Poglavlje 1

Pojam i osnovna svojstva vjerojatnosti

Pojam vjerojatnosti nastao je u pokušaju brojčanog izražavanja stupnja vjerovanja da će se dogoditi neki zamišljeni događaj. Na primjer, često možemo čuti ili pročitati: "vjerojatnost da će sutra padati kiša je 75%", "vjerojatnost da dobijem prolaznu ocjenu na ispitu mi je oko 50%", "100% sam siguran u pobjedu Blanke Vlašić na ovom natjecanju", itd. Pitanje je kako nastaju brojevi kojima je izražen stupanj vjerovanja da se dogodi neki događaj i kako ih možemo iskoristiti. Teorija vjerojatnosti dio je matematike koji se bavi tom problematikom.

Nastanak se teorije vjerojatnosti tradicionalno stavlja u 17. stoljeće iako postoje dokazi da su se već indijski matematičari (3. st. pr. Kr.) bavili pitanjima koja pripadaju današnjoj teoriji vjerojatnosti te da je u 14. stoljeću postojala praksa pomorskog osiguranja koja je omogućila srednjovjekovnim trgovcima ocjenjivanje različitih faktora rizika koji se pojavljuju prilikom prekomorskog trgovanja. Prvi matematički rezultati koji se mogu jasno prepoznati kao temelj teorije vjerojatnosti vezani su uz igre na sreću i uz izradu tablica smrtnosti. Više detalja o nastanku teorije vjerojatnosti pogledajte npr. na internetskoj adresi http://www.economics.soton.ac.uk/staff/aldrich/Figures.htm.

Povijesno gledano, koncept vjerojatnosti događaja temelji se na ideji odnosa dijela i cjeline. Pri tome se odnos dijela i cjeline koristi na dva načina:

- klasičan pristup i
- statistički pristup.

U sljedećim poglavljima opisat ćemo detaljno oba povijesna koncepta vjerojatnosti kao i aksiomatsku definiciju vjerojatnosti kojom ćemo se koristiti u ovom kolegiju, ali prije toga trebamo upoznati temeljni objekt koji se koristi prilikom matematičkog modeliranja vjerojatnosti. Zvat ćemo ga **skup ili prostor elementarnih događaja**.

1.1 Prostor elementarnih događaja

Bacanje igraće kocke jedan je od klasičnih i jednostavnih pokusa kojim ćemo se koristiti u ovom kolegiju za ilustraciju mnogih novih pojmova. Prilikom bacanja igraće kocke kao rezultat jednog bacanja pojavljuje se točno jedan broj iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ako je kockica pravilno izrađena, opravdano je pretpostaviti jednaku mogućnost pojavljivanja bilo kojeg od navedenih šest brojeva. Koristeći se idejom vjerojatnosti događaja kao odnosa dijela i cjeline, možemo zaključiti da je vjerojatnost pojavljivanja parnog broja pri bacanju igraće kocke ista kao i vjerojatnost pojavljivanja neparnog broja s obzirom da je parnih brojeva isto koliko i neparnih u cjelini koju čini navedeni skup. Također, vjerojatnost pojavljivanja broja dva mora biti ista kao i vjerojatnost pojavljivanja broja pet jer oni čine po brojnosti jednake dijelove cjeline.

Na osnovu principa odnosa dijela i cjeline uočavamo da je prvi korak prema definiranju vjerojatnosti događaja spoznavanje cjeline. Naime, da bismo imali mjeru za vjerojatnost da se dogodi ono što nas konkretno zanima, moramo prvo znati što je to "sve" što se može dogoditi za naš pokus ili promatranje, tj. što čini "cjelinu". Zato ćemo, da bismo počeli graditi matematički model, uz jedan pokus (odnosno promatranje) vezati skup koji kao elemente sadrži sve što se može realizirati kad izvedemo pokus (promatranje) i zvat ćemo ga **skup svih mogućih ishoda** ili **prostor elementarnih događaja**. Najčešće takav skup označavamo sa Ω. Jedina pretpostavka na prostor elementarnih događaja jest da je neprazan i da zaista sadrži sve što se može realizirati u pokusu (odnosno promatranju).

Ako skup svih mogućih ishoda Ω sadrži samo jedan element, onda pokus ima samo jednu moguću realizaciju pa točno znamo što će se dogoditi kada ga izvedemo, zbog čega takav pokus zovemo **deterministički pokus**.

Primjer 1.1 (DETERMINISTIČKI POKUS).

a) Rezultat zagrijavanja vode pod normalnim atmosferskim tlakom na temperaturu od $100°C$ *ima samo jedan ishod: voda isparava, tj. voda iz tekućeg prelazi u plinovito agregatno stanje.*

b) Miješanje vode i jestivog ulja pri normalnim atmosferskim uvjetima ima jedinstveni ishod - stvara se emulzija ulja i vode pri čemu ulje pliva na vodi.

c) Pritiskanje papučice "gasa" pri vožnji tehnički ispravnog automobila ima jedinstveni ishod - brzina automobila povećava se. Analogno tomu, pritiskanje kočnice u istim uvjetima ima za ishod smanjenje brzine kretanja automobila.

Prostore elementarnih događaja koji imaju više elemenata (barem dva, a može i beskonačno mnogo!) koristimo ako ne možemo sa sigurnošću znati realizaciju pokusa (promatranja). Za takav pokus kažemo da ima slučajne ishode, tj. da je pokus **slučajan**.

Primjer 1.2 (Slučajan pokus).

a) **Bacanje igraće kocke** - *ako nas zanima ishod jednog bacanja igraće kocke, "sve", tj. prostor elementarnih događaja jest skup*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

b) **Slučajan izbor znamenke** - *ako nas zanima ishod slučajnog izbora jedne znamenke u dekadskom sustavnu, prostor elementarnih događaja jest skup*

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

c) **Loto 6 od 45** - *ako nas zanima rezultat izvlačenja u igri "Loto 6 od 45", prostor elementarnih događaja jest skup*

$$\{\{i_1, \dots, i_6\} : i_1, \dots, i_6 \in \{1, \dots, 45\},\ 1 \leq i_1 < \dots < i_6 \leq 45\}.$$

d) Ako prognoziramo sutrašnju temperaturu zraka u Osijeku (u hladu), prostor elementarnih događaja možemo postaviti na različite načine. Jedna je mogućnost, npr. $\Omega = [-50, 50]$*, ili* $\Omega = [-100, 100]$*. Zapravo, možemo pretpostaviti i da je* $\Omega = [-273.15, \infty\rangle$*, gdje je* $-273.15°C$ *temperatura poznata pod nazivom apsolutna nula. Važno je da* Ω *bude neprazan skup i da uistinu sadrži sve moguće realizacije prognoziranja. Naravno da je ponekad praktično ugraditi već u* Ω *što više informacija o pokusu koji modeliramo, tj. suziti* Ω*, ali to nije nužno za modeliranje.*

Jednom kad smo odredili prostor elementarnih događaja slučajnog pokusa, tj. Ω, treba izraziti stupanj vjerovanja da se neki događaj dogodi. Međutim, kako opisujemo događaj kao matematički objekt? Do sada znamo da prostor elementarnih događaja sadrži sve moguće ishode pokusa, no sadrži li i sve događaje koji su nama zanimljivi? Na primjer, u pokusu bacanja igraće kocke zanima nas hoće li se okrenuti paran broj. Očigledno je da će se dogoditi paran broj ako se realizira bilo koji od ishoda 2, 4 ili 6. Dakle, taj je događaj prirodno modelirati kao podskup od Ω i to kao skup $\{2, 4, 6\}$. Očigledno je da ćemo događaje vezane uz neki slučajan pokus modelirati kao podskupove od Ω. Općenito u teoriji vjerojatnosti neki podskupovi skupa Ω nisu prikladni da ih zovemo događajima, ali zasad nećemo detaljno opisivati familiju događaja o kojoj će više riječi biti u poglavlju 1.4. Bit će nam dovoljno znati da je **događaj** vezan uz dani slučajan pokus uvijek **podskup prostora elementarnih događaja** tog pokusa.

U nastavku navodimo povijesne pristupe za modeliranje vjerojatnosti događaja (klasičan i statistički), kao i definiciju vjerojatnosti koja se danas standardno koristi u matematičkoj teoriji.

1.2 Klasičan pristup

U praksi često susrećemo primjere pokusa u kojima je **prostor elementarnih događaja konačan** i svaki je pojedini ishod **jednako moguć**. Veliki broj klasičnih igara na sreću odgovara tim pretpostavkama. Na primjer:

za bacanje pravilno izrađenog novčića (idealan slučaj, tj. nema varanja!) prostor elementarnih događaja jest $\Omega = \{pismo, glava\}$ i svaki je od tih ishoda jednako moguć,

za bacanje pravilno izrađene igraće kocke (idealan slučaj, tj. nema varanja!) prostor elementarnih događaja jest $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i svaki je od tih ishoda jednako moguć,

za "Loto 6 od 45" prostor elementarnih događaja jest

$$\Omega = \{\{i_1, \ldots, i_6\} : i_1, \ldots, i_6 \in \{1, \ldots, 45\},\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_6 \leq 45\}$$

i realizacija je svakog šestorčlanog skupa iz Ω jednako moguća,

za rulet je prostor elementarnih događaja $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$ i svaki je od tih ishoda jednako moguć.

Kod takvih je pokusa moguće prebrojati sve ishode koji su povoljni za događaj i sve ishode koji nisu povoljni za događaj. Omjer se tih dvaju brojeva često u praksi koristi za izražavanje stupnja vjerovanja u realizaciju događaja. Evo nekoliko primjera:

Primjer 1.3. *U slučajnom pokusu bacanja igraće kocke, na temelju pretpostavke o istoj mogućnosti da se okrene bilo koji broj, kaže se da je šansa* $3 : 3$ *da se okrene paran broj. Dakle, stupanj vjerovanja u pojavu događaja izražen je stavljanjem u omjer broja ishoda koji su povoljni i broja ishoda koji su nepovoljni. Međutim, isti se omjer može iskazati i na mnogo drugih načina, npr.* $1 : 1$.

Primjer 1.4. *U skupini ljudi iz koje se sasvim slučajno bira jedna osoba nalazi se* 30 *muškaraca i* 60 *žena. U tom je pokusu šansa da izaberemo ženu* 60 : 30*. Taj se omjer takoder može prikazati na više načina, tj. kao* 6 : 3 *ili* 2 : 1.

