- *Osim zbrajanja po stupcima ili recima, možemo particiju praviti i na druge načine, npr. po pavilima koji su slikovito prikazani u sljedećoj matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

S obzirom da se iz istog niza (a_n) brojeva može definirati mnogo različitih ponovljenih redova, pitanje je koliko se toga u konačnici "preslagivanjem" mijenja. Npr. ako jedan ponovljeni red konvergira, može li se "preslagivanjem" dogoditi da novonastali ponovljeni red ne konvergira, može li se uopće definirati ponovljeni red za bilo koju particiju skupa indeksa, itd. Da tako postavljena pitanja imaju smisla, potvrđuje sljedeći primjer:

Primjer 5.9. *Neka je zadana beskonačna realna matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Svi redovi koji nastaju sumiranjem elemenata iz jednog retka te matrice divergentni su, tj. za svaki $i \in \mathbb{N}$ divergentni su redovi

$$\sum_j a_{ij}.$$

Dakle, ponovljeni red ne može se definirati tako da se prvo sumira po redovima zadane beskonačne matrice. Slično vrijedi i ako se prvo sumira po stupcima. Međutim, ako particiju pravimo po bilo kojoj od dviju shema označenih u matricama:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

vidimo da sume uvijek postoje. Dakle, ponovljene redove po tim particijama možemo definirati.

Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete koji jamče da se "preslagivanjem" neće promijeniti suma ponovljenog reda.

Teorem 5.2. *Neka je s $(a_n, n \in \mathbb{N})$ dan niz realnih brojeva i neka je $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$ jedna particija skupa prirodnih brojeva. Red*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

konvergira onda i samo onda ako konvergira red

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in M_i}|a_j|.$$

U slučaju konvegencije sume su im iste.

Dokaz. Pretpostavimo da red

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in M_i}|a_j|$$

konvergira i označimo njegovu sumu L. Red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$ red je s pozitivnim članovima i očigledno je njegov niz parcijalnih suma ograničen realnim brojem L. Dakle, i taj red konvergentan je (pogledati npr. [13]). Nadalje, s obzirom da je apsolutno konvergentan red realnih brojeva ujedno i konvergentan (pogledati npr. [13]), slijedi da je i red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n$ konvergentan.

Pretpostavimo sada da konvergira red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$$

i njegovu sumu označimo s L. Tada za svaki element M_i particije skupa prirodnih brojeva pripadni red

$$\sum_{j\in M_i}|a_j|$$

predstavlja red realnih brojeva s pozitivnim članovima čiji je niz parcijalnih suma ograničen. Dakle, za svaki je $i\in\mathbb{N}$ takav red konvergentan. Označimo:

$$\sum_{j\in M_i}|a_j| = A_i,\quad i\in\mathbb{N}.$$

Dokažimo da i red

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}A_i$$

konvergira te da mu je suma L. U tu svrhu označimo $(b_{1i}, i\in\mathbb{N})$ podniz niza $(|a_i|, i\in\mathbb{N})$ koji čine oni elementi s indeksima iz M_1. Analogno, za svaki $k\in\mathbb{N}$ definirajmo odgovarajući podniz $(b_{ki}, i\in\mathbb{N})$ niza $(|a_i|, i\in\mathbb{N})$ koji čine oni elementi s indeksima iz M_k. Uočimo da je tako nastali skup podnizova od $(|a_i|, i\in\mathbb{N})$ pokupio sve njegove članove te da se niti jedan član ne pojavljuje više od jednom. S obzirom da se radi o pozitivnim brojevima, posljedica je toga da za svaki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \cdots A_n &= \lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}b_{1i} + \lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}b_{2i} + \cdots + \lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{l}b_{ni} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{l}b_{1i} + \cdots + \sum_{i=1}^{l}b_{ni}\right] < L. \end{aligned}$$

Dakle, red s pozitivnim članovima ograničen je, pa je time i konvergentan. Označimo njegovu sumu V. Očigledno je da je i $V\le L$ s obzirom da je L gornja međa pripadnog niza parcijalnih suma. Pokažimo da je istovremeno i $V\ge L$. Naime, za svaku k-tu parcijalnu sumu reda $\sum\limits_{i=1}^{k}|a_i|$ možemo naći dovoljno veliki n tako da je

$$\sum_{i=1}^{n}A_i \ge \sum_{i=1}^{k}|a_i|.$$

Pripadne će granične vrijednosti onda također zadovoljavati istu nejednakost, što znači da je $V\ge L$. Dakle, mora biti $V=L$.

Teorem 5.3. *Neka je s $(a_n, n \in \mathbb{N})$ dan niz realnih brojeva i neka je $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$ jedna particija skupa prirodnih brojeva. Ako jedan od redova*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|, \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} |a_j|$$

konvergira, onda konvergiraju i redovi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n, \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} a_j$$

i sume su im iste.

Dokaz. Koristeći prethodni teorem i činjenicu da je apsolutno konvergentan red realnih brojeva ujedno i konvergentan, da bismo dokazali tvrdnju teorema dovoljno je dokazati da konvergencija reda $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ povlači konvergenciju reda $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j\in M_i} a_j$ te da je tada

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} a_j.$$

U tu svrhu uočimo da iz pretpostavke o konvergenciji reda $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ možemo zaključiti:

- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergentan je. Označimo:

$$V = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

- $\sum\limits_{j\in M_i} |a_j|$ konvergentan je za svaki $i \in \mathbb{N}$ pa je time i $\sum\limits_{j\in M_i} a_j$ konvergentan. Označimo:

$$\sum_{j\in M_i} a_j = A_i.$$

Slično kao u dokazu prethodnog teorema, za svaki $i \in \mathbb{N}$ definirajmo odgovarajući podniz $(b_{ik}, k \in \mathbb{N})$ niza $(a_j, j \in \mathbb{N})$ koji čine elementi s indeksima iz M_i, tj.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} b_{ik} = A_i.$$

Uočimo da je tako nastali skup podnizova od $(a_j, j \in \mathbb{N})$ pokupio sve njegove članove te da se niti jedan član ne pojavljuje više od jednom.
Iz apsolutne konvergencije reda $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ znamo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{j=k_0+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon, \tag{5.1}$$

odakle slijedi da je

$$\left| V - \sum_{j=1}^{k_0} a_j \right| = \left| \sum_{j=k_0+1}^{\infty} a_j \right| \leq \sum_{j=k_0+1}^{\infty} |a_j| < \varepsilon.$$

Neka su n_0 i l_0 dovoljno veliki prirodni brojevi da izraz

$$\sum_{i=1}^{n_0} \sum_{k=1}^{l_0} b_{ik} - \sum_{j=1}^{k_0} a_j$$

predstavlja sumu članova reda $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j$ s indeksima većim od k_0. Tada za svaki $n \geq n_0$ i $l \geq l_0$ vrijedi:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} b_{ik} - \sum_{j=1}^{k_0} a_j\right| < \varepsilon,$$

pa prijelazom na limes po $l \to \infty$ vidimo da je

$$\left|\sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{j=1}^{k_0} a_j\right| < \varepsilon.$$

Koristeći prethodnu nejednakost i nejednakost (5.1) vidimo da je

$$\left|\sum_{i=1}^{n} A_i - V\right| < 2\varepsilon, \quad \forall n > n_0,$$

Dakle, red $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\sum\limits_{j\in M_i} a_j$ konvergira i suma mu je V.