Omjer broja povoljnih i nepovoljnih događaja ilustriran u navedenim primjerima ne stavlja u odnos dio i cjelinu nego dva dijela iste cjeline - dio koji znači realizaciju događaja koji nas zanima i dio koji znači da se taj događaj nije realizirao. Klasičan pristup modeliranju vjerojatnosti ne računa vjerojatnost na taj način nego određuje vjerojatnost kao mjeru koja dio suprotstavlja cjelini, tj. dijeli broj ishoda povoljnih za događaj brojem svih mogućih ishoda.

Klasičan način računanja vjerojatnosti

Pretpostavke na pokus	konačan prostor elementarnih događaja, svi su ishodi pokusa jednako mogući
Događaj	$A \subseteq \Omega$
Vjerojatnost događaja A	kvocijent broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa Ω, tj. $P(A) = \dfrac{k(A)}{k(\Omega)}$

Ovdje je $P(A)$ oznaka za vjerojatnost događaja A, dok je $k(A)$ oznaka za broj elemenata skupa A.

Problem se određivanja vjerojatnosti po klasičnom pristupu svodi na problem prebrojavanja elemenata skupova. Dakle, da bismo mogli računati vjerojatnost na spomenuti način, morat ćemo nešto znati o rješavanju kombinatornih problema.

Primjer 1.5. *Skup svih mogućih ishoda bacanja igraće kocke jest skup* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*. Budući da je* Ω *konačan skup i kocka je za igru (pa je pretpostavka da je pravilno izrađena, tj. mogućnost realizacije bilo kojeg od brojeva jedan do šest jest jednaka), ovdje možemo primijeniti klasičan pristup određivanja vjerojatnosti. Na primjer, vjerojatnost događaja "na gornjoj strani kocke realizirao se paran broj", koji predstavljamo skupom* $A = \{2, 4, 6\}$ *svih parnih elemenata skupa* Ω*, jednaka je vjerojatnosti događaja "na gornjoj strani kocke realizirao se neparan broj", koji predstavljamo skupom* $B = \{1, 3, 5\}$ *svih neparnih elemenata skupa* Ω*. Osim toga, vjerojatnosti događaja A i B jednake su vjerojatnosti bilo kojeg događaja koji možemo predstaviti nekim tročlanim podskupom skupa* Ω.

Primjer 1.6. *Pretpostavimo da se u šeširu nalazi sedam kuglica jednakih karakteristika (od istog su materijala, jednake mase i promjera). Poznato je da su kuglice numerirane brojevima od jedan do sedam te da su dvije kuglice crvene, a pet kuglica zelene boje. Promotrimo pokus nasumičnog izvlačenja jedne kuglice iz šešira. Na temelju načina provođenja postavljenog pokusa i sadržaja šešira možemo promatrati sljedeće slučajeve.*

Zanimaju nas ishodi slučajnog pokusa temeljeni na broju kojim je kuglica numerirana - u tom je slučaju prostor elementarnih događaja skup

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Primjenom klasičnog pristupa računanja vjerojatnosti svi događaji koji se mogu predstaviti jednakobrojnim podskupovima skupa Ω jednako su mogući, no kako u šeširu ima više kuglica numeriranih neparnim brojevima, vjerojatnost događaja "izvučena je kuglica numerirana neparnim brojem" koji predstavljamo skupom $A = \{1, 3, 5, 7\}$ je veća od vjerojatnosti događaja "izvučena kuglica numerirana je parnim brojem" koji predstavljamo skupom $B = \{2, 4, 6\}$, tj.

$$P(A) = \frac{4}{7}, \quad P(B) = \frac{3}{7}, \quad P(A) > P(B).$$

Zanimaju nas ishodi slučajnog pokusa temeljeni na boji kuglice - u tom je slučaju prostor elementarnih događaja skup

$$\Omega = \{C, Z\},$$

pri čemu C označava događaj "izvučena je kuglica crvene boje", a Z događaj "izvučena je kuglica zelene boje". Budući u šeširu ima dvije crvene i pet zelenih kuglica, vidimo da elementarni događaji C i Z nisu jednako mogući, tj.

$$P(C) = \frac{2}{7}, \quad P(Z) = \frac{5}{7}, \quad P(C) < P(Z).$$

Klasičan koncept pripisivanja vjerojatnosti pojedinim događajima odigrao je veliku ulogu u razvoju teorije vjerojatnosti, ali nije uvijek primjenjiv. Čak i ako je prostor elementarnih događaja konačan, ne moraju biti svi ishodi jednako mogući. Zamislimo samo da igramo 1000 igara s kockom te da se u 90% bacanja okrenuo broj 6. Tko je od nas sklon vjerovati da su u tom pokusu svi ishodi jednako mogući?

Primjer 1.7. *Slučajni pokusi u kojima nije ispunjen uvjet jednake vjerojatnosti svih elementarnih događaja su npr.*

bacanje nepravilno izrađenog (tzv. nestandardnog) novčića (tj. novčića pri čijem je bacanju favorizirana realizacija ili pisma ili glave),

bacanje nepravilno izrađene (tzv. nestandardne) igraće kocke (tj. kocke pri čijem je bacanju favorizirana realizacija jednog ili više brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

1.3 Statistički pristup

Ideja određivanja stupnja vjerovanja u pojavu događaja kao dijela cjeline ili kao omjer dijela povoljnog za događaj i dijela nepovoljnog za događaj može se iskoristiti i u drugom kontekstu. Primjer za to jest prognoziranje pobjednika nekog sportskog susreta na temelju rezultata prethodnih natjecanja istih suparnika. Npr., ako je uzajamnim natjecanjima u tenisu igrač A pobijedio igrača B u 9 od 11 susreta, njegova se šansa za pobjedu u sljedećem susretu najčešće prognozira kao 9 : 2. Princip primijenjen u tom primjeru temelji se na mogućnosti nezavisnog ponavljanja uvijek istog pokusa, a stupanj vjerovanja u pojavu događaja izražava se na temelju broja pojavljivanja i nepojavljivanja događaja prilikom ponavljanja. Izražavanje stupnja vjerovanja u pojavu događaja moglo bi se numerički izraziti također stavljanjem u omjer dijela i cjeline, tj. kao $\frac{9}{11}$.

Za računanje vjerojatnosti koja slijedi tu logiku iskoristit ćemo pojmove frekvencije i relativne frekvencije događaja.

Definicija 1.1. *Pokus je ponovljen n puta. Ako se pritom događaj A dogodio n_A puta, broj n_A zovemo* **frekvencija događaja** *A. Broj*

$$f_A(n) = \frac{n_A}{n}$$

zovemo **relativna frekvencija događaja** *A.*

Iz definicije frekvencije slijedi da je frekvencija n_A cijeli broj za koji vrijedi

$$0 \leq n_A \leq n,$$

a relativna frekvencija $f_A(n)$ racionalan broj takav da je

$$0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1.$$

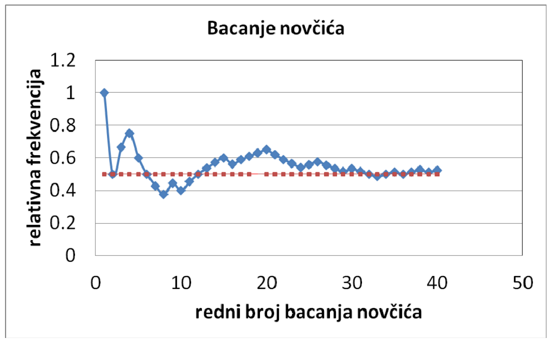
Primjer 1.8. *Promotrimo slučajan pokus bacanja pravilno izrađenog novčića sa skupom elementarnih događaja $\Omega = \{p, g\}$, gdje je p oznaka za događaj "palo je pismo", a g oznaka za događaj "pala je glava". U pokušaju definiranja vjerojatnosti da će pri jednom bacanju pasti pismo možemo koristiti klasičan pristup. Na taj način određujemo vjerojatnost da padne pismo kao*

$$P(\{p\}) = \frac{1}{2}.$$

Međutim, kako znamo da je novčić pravilno izrađen? Iskustveno znamo da to možemo provjeriti na sljedeći način: ako isti pokus ponovimo n puta, gdje je $n \in \mathbb{N}$ velik broj, kod pravilno se izrađenog novčića pismo i glava realiziraju približno jednak broj puta. U tom će slučaju biti $n_p \approx n/2$ i $n_g \approx n/2$. Prema tome, relativna frekvencija realizacije pisma iznosit će

$$\frac{n_p}{n} \approx \frac{1}{2}$$

(slika 1.1). U takvom je slučaju razumno uzeti $1/2$ kao vjerojatnost pojavljivanja pisma pri jednom bacanju novčića, tj. prihvatiti pretpostavku da je novčić pravilno izrađen.



Slika 1.1: Relativna frekvencija pojave pisma u ovisnosti o broju bacanja "n" za jedan niz bacanja.

Iskustvo nas uči da se kod mnogo nezavisnih ponavljanja istog pokusa relativna frekvencija nekog događaja stabilizira u okolini nekog broja. To svojstvo zovemo **statistička stabilnost relativnih frekvencija**.

Statistički pristup određivanja vjerojatnosti baziran je upravo na tom pricipu. Naime, ako slučajan pokus ima svojstvo statističke stabilnosti relativnih frekvencija, tada za vjerojatnost proizvoljnog događaja A vezanog uz taj pokus uzimamo realan broj $P(A) = p_A$ oko kojega se grupiraju relativne frekvencije $f_A(n)$ tog događaja.

1.4 Definicija vjerojatnosti

Oba navedena povijesna pristupa u određivanju vjerojatnosti imaju veliku ulogu u primjeni rezultata teorije vjerojatnosti u praksi, ali niti jedan od njih ne daje općenitu definiciju vjerojatnosti. Iz dosadašnjih razmatranja jasno je da vjerojatnost treba definirati za podskupove prostora elementarnih događaja. Zapravo, vjerojatnost ćemo definirati kao jednu mjeru skupova (podskupova od Ω) slično kao što je duljina jedna mjera skupova na pravcu ili površina jedna mjera skupova u ravnini. Iz teorijskih razloga (zainteresirani čitatelj dodatne informacije može pronaći u svakoj knjizi iz teorije mjere, npr. [3], [14]) nećemo vjerojatnost definirati uvijek za svaki podskup prostora elementarnih događaja, nego ćemo definirati dovoljno bogatu familiju podskupova od Ω koja će činiti temelj za definiciju vjerojatnosti. Takvu familiju podskupova od Ω zvat ćemo **familijom događaja**, a zahtjev koji mora ispunjavati dan je definicijom 1.2.

Definicija 1.2. *Neka je dan neprazan skup Ω. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω jest* **σ-algebra skupova na** Ω *ako vrijedi:*

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

ii) *ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$,*

iii) *ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$, onda $\mathcal{F}$ sadrži i njihovu uniju, tj.*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Ako je Ω prostor elementarnih događaja nekog pokusa, bilo koja σ-algebra na njemu može igrati ulogu familije događaja tog pokusa.

Svojstvo ii) naziva se zatvorenost σ-algebre na komplementiranje (tj. ako sadrži neki skup, sadrži i njegov komplement), a svojstvo iii) zatvorenost σ-algebre na prebrojivu uniju (tj. ako imamo prebrojivo mnogo skupova iz dane σ-algebre, onda će i njihova unija biti element te σ-algebre).

Iako je σ-algebra definirana samo s tri zahtjeva, ona može biti vrlo bogata. Naime, sadrži sve skupove koji će nam biti zanimljivi u primjenama, tj. skupove koji nastaju primjenom konačno ili prebrojivo mnogo standardnih skupovnih operacija nad skupovima koji su njezini elementi. Prije svega, uočimo da je cijeli Ω sigurno element σ-algebre, s obzirom da je komplement praznoga skupa. Nadalje, σ-algebra sigurno sadrži i sve konačne unije svojih elemenata jer se konačna unija uvijek može nadopuniti do prebrojive korištenjem prebrojivo mnogo praznih skupova. Primjerom 1.9 ilustriran je način na koji možemo provjeriti zatvorenost σ-algebre i za neke druge slučajeve.

Primjer 1.9.

- *Ako su $A, B \in \mathcal{F}$, prema svojstvu zatvorenosti σ-algebre na konačnu uniju jest skup $A \cup B$ također iz $\mathcal{F}$. Prema De Morganovom zakonu za komplementiranje konačne unije skupova i svojstvu* ii) *iz definicije σ-algebre vrijedi*

  $$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathcal{F}.$$

  Dakle, σ-algebra sadrži i presjek komplemenata svojih dvaju elemenata. S obzirom da za svaki skup vrijedi $(A^c)^c = A$, slijedi da σ-algebra sadrži i presjeke svakih svojih dvaju elemenata.

- *Pokažimo da je σ-algebra zatvorena i na prebrojive presjeke svojih elemenata. Naime, ako je $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ prebrojiva familija skupova, tada je prema svojstvu* ii) *iz definicije σ-algebre i $(A_n^c, n \in \mathbb{N})$ također prebrojiva familija događaja iz $\mathcal{F}$. Nadalje, prema svojstvu* iii) *iz definicije σ-algebre slijedi da je*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F}.$$

Naposljetku, prema De Morganovom zakonu za komplementiranje prebrojive unije skupova i svojstvu ii) *iz definicije σ-algebre slijedi da je*

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Time je dokazana zatvorenost σ-algebre na prebrojivo mnogo presjeka svojih elemenata.

- *Ako su $A, B \in \mathcal{F}$, prema svojstvu* ii) *iz definicije σ-algebre slijedi da su A^c i B^c elementi σ-algebre $\mathcal{F}$. Zbog zatvorenosti σ-algebre na konačne presjeke slijedi da je*

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}.$$

Dakle, σ-algebra sadrži i razliku svojih dvaju elemenata.

S obzirom na vezu koja postoji između povezivanja rečenica jezika i skupovnih operacija, σ-algebra zadovoljava potrebe koje nastaju u primjeni. Naime, čim sadrži neke skupove, sadrži i one skupove koji nastaju primjenom uobičajenih rečenica za njihovo kombiniranje. U sljedećem je primjeru ilustrirana ta tvrdnja na najčešće korištenim rečenicama.

Primjer 1.10. *Od svih nastavnika zaposlenih u nekoj srednjoj školi biramo jednu osobu te promatramo sljedeće događaje:*

A = *izabrana osoba predaje matematiku,*

B = *izabrana je osoba ženskog spola.*

Standardne skupovne operacije ilustrirane na primjeru tih dvaju događaja opisujemo sljedećim rečenicama:

$A \cup B$ = *izabrana osoba predaje matematiku ili je ženskog spola,*

$A \cap B$ = *izbrana osoba predaje matematiku i ženskog je spola*
(izabrana je osoba profesorica matematike),

$A \setminus B$ = *izabrana osoba predaje matematiku i nije ženskog spola*
(izabrana je osoba profesor matematike),

$B \setminus A$ = *izabrana je osoba ženskog spola i ne predaje matematiku*
(izabrana profesorica ne predaje matematiku),

A^c = *izabrana osoba ne predaje matematiku,*

B^c = *izabrana osoba nije ženskog spola, tj. izabrana je osoba muškog spola.*

Najmanja je σ-algebra na nekom skupu Ω tzv. **trivijalna σ-algebra** $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, dok je najveća ona koja sadrži sve podskupove od Ω, tj. **partitivni skup skupa** Ω, kojega označavamo s $\mathcal{P}(\Omega)$.

Nakon što smo definirali prostor elementarnih događaja slučajnog pokusa, odabiremo neku σ-algebru na njemu. Zvat ćemo je **familija događaja** toga pokusa, a pojedine elemente te familije događaja zovemo jednostavno **događajima**. Na odabranoj familiji događaja definirat ćemo vjerojatnost aksiomatskom definicijom 1.3.

Definicija 1.3. *Neka je Ω neprazan prostor elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra skupova na njemu. Funkciju*

$$P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

zovemo **vjerojatnost** *na Ω ako zadovoljava sljedeće zahtjeve:*

A1. **nenegativnost vjerojatnosti***: $P(A) \geq 0$, za sve $A \in \mathcal{F}$,*

A2. **normiranost vjerojatnosti***: $P(\Omega) = 1$,*

A3. ***σ-aditivnost vjerojatnosti:*** *ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ čim je $i \neq j$, tada vrijedi*

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Zahtjeve A1. - A3. *nazivamo* **aksiomima vjerojatnosti**.

Na temelju rezultata poglavlja 1.2 vidimo da vjerojatnost koja je definirana na konačnom prostoru elementarnih događaja korištenjem klasičnog pristupa udovoljava svim zahtjevima iz definicije 1.3[1].

Aksiomatski pristup daje puno veće mogućnosti u načinu zadavanja vjerojatnosti. Vidimo da je moguće zadati vjerojatnost ne samo na konačnom skupu nego i na bilo kojem nepraznom skupu s pripadnom σ-algebrom, dok na konačnom skupu možemo jasno zadati vjerojatnost i u slučaju da nemamo jednako moguće ishode. Na primjer, ukoliko smo dugo bilježili rezultate bacanja jedne igraće kocke te utvrdili da se niti jednom nije okrenuo broj 3, dok se broj 2 pojavljuje približno dvostruko češće nego brojevi 1, 4, 5 i 6, koristeći statistički pristup logično bi bilo pretpostaviti da

[1] Prvu aksiomatsku definiciju vjerojatnosti dao je Kolmogorov 1933. godine.

ishodi nisu jednako mogući te definirati vjerojatnost kao funkciju P koja zadovoljava zahtjeve iz definicije vjerojatnosti, a ujedno ima i sljedeća svojstva: $P(\{3\}) = 0$, $P(\{2\}) = 2P(\{1\})$, $P(\{1\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$.

Definicija 1.4. *Neka je Ω neprazan skup, $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja na njemu, a P vjerojatnost na Ω. Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zovemo* **vjerojatnosni prostor**.

1.5 Osnovna svojstva vjerojatnosti

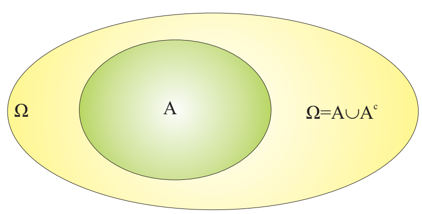
Na temelju zahtjeva navedenih u aksiomatskoj definiciji vjerojatnosti mogu se dokazati mnoga druga svojstva koja će automatski biti zadovoljena čim znamo da je zadanom funkcijom definirana vjerojatnost. U ovom poglavlju navedena su i dokazana neka od njih koja se najčešće koriste u praksi.

S1. Vjerojatnost suprotnog događaja

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor i $A \in \mathcal{F}$ događaj. Suprotni događaj događaju A je njegov komplement, tj. događaj A^c. Vrijedi:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Dokaz. Skup Ω možemo prikazati kao uniju disjunktnih skupova A i A^c (slika 1.2).



Slika 1.2: Skup Ω kao unija disjunktnih skupova A i A^c.

Primjenom aksioma A3. i A2. iz definicije vjerojatnosti slijedi:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \;\Rightarrow\; P(A^c) = 1 - P(A).$$

Primjer 1.11. *U šeširu se nalazi dvadeset crvenih i dvije zelene kuglice. Pretpostavimo da svaka kuglica, bez obzira na boju, može biti izvučena s jednakom vjerojatnošću, tj. ako označimo kuglice $k_1, \ldots k_{22}$ tada pretpostavljamo da je*

$$P(\{k_i\}) = \frac{1}{22}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, 22\}.$$

Pretpostavimo da n puta, $n \in \mathbb{N}$, izvlačimo točno jednu kuglicu iz šešira, ali tako da se nakon svakog izvlačenja kuglica vraća u šešir i pomiješa s ostalim kuglicama. Dakle, jedan ishod slučajnog pokusa koji se sastoji od n izvlačenja jedne kuglice shvaćamo kao jednu varijaciju s ponavljanjem n-tog razreda skupa od 22 različita elementa, a pripadni je prostor elementarnih događaja skup svih takvih varijacija s ponavljanjem. Znamo da takvih varijacija ima ukupno 22^n te da su, zbog pretpostavke o jednakoj vjerojatnosti izvlačenja bilo koje od 22 kuglice, svi elementi od Ω jednako vjerojatni. Dakle, za računanje je vjerojatnosti zanimljivih podskupova od Ω opravdano koristiti klasičan pristup.

Na primjer, zanima nas kolika je vjerojatnost da u tih n izvlačenja kuglice iz šešira niti jednom nije izvučena zelena kuglica. U tu svrhu praktično je koristiti svojstvo vjerojatnosti suprotnog događaja. Naime, definirajmo događaj A na sljedeći način:

A *- u n je ponavljanja slučajnog pokusa barem je jednom izvučena zelena kuglica.*

Njemu suprotan događaj jest

A^c *- u n ponavljanja slučajnog pokusa niti jednom nije izvučena zelena kuglica*

$=$ *u n je ponavljanja slučajnog pokusa svaki put izvučena crvena kuglica.*

Događaj A^c sastoji se od onih elemenata iz Ω čiji su svi elementi crvene kuglice, a takvih ima 20^n. Slijedi da je

$$P(A^c) = \left(\frac{20}{22}\right)^n = \left(\frac{10}{11}\right)^n.$$

Primjenom svojstva vjerojatnosti suprotnog događaja vidimo da je

$$P(A) = 1 - \left(\frac{10}{11}\right)^n.$$

S2. Vjerojatnost praznog skupa

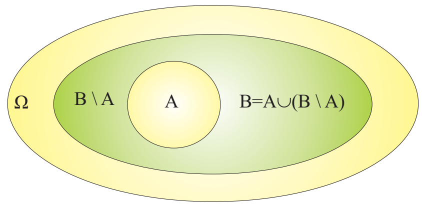
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor. Tada vrijedi $P(\emptyset) = 0$.

Dokaz. S obzirom da je $\emptyset = \Omega^c$, primjena aksioma A2. iz definicije vjerojatnosti i svojstva S1. dokazuje tu tvrdnju.

S3. Monotonost vjerojatnosti

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor te $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $A \subseteq B$. Tada je $P(A) \leq P(B)$.

Dokaz. Ako je $A \subseteq B$, tada se B može prikazati kao unija disjunktnih skupova A i $(B \setminus A)$ (slika 1.3).



Slika 1.3: Skup B kao unija disjunktnih skupova A i $(B \setminus A)$.

S obzirom da je vjerojatnost nenegativna funkcija, slijedi da je

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A).$$

Iz prethodnog izraza možemo zaključiti da ako je $A \subseteq B$, tada vjerojatnost razlike $B \setminus A$ računamo kao razliku vjerojatosti događaja B i A, tj. ako je $A \subseteq B$, tada je

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Primjer 1.12. *Odredimo vjerojatnost da iz skupa svih pozitivnih dvoznamenkastih brojeva na slučajan način odaberemo broj djeljiv s tri koji istovremeno nije djeljiv s devet. Pretpostavimo da svaki dvoznamenkasti broj može biti odabran s jednakom vjerojatnošću. U tom je slučaju za računanje spomenute vjerojatnosti opravdano koristiti klasičan pristup.*

Definirajmo sljedeće događaje:

skup svih pozitivnih dvoznamenkastih brojeva (prostor elementarnih događaja):

$$\Omega = \{n \in \mathbb{N} : 10 \leq n \leq 99\}, \quad k(\Omega) = 90;$$

skup svih pozitivnih dvoznamenkastih brojeva djeljivih brojem tri:

$$T = \{n \in \Omega : \exists t \in \mathbb{N} \text{ takav da } n = 3t\}, \quad k(T) = 30;$$

skup svih pozitivnih dvoznamenkastih brojeva djeljivih brojem devet:

$$D = \{n \in \Omega : \exists d \in \mathbb{N} \text{ takav da } n = 9d\}, \quad k(D) = 10.$$

Budući da je svaki broj koji je djeljiv brojem devet ujedno djeljiv i brojem tri, zaključujemo da je $D \subset T$. Primjenom klasičnog pristupa određivanju vjerojatnosti slijedi da je

$$P(D) = \frac{k(D)}{k(\Omega)} = \frac{1}{9}, \quad P(T) = \frac{k(T)}{k(\Omega)} = \frac{1}{3}.$$

Sada možemo izračunati vjerojatnost događaja od interesa, tj. događaja $T \setminus D$. Naime, skup $T \setminus D$ sadrži sve pozitivne dvoznamenkaste brojeve djeljive brojem tri koji nisu djeljivi brojem devet. Budući da je $D \subset T$, slijedi da je

$$P(T \setminus D) = P(T) - P(D) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

S4. Vjerojatnost unije događaja

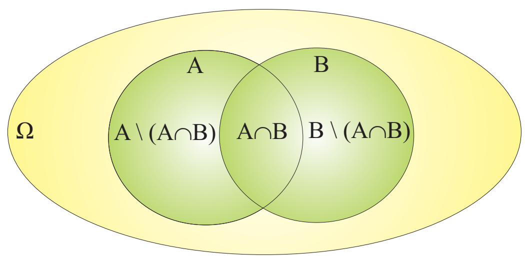
O vjerojatnosti unije događaja govori treći zahtjev iz definicije vjerojatnosti, tj. σ-aditivnost vjerojatnosti. Međutim, tim zahtjevom obuhvaćene su samo familije disjunktnih skupova. To svojstvo daje formulu za izračun vjerojatnosti unije dvaju skupova i u slučaju kada skupovi nisu disjunktni.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor te $A, B \in \mathcal{F}$. Tada vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dokaz. Unija skupova A i B može se prikazati kao unija disjunktnih skupova na sljedeći način (slika 1.4):

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)\,.$$



Slika 1.4: Skup $(A \cup B)$ kao unija disjunktnih skupova.

Iz navedenoga proizlazi:

$$P(A \cup B) = P\left(A \setminus (A \cap B)\right) + P\left(B \setminus (A \cap B)\right) + P(A \cap B).$$

S obzirom da je $(A \cap B) \subseteq A$ i $(A \cap B) \subseteq B$, vrijedi:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Primjer 1.13. *Želimo izračunati vjerojatnost slučajnog odabira dvoznamenkastog broja koji je djeljiv brojem tri ili brojem sedam. Pretpostavimo da svaki dvoznamenkasti broj može biti odabran s jednakom vjerojatnošću. U tom je slučaju za računanje spomenute vjerojatnosti opravdano koristiti klasičan pristup.*

Sada uz prostor elementarnih događaja

$$\Omega = \{n \in \mathbb{N} : 10 \leq n \leq 99\}\,, \quad k(\Omega) = 90,$$

i skup dvoznamenkastih brojeva djeljivih brojem tri

$$T = \{n \in \Omega : \exists t \in \mathbb{N} \text{ takav da } n = 3t\}, \quad k(T) = 30,$$

iz primjera 1.12 promatramo i skup svih dvoznamenkastih brojeva djeljivih brojem sedam, tj. skup

$$S = \{n \in \Omega : \exists s \in \mathbb{N} \text{ takav da } n = 7s\}, \quad k(S) = 13.$$

Događaj koji nas zanima jest $T \cup S$, a njegovu ćemo vjerojatnost odrediti primjenom formule za vjerojatnost unije dvaju događaja. U tu svrhu trebamo odrediti i kardinalni broj skupa svih dvoznamenkastih brojeva djeljivih i brojem tri i brojem sedam, tj. skupa

$$T \cap S = \{n \in \Omega : \exists t, s \in \mathbb{N} \text{ takvi da } n = 3t \wedge n = 7s\}.$$

Budući da je $T \cap S = \{21, 42, 63, 84\}$, tj. $k(T \cap S) = 4$, slijedi da je

$$P(T \cup S) = P(T) + P(S) - P(T \cap S) = \frac{1}{3} + \frac{13}{90} - \frac{4}{90} = \frac{39}{90} = \frac{13}{30}.$$

Formula za računanje vjerojatnosti unije više skupova može se dati i općenito, tj. za uniju konačno mnogo skupova. Ta formula poznata je pod imenom **Sylvesterova formula**. Njezin je dokaz moguće provesti koristeći formulu za vjerojatnost unije dvaju skupova i princip matematičke indukcije (vidi [26]).

Vezano uz vjerojatnost unije dvaju skupova valja uočiti da vrijedi nejednakost

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B),$$

gdje su $A, B \in \mathcal{F}$, a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor. Takva se nejednakost također može generalizirati i to ne samo na uniju konačno mnogo događaja nego i na uniju prebrojivo mnogo događaja. To generalizirano svojstvo zove se σ-subaditivnost vjerojatnosti.

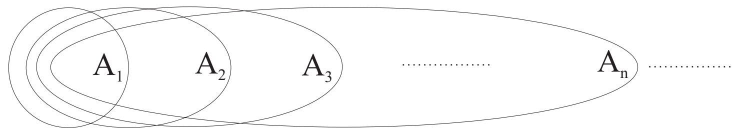
S5. σ-subaditivnost vjerojatnosti

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor i neka je $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, prebrojiva familija događaja toga prostora. Tada je

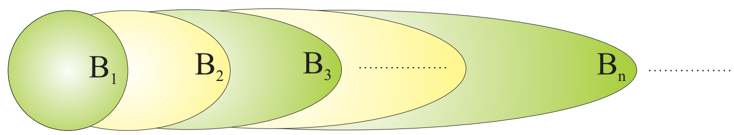
$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Dokaz. Iz zadane familije događaja $(A_i, i \in I)$, $I \subseteq \mathbb{N}$, formirat ćemo novu familiju međusobno disjunktnih događaja na sljedeći način (slika 1.5, slika 1.6):

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \ldots, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i, \ldots.$$



Slika 1.5: Familija događaja $(A_i, i \in I)$, $I \subseteq \mathbb{N}$.



Slika 1.6: Familija disjunktnih događaja $(B_i, i \in I)$, $I \subseteq \mathbb{N}$.

Tako definirani skupovi jesu međusobno disjunktni, a vrijedi i da je

$$B_i \subseteq A_i \quad \text{i} \quad \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Primjenom aksioma A3. na familiju $(B_i, i \in I)$ slijedi da je

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \sum_{i \in I} P(B_i) \leq \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Primjer 1.14. *Automat za igre na sreću programiran je tako da je vjerojatnost pojavljivanja prirodnog broja jednaka 2^{-n}, tj.*

$$P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da takvim definiranjem vjerojatnosti pojavljivanja različitih prirodnih brojeva nisu jednako mogući događaji.

Odredimo vjerojatnost pojavljivanja bilo kojeg prirodnog broja manjeg ili jednakog od $(n+1)$, tj. vjerojatnost događaja

$$S = \{1, 2, \ldots, n+1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Skup S može se na različite načine prikazati kao konačna unija familije disjunktnih skupova ili skupova koji nisu disjunktni. Na primjer, ako definiramo skupove

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2\}, \\ A_2 &= \{2, 3\}, \\ A_3 &= \{3, 4\}, \\ &\vdots \\ A_n &= \{n, n+1\}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

vidimo da za konačnu familiju skupova $(A_i, i \leq n)$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad P(A_i) = \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{3}{2^{i+1}}, \quad \forall i \leq n.$$

Međutim, $P(S)$ ne možemo dobiti sumiranjem svih $P(A_i)$ jer $(A_i, i \leq n)$ nije familija disjunktnih skupova, no ako S prikažemo kao konačnu uniju jednočlanih skupova (uočimo da su oni ujedno disjunktni!), tada lako možemo izračunati $P(S)$:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} \{i\}, \ \ P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Svojstvo σ-subaditivnosti vjerojatnosti primijenjeno na uniju skupova A_i, $i \leq n$, u navedenom primjeru možemo potvrditi na osnovu nejednakosti

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(S) = \frac{2^n - 1}{2^n} < \frac{3}{2}\,\frac{2^n - 1}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \quad n \in \mathbb{N}.$$

S6. Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na rastuću familiju događaja

Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na rastuću familiju događaja omogućava računanje vjerojatnosti unije rastuće familije događaja kao limesa niza vjerojatnosti pojedinačnih događaja u familiji. Preciznije, neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor i neka je $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ rastuća familija događaja, tj. $A_n \in \mathcal{F}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \ldots;$$

tada vrijedi da je

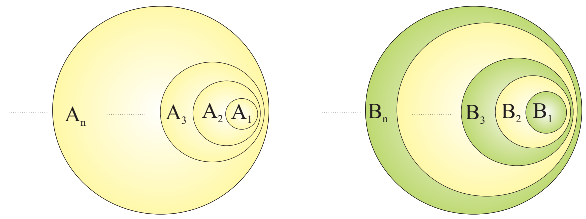
$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

Dokaz. Prvo uočimo da $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n)$ postoji. Naime, zbog monotonosti vjerojatnosti niz je brojeva $(P(A_n), n \in \mathbb{N})$ monotono rastući. S obzirom da se radi o nizu vjerojatnosti, taj je niz brojeva sadržan u segmentu $[0, 1]$, tj. ograničen je. Budući da je monoton i ograničen niz realnih brojeva konvergentan, navedena granična vrijednost zaista postoji. Od zadane rastuće familije događaja $(A_n, n \in \mathbb{N})$ formirat ćemo novu familiju $(B_n, n \in \mathbb{N})$ međusobno disjunktnih događaja na sljedeći način (slika 1.7):

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \ldots B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \ldots.$$

Osim što je $(B_n, n \in \mathbb{N})$ familija disjunktnih događaja, vrijedi i sljedeće:

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$



Slika 1.7: Rastuća familija $(A_n, n \in \mathbb{N})$ i disjunktna familija $(B_n, n \in \mathbb{N})$.

Dakle, vrijedi:

$$P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i),$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Primjer 1.15. *Pretpostavimo da se radi o istom automatu za igre na sreću kao u primjeru 1.14, ali zanima nas vjerojatnost pojavljivanja bilo kojeg neparnog broja, tj. vjerojatnost skupa*

$$N = \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Vjerojatnost skupa N možemo izračunati na nekoliko načina. Ovdje ilustriramo pristup koji koristi neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na rastuću familiju događaja.

Prikažimo N pomoću familije skupova $(A_n, n \in \mathbb{N})$ gdje su skupovi A_n definirani na sljedeći način:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\}, \\ A_2 &= \{1,3\}, \\ A_3 &= \{1,3,5\}, \\ &\vdots \\ A_n &= \{1,3,5,\ldots,2n-1\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vidimo da je $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, tj. $(A_n, n \in \mathbb{N})$ je rastuća familija skupova i vrijedi da je

$$\begin{aligned} N &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \\ P(A_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{2i-1}} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na rastuću familiju događaja slijedi da je

$$P(N) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = \frac{2}{3}.$$

S7. Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na padajuću familiju događaja

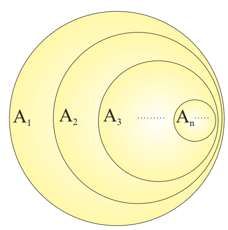
Neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na padajuću familiju događaja omogućava računanje vjerojatnosti presjeka padajuće familije skupova kao limesa niza vjerojatnosti pojedinačnih skupova u familiji. Preciznije, neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dani vjerojatnosni prostor i neka je $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ padajuća familija događaja, tj. $A_n \in \mathcal{F}$ za sve n i

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots A_n \supseteq A_{n+1} \ldots;$$

tada vrijedi da je

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

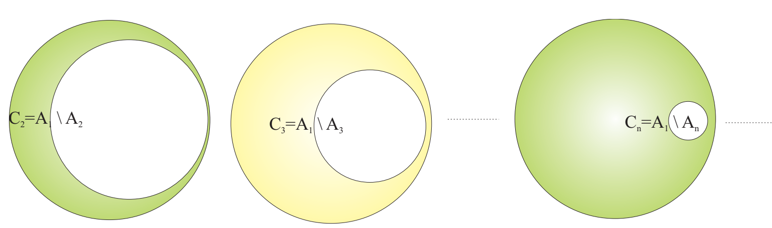
Dokaz. Slika 1.8 prikazuje padajuću familiju događaja $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$.



Slika 1.8: Padajuća familija događaja $(A_n, n \in \mathbb{N})$.

Od zadane padajuće familije događaja $(A_n, n \in \mathbb{N})$ formirat ćemo novu familiju $(C_n, n \in \mathbb{N})$ koja će biti monotono rastuća te ćemo u dokazu iskoristiti svojstvo neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na monotono rastuće familije događaja (svojstvo S6). Familiju $(C_n, n \in \mathbb{N})$ definiramo na sljedeći način (slika 1.9):

$$C_1 = \emptyset, C_2 = A_1 \setminus A_2, C_3 = A_1 \setminus A_3, \ldots, C_n = A_1 \setminus A_n, \ldots$$



Slika 1.9: Rastuća familija događaja $(C_n, n \in \mathbb{N})$.

Za tako definiranu rastuću familiju događaja vrijedi sljedeće:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = A_1 \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right),$$

$$P\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(C_i) = \lim_{i\to\infty} \left(P(A_1) - P(A_i)\right).$$

Dakle, vrijedi:

$$P\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = P(A_1) - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) - \lim_{i\to\infty} P(A_i),$$

odakle slijedi tvrdnja.

Primjer 1.16. *Pretpostavimo da se radi o istom automatu za igre na sreću kao u primjeru 1.14. Odredimo s kojom se vjerojatnošću pojavljuje bilo koji paran broj veći ili jednak od unaprijed zadanog prirodnog broja. Skupove A_n, za $n \in \mathbb{N}$, definiramo na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}, \\ A_2 &= \{4, 6, 8, 10, \dots\}, \\ A_3 &= \{6, 8, 10, \dots\}, \\ &\vdots \\ A_n &= \{2n, 2(n+1), 2(n+2), \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

To znači da treba odrediti $P(A_n)$. Prvo odredimo vjerojatnost presjeka prebrojive familije $(A_n, n \in \mathbb{N})$. Očito je $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$, tj. $(A_n, n \in \mathbb{N})$ je padajuća familija skupova za koju je

$$P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}}.$$

Korištenjem neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na padajuću familiju događaja vidimo da je

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} = 0,$$

što je i logično s obzirom da je presjek svih skupova A_i zapravo prazan (ne postoji paran broj koji je veći od svakog prirodnog broja.)

1.6 Vjerojatnost na diskretnom Ω

Neka je Ω konačan ili prebrojiv prostor elementarnih događaja. Takve skupove označavat ćemo na sljedeći način:

$$\Omega = \{\omega_i : i \in I_\Omega\}, \quad I_\Omega \subseteq \mathbb{N},$$

gdje je I_Ω skup indeksa. Na primjer, ako je $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, onda je $I_\Omega = \{1, \ldots, n\}$, a ako je $\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$, onda je $I_\Omega = \mathbb{N}$. Iz definicije vjerojatnosti znamo da je vjerojatnost funkcija kojoj je domena σ-algebra događaja. Dakle, da bismo zadali konkretnu vjerojatnost na Ω, potrebno je zadati vrijednosti te funkcije na svakom skupu A sadržanom u pridruženoj σ-algebri. **Kod konačnih i prebrojivih skupova elementarnih događaja pretpostavit ćemo da je pridružena σ-algebra točno jednaka partitivnom skupu od Ω, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.** U nastavku će se pokazati da je to za naše potrebe prirodno i moguće ispoštovati. Vjerojatnosni prostor kod kojega je Ω konačan ili prebrojiv skup, a pridružena je σ-algebra $\mathcal{P}(\Omega)$, zvat ćemo **diskretan vjerojatnosni prostor**.

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako se funkcija na $\mathcal{P}(\Omega)$, kojom je zadana vjerojatnost, može odrediti zadavanjem vrijednosti samo na jednočlanim podskupovima od Ω, tj. elementima od Ω. S obzirom da $\mathcal{P}(\Omega)$ ima mnogo više elemenata nego Ω (ako konačan Ω ima $k(\Omega)$ elemenata, onda je $2^{k(\Omega)}$ broj elemenata od $\mathcal{P}(\Omega)$), na taj smo način u velikoj mjeri pojednostavili zadavanje vjerojatnosti.

Preciznije, ako imamo zadan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, tada za svaki pojedini $\omega_i \in \Omega$ znamo izračunati vjerojatnost

$$p_i = P\left(\{\omega_i\}\right).$$

Koristeći svojstvo σ-aditivnosti vjerojatnosti, pomoću tako dobivenog niza brojeva $(p_i, i \in I_\Omega)$, $I_\Omega \subseteq \mathbb{N}$, možemo izračunati vjerojatnost bilo kojeg događaja $A = \{\omega_i : i \in I_A\}$, gdje je $I_A \subseteq I_\Omega$ skup indeksa elemenata od A:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i \in I_A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I_A} P\left(\{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I_A} p_i.$$

Dakle, poznavanje vrijednosti vjerojatnosti na jednočlanim podskupovima od Ω automatski određuje vjerojatnost bilo kojeg događaja tog vjerojatnosnog prostora. Time niz brojeva koji predstavljaju vjerojatnosti jednočlanih podskupova od Ω preuzima ključnu ulogu u opisivanju i zadavanju vjerojatnosti na diskretnom vjerojatnosnom prostoru.

Valja uočiti da navedeni niz brojeva $(p_i, i \in I_\Omega)$ ima sljedeća dva svojstva:

1. $p_i \geq 0$ za sve $i \in I_\Omega$,

2. $\sum\limits_{i \in I_\Omega} p_i = 1.$

Taj rezultat možemo iskoristiti prilikom zadavanja vjerojatnosti na diskretnom vjerojatnosnom prostoru, kao što je ilustrirano sljedećim primjerima:

Primjer 1.17 (**Konačno mnogo jednako mogućih ishoda**). *Pretpostavimo da slučajan pokus ima konačno mnogo jednako mogućih ishoda te da je* $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, *tj.* $k(\Omega) = n$. *Definirajmo funkciju* $P \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *na sljedeći način:*

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$
$$A = \{\omega_j : j \in I_A,\, I_A \subseteq \{1, \dots, n\}\}, \quad P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}).$$

Na taj je način zadana funkcija na $\mathcal{P}(\Omega)$ *koja zadovoljava sve zahtjeve definicije vjerojatnosti (provjerite!). Osim toga, tako definirana vjerojatnost podudara se s klasičnim pristupom određivanja vjerojatnosti.*

Primjer 1.18. *Neka je prostor elementarnih događaja slučajnog pokusa* $\Omega = \mathbb{N}$. *Definirajmo funkciju na* σ*-algebri* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *na sljedeći način:*

$$P(\{i\}) = \frac{1}{2^i}, \quad i \in \mathbb{N},$$
$$A = \{i_1, i_2, \dots, i_n, \dots\}, \quad P(A) = \sum_{i_j \in A} P(\{i_j\}).$$

Dokažimo da je na taj način definirana vjerojatnost na $\mathbb{N}$.

1. *Očigledno je* $P(A) \geq 0$ *za sve* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. *Provjerimo je li* $P(\mathbb{N}) = 1$. *Koristimo formulu za sumu geometrijskog reda s kvocijentom* $\frac{1}{2}$ *i prvim članom* $\frac{1}{2}$:
$$P(\mathbb{N}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$
3. *Da bismo provjerili* σ*-aditivnost uzmimo familiju* $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ *disjunktnih podskupova skupa* $\mathbb{N}$. *Neka je*
$$\begin{array}{lcl} A_1 & = & \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1j}, \dots\} \subseteq \mathbb{N}, \\ A_2 & = & \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2j}, \dots\} \subseteq \mathbb{N}, \\ & \vdots & \\ A_n & = & \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nj}, \dots\} \subseteq \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ & \vdots & \end{array}$$
Pri tome je
$$P(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_{nj}}} \leq 1.$$
Uočimo također da, zbog disjunktnosti skupova A_i, *među brojevima* $a_{nj} \in \mathbb{N}$ *nema istih pa se njihova unija može prikazati kao*
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1j}, \dots, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2j}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nj}, \dots\}.$$
Vjerojatnost unije dobije se sumiranjem brojeva oblika (2^{-k}) *po svim* $k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *S obzirom da je* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \mathbb{N}$, *niz* $\left(2^{-k}, k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ *podniz je geometrijskog niza s kvocijentom*

1/2. Time je i red koji se dobije sumiranjem članova tog niza konvergentan i vrijedi (vidi poglavlje 5.3 u Dodatku):

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{a_{nj}}} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Takav način zadavanja vjerojatnosti na diskretnom vjerojatnosnom prostoru može se primijeniti uvijek. Ako je s $\Omega = \{\omega_i, i \in I_\Omega \subseteq \mathbb{N}\}$ dan prostor elementarnih događaja, potreban je samo niz brojeva $(p_i, i \in I_\Omega)$ sa svojstvima

1. $p_i \geq 0$ za sve $i \in I_\Omega$,
2. $\displaystyle\sum_{i \in I_\Omega} p_i = 1$

da bismo definirali vjerojatnost na tom diskretnom Ω kao

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i \in I_A} p_i.$$

Naime, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Neka je s $(p_i, i \in I)$, $I \subseteq \mathbb{N}$ zadan niz realnih brojeva sa svojstvima:

1. **$p_i \geq 0$ za sve $i \in I$,**
2. **$\sum_{i \in I} p_i = 1$,**

te neka je Ω bilo koji skup koji ima $k(I)$ elemenata. Tada je izrazom

$$P(A) = \sum_{i \in I_A} p_i, \quad A \subseteq \Omega, \tag{1.1}$$

gdje je I_A skup indeksa elemenata iz Ω koji pripadaju skupu A, dobro definirana vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Dokaz. Neka je $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ dan neprazan skup. Dokažimo da je funkcijom (1.1) dobro definirana vjerojatnost.

1. Očigledno je $P(A) \geq 0$ za sve $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
2. $P(\Omega) = \sum_{i \in I} p_i = 1$.
3. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ disjunktni podskupovi od Ω i $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Tada familija skupova $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ čini jednu particiju skupa A. Koristeći rezultate teorije ponovljenih redova (poglavlje 5.3 u Dodatku) možemo

zaključiti da vrijedi:

$$P(A) = \sum_{j \in I_A} p_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in I_{A_i}} p_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i),$$

pa vrijedi σ-aditivnost.

Primjer 1.19. *Dan je niz triju brojeva: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{3}$. Možemo li taj niz nadopuniti četvrtim brojem tako da ta četiri broja dobro definiraju vjerojatnost na diskretnom vjerojatnosnom prostoru u smislu ovoga poglavlja? Odgovor je potvrdan. Naime, navedena tri broja pozitivna su i manja od 1, a suma im iznosi $\frac{21}{30}$, što je još uvijek manje od 1. Dakle, ako za četvrti broj izaberemo razliku $1 - \frac{21}{30} = \frac{9}{30}$, prema rezultatima ovoga poglavlja slijedi da postoji vjerojatnosni prostor na kojemu pomoću tih brojeva možemo zadati vjerojatnost. Npr. uzmemo $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i*

$$P(\{1\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{2\}) = \frac{1}{5}, \quad P(\{3\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{4\}) = \frac{9}{30}.$$

1.7 Primjeri vjerojatnosti na $\mathbb{R}$

Postoji mnoštvo slučajnih pokusa za koje je prirodno pretpostaviti da prostor elementarnih događaja sadrži neki interval.

Primjer 1.20. *Vrijeme (mjereno u sekundama) koje postiže atletičar u utrci na 100 metara može se modelirati kao rezultat slučajnog pokusa s vrijednostima iz intervala $[0, 13]$. S obzirom da se vrijeme na utrkama danas mjeri vrlo precizno, nije mudro modelirati rezultate takvog pokusa kao diskretan skup. Zbog toga uzimamo npr. $\Omega = [0, 13]$ ili neki veći skup koji sadrži interval $[0, 13]$.*

Vjerojatnost u takvim vjerojatnosnim prostorima ne može se odrediti koristeći niz vrijednosti koje ona postiže na pojedinačim ishodima već i zbog činjenice da prostor elementarnih događaja nije prebrojiv. Jedan od načina na koji je moguće zadati vjerojatnost na intervalima, a koji je prikladan za računanje, jest korištenje nenegativne realne funkcije definirane na skupu $\mathbb{R}$ koja s osi apscisa zatvara jediničnu površinu. Naime, odaberemo takvu nenegativnu realnu funkciju i zadamo vjerojatnost nekog skupa A kao površinu koju zatvara graf te funkcije s osi apscisa nad skupom A.

Primjer 1.21. *Pretpostavimo da računalo izvodi neku numeričku proceduru s točnošću na 6 decimanih mjesta i daje rezultat 1.234567, no da je stvaran rezultat te procedure zapravo neki realan broj iz intervala $[1.234567, 1.234568\rangle$. U tom kontekstu kao prostor elementarnih događaja promatramo interval $\Omega = [1.234567, 1.234568\rangle$. Kako nemamo razloga preferirati određene brojeve iz Ω kao stvarne rezultate te numeričke procedure, pretpostavljamo da su svi podintervali od Ω koji imaju jednaku duljinu jednako mogući. U skladu s tom pretpostavkom i shvaćanjem vjerojatnosti kao dijela cjeline, vjerojatnost da je stvaran rezultat iz intervala $A \subseteq \Omega$ u ovom se primjeru može zadati kao kvocijent duljine intervala A i duljine cijelog Ω:*

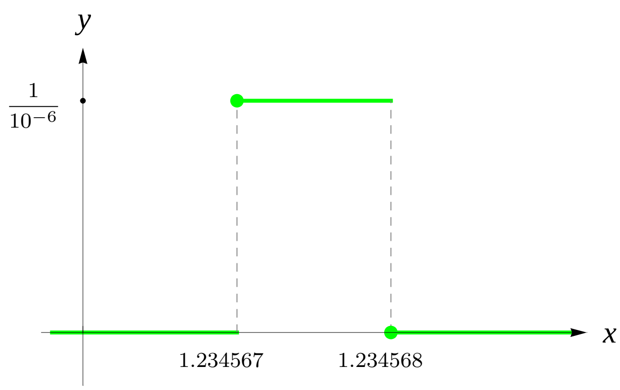
$$P(A) = \frac{d(A)}{d(\Omega)}.$$

Tako definirana funkcija na σ-algebri koja sadrži sve podintervale od Ω zadovoljavat će zahtjeve postavljene u definiciji vjerojatnosti[2] *te je time dobro definirana vjerojatnost na* $\Omega = [1.234567, 1.234568\rangle$. *Zovemo ju* **geometrijska vjerojatnost** *na* $\Omega = [1.234567, 1.234568\rangle$.

Primjer 1.22. *Vjerojatnost iz prethodnog primjera definiranu na* $\Omega = [1.234567, 1.234568\rangle$ *možemo proširiti na* $\Omega' = \mathbb{R}$ *korištenjem nenegativne realne funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10^{-6}} & , x \in [1.234567, 1.234568\rangle \\ 0 & , x \notin [1.234567, 1.234568\rangle \end{cases}.$$

Graf funkcije f *prikazan je na slici* 2.15.



Slika 1.10: Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{10^{-6}} \cdot \mathrm{I}_{[1.234567, 1.234568\rangle}(x)$.

Vjerojatnost događaja $A \subseteq \Omega'$ *(označimo je* P'*) definiramo kao površinu koju zatvara graf te funkcije s osi apscisa nad intervalom* A. *Uočimo da za intervale* $A \subseteq \Omega'$ *koji su ujedno i podintervali od* Ω *iz primjera* 1.21 *vrijedi*

$$P'(A) = P(A),$$

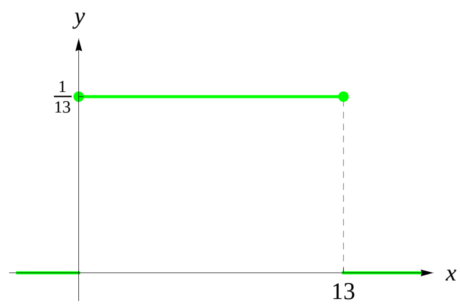
gdje je P *geometrijska vjerojatnost definirana u primjeru* 1.21.

Prednost je zadavanja vjerojatnosti pomoću nenegativne funkcije u odnosu na vjerojatnost kao kvocijent duljina intervala u tome što se može generalizirati i na probleme u kojima nema razloga pretpostavljati da su svi ishodi jednako mogući.

Primjer 1.23. *U primjeru* 1.20 *nije razumno očekivati istu vjerojatnost da atletičar postigne vrijeme u intervalu* $[0, 5]$ *kao u intervalu* $[8, 13]$ *iako su duljine tih intervala jednake. Naime,*

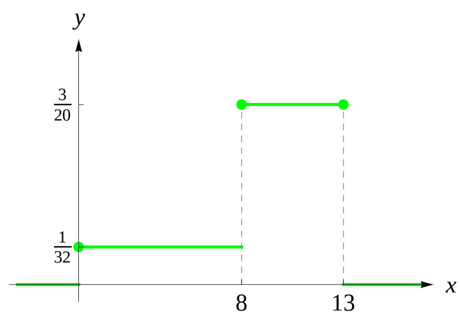
[2] Dovoljno je provjeriti da vrijede prva dva zahtjeva iz definicije vjerojatnosti te treći zahtjev za konačno mnogo disjunktnih intervala.

poznato je da srednjoškolci uobičajeno postižu vrijeme od oko 12 *sekundi pri trčanju na* 100 *metara, a rezultati se atletičara uglavnom kreću između* 9 *i* 10 *sekundi. Vjerojatnost koja je definirana na intervalu* $[0, 13]$ *korištenjem principa jednako mogućih ishoda imala bi pripadni graf funkcije kao što je prikazano na slici 1.11.*



Slika 1.11: Graf funkcije koja uniformno definira vjerojatnost na [0, 13]

Preferiranje intervala $[8, 13]$ *nad ostatkom možemo npr. predočiti grafom funkcije na slici 1.12.*



Slika 1.12: Graf funkcije koja definira vjerojatnost na [0, 13] uz preferiranje intervala [8, 13].

Da bi realnom funkcijom mogli modelirati vjerojatnost na opisani način bitno je da površina koju zatvara njezin graf s osi apscisa iznad cijelog Ω *bude jednaka* 1*, a graf funkcije može rasti i padati na* Ω *tako da odražava stupanj vjerovanja da se pojedini intervali realiziraju u stvarnom pokusu. Ako želimo neki interval preferirati nad ostalim područjem, iznad njega i vrijednosti funkcije kojom opisujemo vjerojatnost trebaju biti veće.*

U ovom trenutku nećemo se baviti odgovorom na pitanje je li vjerojatnost određena funkcijom čiji je graf dan na slici 1.12 u skladu s problemom opisanim u primjeru ili treba raditi dodatne modifikacije. O usklađenosti modela sa stvarnim problemima bit će riječi u drugom dijelu knjige koji se bavi statistikom.

Općenito, neka je dana realna funkcija f realne varijable, tj. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

- $f(x) \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$

Neka je $\mathcal{B}$ najmanja σ-algebra podskupova od $\mathbb{R}$ koja sadrži sve intervale. Izrazom

$$P(A) = \int_A f(x)\,dx, \quad A \in \mathcal{B}$$

definirana je vjerojatnost na $\mathcal{B}$. Matematička teorija koja omogućava dokaz te činjenice može se naći npr. u [26].

Ukoliko je prostor elementarnih događaja samo jedan interval Ω koji je pravi podskup od $\mathbb{R}$, potrebno je da $\int_\Omega f(x)\,dx$ bude jednak 1. To možemo lako zadovoljiti tako da na Ω^c stavimo vrijednosti funkcije $f(x)$ na nulu.

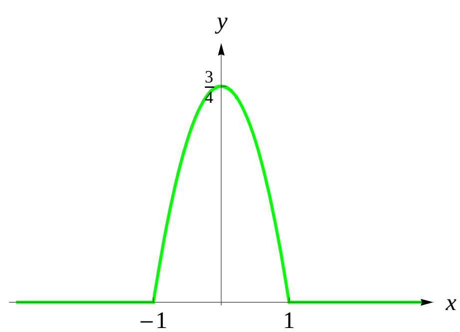
Primjer 1.24. *Pokažimo da pomoću funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (slika 1.13) definirane formulom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\,(1-x^2) & , x \in [-1,1] \\ 0 & , x \notin [-1,1] \end{cases},$$

možemo definirati vjerojatnost na skupu $\mathbb{R}$, tj. da je funkcija f nenegativna i normirana:

- *nenegativnost - iz analitičke definicije funkcije f slijedi da je $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,*
- *normiranost - površina je ispod grafa funkcije f (pogledati sliku) nad skupom $\mathbb{R}$*

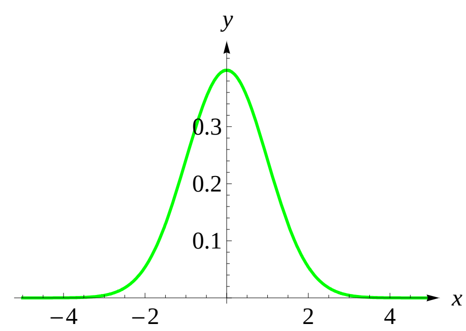
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}\,(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} = 1.$$



Slika 1.13: Graf funkcije $f(x) = \frac{3}{4}\,(1-x^2)\cdot \mathrm{I}_{[-1,1]}(x)$.

Primjer 1.25. *Važan je primjer nenegativne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pomoću koje možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}$ funkcija definirana formulom (slika 1.14)*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Slika 1.14: Gaussova krivulja - graf funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1.8 Primjeri vjerojatnosti na $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Ukoliko je prostor elemetarnih događaja Ω pravokutnik ili neki drugi geometrijski lik, za modeliranje vjerojatnosti na Ω može se prenijeti logika nastala pri modeliranju vjerojatnosti na intervalima. Slično se može primijeniti i na skupove Ω koji su zadani kao geometrijska tijela.

Primjer 1.26. *U pokusu slučajnog izbora točke iz kruga radijusa r vjerojatnost možemo zadati pomoću kvocijenta dijela i cjeline. Tako je vjerojatnost da bude izabrana točka iz kružnog odsječka A površine $s(A)$ dana izrazom*

$$P(A) = \frac{s(A)}{r^2\pi}.$$

Naime, $s(\Omega) = r^2\pi$ predstavlja površinu cijelog kruga, a površina dijela koji nas zanima označena je sa $s(A)$.

Primjer 1.27. *Pri slučajnom izboru točke iz kugle radijusa r vjerojatnost također možemo zadati pomoću kvocijenta dijela i cjeline. Tako je vjerojatnost da bude izabrana točka iz kuglinog isječka A volumena $v(A)$ dana izrazom*

$$P(A) = \frac{v(A)}{\frac{4}{3}r^3\pi}$$

s obzirom da je $v(\Omega) = \dfrac{4}{3}r^3\pi$ volumen cijele kugle.

Za modeliranje se vjerojatnosti koje preferiraju neke dijelove prostora elementarnih događaja u odnosu na druge dijelove istih dimenzija (površine odnosno volumena) također može prenijeti logika zadavanja vjerojatnosti pomoću nenegativne realne funkcije. U slučaju kad je $\Omega = \mathbb{R}^2$ (odnosno, $\Omega = \mathbb{R}^3$) radi se o nenegativnoj realnoj funkciji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (odnosno, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) koja mora zadovoljati sljedeće svojstvo:

$$\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1,$$

gdje je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ (odnosno, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$).
Uočimo da je za dvodimenzionalne Ω to dvostruki integral, pa postavljeni zahtjev zapravo znači da volumen tijela koje je omeđeno grafom funkcije f i ravninom (x_1, x_2) na dijelu za koji vrijedi $(x_1, x_2) \in \Omega$ mora iznositi 1. Za trodimenzionalne Ω to je trostruki integral.
Vjerojatnost je skupa[3] $A \subseteq \Omega$ tada dana izrazom

$$P(A) = \int\limits_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Primjer 1.28. *Pokažimo da pomoću funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane formulom*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}\,(x^2+y) & , \ (x,y) \in [-1,1] \times [0,1] \\ 0 & , \ \textit{za ostale } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$, tj. da je funkcija f nenegativna i normirana:

- *nenegativnost - iz analitičke definicije funkcije f slijedi da je $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,*
- *normiranost - volumen kojega graf funkcije f zatvara sa skupom $\mathbb{R}^2$, tj. volumen ispod grafa funkcije f nad pravokutnikom $[-1,1] \times [0,1]$ iznosi*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{5} \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 (x^2+y)\,dx\,dy = 1.$$

Prema tome, vjerojatnost skupa $A = [0,1] \times [0,0.5] \subset \mathbb{R}^2$ računamo na sljedeći način:

$$P(A) = \int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{5} \int\limits_0^{0.5} \int\limits_0^1 (x^2+y)\,dx\,dy = \frac{7}{40}.$$

Primjer 1.29. *Pokažimo da pomoću funkcije $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definirane formulom*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{8}\,z^2(x+y) & , \ (x,y,z) \in [0,2] \times [0,1] \times [-2,0] \\ 0 & , \ \textit{za ostale } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}^3$, tj. da je funkcija f nenegativna i normirana:

- *nenegativnost - iz analitičke definicije funkcije f slijedi da je $f(x,y,z) \geq 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,*
- *normiranost - volumen kojega graf funkcije f zatvara sa skupom $\mathbb{R}^3$ iznosi*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8} \int\limits_0^2 \int\limits_0^1 \int\limits_{-2}^0 z^2(x+y)\,dx\,dy\,dz = 1.$$

Prema tome, vjerojatnost skupa $B = [0,1] \times [0,1] \times [-1,0] \subset \mathbb{R}^2$ računamo na sljedeći način:

$$P(B) = \int\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{8} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^0 z^2(x+y)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{24}.$$

[3] O obliku σ-algebre na kojoj se može definirati vjerojatnost pogledati [26]. Specijalno, u dvodimenzionalnom slučaju vjerojatnost se na taj način može definirati na najmanjoj σ-algebri koja sadrži sve skupove oblika $(a,b) \times (c,d)$, gdje su $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$.

1.9 Uvjetna vjerojatnost. Nezavisnost

Primjer 1.30. *Nakon izleta napravili smo 5 kopija istog CD-a s fotografijama izleta, ali su samo tri kopije uspjele. Na CD-ove nismo stavili nikakve oznake i ne znamo koji su ispravni, a koji ne. Pretpostavimo da smo u žurbi i da imamo vremena za provjeru samo jednog CD-a. Izabrali smo jedan, provjerili i utvrdili da je neispravan. Međutim, u žurbi nam se taj provjereni CD pomiješao s ostalima i sada moramo uzeti jedan bez provjere pa kako bude. Mislite li da bi vjerojatnost odabira ispravnog CD-a u drugom biranju bila veća da se provjereni CD nije pomiješao s ostalima? Analizirajmo te slučajeve odvojeno.*

1. *Pomiješani slučaj. Definirajmo događaje:*

   L_i *- u i-tom izvlačenu izvučen je neispravan (loš) CD,*

   D_i *- u i-tom izvlačenju izvučen je ispravan (dobar) CD,*

   gdje je $i \in \{1, 2\}$. *S obzirom da je nakon prvog izvlačenja sve ponovo pomiješano, pri drugom izvlačenju CD-a ponovo smo na početku, tj. rezultat prvog izvlačenja uopće nema utjecaja na rezultat drugog izvlačenja. Dakle, vjerojatnost događaja* D_2 *ne ovisi o realizaciji događaja* L_1. *Slijedi da je vjerojatnost odabira ispravnog CD-a u drugom izvlačenju jednaka vjerojatnosti odabira ispravnog CD-a u prvom izvlačenju i iznosi* $\frac{3}{5}$.

2. *Nepomiješani slučaj. Ovaj puta je drugi pokus bitno promijenjen u odnosu na prvi. Sada znamo da u drugom izvlačenju biramo od četiri CD-a, od kojih su točno tri ispravna, pa je vjerojatnost događaja* D_2 *uz uvjet da se dogodio* L_1 *jednaka* $\frac{3}{4}$.

U oba slučaja prethodnog primjera pojavljuju se dva izvlačenja CD-a. U pomiješanom slučaju vjerojatnost u drugom izvlačenju ne ovisi o rezultatima prvog izvlačenja i zapravo je ista kao u prvom izvlačenju. Kažemo da drugo izvlačenje **ne ovisi** o prvom izvlačenju i možemo ih promatrati odvojeno. U nepomiješanom slučaju rezultat prvog izvlačenja utječe na vjerojatnost u drugom izvlačenju i nije mudro ta dva izvlačenja promatrati kao sasvim odvojene cjeline. Da bismo mogli proučavati takve probleme definirat ćemo tzv. **uvjetne vjerojatnosti** koje će opisivati rezultate drugog izvlačenja i to: uvjetnu vjerojatnost uz uvjet da je u prvom pokušaju izvučen dobar CD i uvjetnu vjerojatnost uz uvjet da je u prvom pokušaju izvučen loš CD.

Definicija 1.5. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i događaj* $A \in \mathcal{F}$ *koji ima pozitivnu vjerojatnost, tj.* $P(A) > 0$. *Funkcija* $P(\cdot \mid A)$ *definirana na* $\mathcal{F}$ *izrazom*

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad B \in \mathcal{F}, \tag{1.2}$$

je **uvjetna vjerojatnost uz uvjet da se dogodio događaj** A.

Tako definirana funkcija zadovoljava sve zahtjeve postavljene u definiciji vjerojatnosti, tj. na taj je način definirana jedna vjerojatnost na Ω (provjerite zahtjeve iz aksiomatske definicije vjerojatnosti!). Navedena činjenica ima za posljedicu to da se na $P(B \mid A)$ mogu primijeniti sva svojstva vjerojatnosti koja su dokazana u potpoglavlju 1.5. Tako npr. vrijedi:

- $P(\emptyset \mid A) = 0$,
- $P(B^c \mid A) = 1 - P(B \mid A)$,
- za $B_1 \subseteq B_2$ je $P(B_1 \mid A) \leq P(B_2 \mid A)$, itd.

U pojedinim slučajnim pokusima uvjetne vjerojatnosti modeliraju se po istom principu kao i sve vjerojatnosti.

Primjer 1.31. *Vratimo se primjeru 1.30. Odredimo uvjetne vjerojatnosti ishoda drugog izvlačenja u nepomiješanom slučaju uvjetovane na moguće ishode prvog izvlačenja.*
Prvo uočimo da je u nepomiješanom slučaju iz primjera 1.30 vjerojatnost da je u drugom izvlačenju izvučen ispravan CD ako je u prvom izvlačenu izvučen neispravan CD zapravo vjerojatnost $P(D_2|L_1)$. *Dakle, imamo:*

$$P(D_2 \mid L_1) = \frac{3}{4}, \quad P(L_2 \mid L_1) = \frac{1}{4},$$
$$P(D_2 \mid D_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(L_2 \mid D_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Vjerojatnost presjeka.

Izraz se iz definicije uvjetne vjerojatnosti često koristi za izračun vjerojatnosti presjeka. To omogućuje jednakost (1.2) napisanu na drugi način (pri čemu je $P(A) > 0$):

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A).$$

Primjer 1.32. *Ako u primjeru 1.30, u nepomiješanom slučaju, želimo odrediti vjerojatnost da su u oba izvlačenja izvučeni loši CD-ovi možemo primijeniti ovaj izraz. Dobijemo:*

$$P(L_2 \cap L_1) = P(L_2 \mid L_1)P(L_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

Pojam nezavisnosti događaja.

Intuitivno je jasno da bi pojam nezavisnosti dvaju događaja A i B, pri čemu zahtijevamo da je $P(A) > 0$, morao odražavati činjenicu da realizacija jednog od njih ne utječe na realizaciju drugog. To bi se na uvjetnu vjerojatnost trebalo odraziti tako da je

$$P(B \mid A) = P(B),$$

tj. da za vjerojatnost presjeka vrijedi

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = P(B)P(A).$$

Primjer 1.33. *Za slučaj u kojemu smo u primjeru 1.30 pomiješali provjereni CD s ostalima također možemo odrediti uvjetnu vjerojatnost uz uvjet da je u prvom izvlačenju izvučen loš CD, kao i uvjetnu vjerojatnost uz uvjet da je u prvom izvlačenju izvučen dobar CD. Međutim, te će dvije uvjetne vjerojatnosti biti jednake, neovisno uvjetujemo li na događaj D_1 ili L_1. Uvjetne vjerojatnosti izvlačenja ispravnog, odnosno neispravnog, CD-a u drugom izvlačenju, uz uvjet da je u prvom izvlačenju izvučen neispravan CD, iznose:*

$$P(D_2 \mid L_1) = P(D_2) = \frac{3}{5}, \quad P(L_2 \mid L_1) = P(L_2) = \frac{2}{5}.$$

Nadalje, uvjetne vjerojatnosti izvlačenja ispravnog, odnosno neispravnog CD-a u drugom izvlačenju, uz uvjet da je u prvom izvlačenju izvučen ispravan CD, iznose:

$$P(D_2 \mid D_1) = P(D_2) = \frac{3}{5}, \quad P(L_2 \mid D_1) = P(L_2) = \frac{2}{5}.$$

Slijedi da je vjerojatnost da su u oba izvlačenja izvučeni loši CD-ovi

$$P(L_1 \cap L_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

Definicija 1.6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da su događaji $A, B \in \mathcal{F}$* **nezavisni** *ako vrijedi:*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

Sljedeća definicija pojam nezavisnosti događaja generalizira na proizvoljnu familiju događaja.

Definicija 1.7. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da je proizvoljna familija događaja $(A_x, x \in I) \subseteq \mathcal{F}$ nezavisna ako za svaki konačan skup različitih indeksa $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ vrijedi*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}).$$

Važno je napomenuti da komplementiranje događaja neće promijeniti njegovo stanje nezavisnosti od nekog drugog događaja. Naime, vrijedi sljedeća tvrdnja:

ako su A i B nezavisni događaji, onda su

$$A^c \text{ i } B, \qquad A \text{ i } B^c, \qquad A^c \text{ i } B^c$$

također nezavisni događaji.

Dokaz. Dokažimo samo prvu tvrdnju, ostale se dokazuju analogno. Zbog nezavisnosti je događaja A i B $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Upotrebom toga svojstva slijedi:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(B) - P(A)\,P(B) = (1 - P(A))\,P(B) = \\ &= P(A^c)\,P(B), \end{aligned}$$

tj. događaji A^c i B nezavisni su.

Primjer 1.34. *Pojam nezavisnosti događaja olakšava računanje vjerojatnosti kod nezavisnog ponavljanja istog pokusa. Promotrimo pokus izvlačenja kuglice iz šešira koji sadrži 20 crvenih i 2 zelene kuglice. Odredimo vjerojatnost izvlačenja točno dvije zelene kuglice u* 30 *ponavljanja toga pokusa. Prilikom ponavljanja prethodno izvučena kuglica vraća se u šešir i sve se dobro promiješa.*

Da bi riješili taj problem, prvo ćemo uočiti da je vjerojatnost izvlačenja zelene kuglice u svakom pojedinom izvlačenju uvijek ista i iznosi $1/11$, *dok je vjerojatnost izvlačenja crvene kuglice* $10/11$. *Prostor elementarnih događaja* Ω *tog slučajnog pokusa sastoji se od uređenih* 30*-torki slova "c" i "z" koja označavaju boju kuglice izvučene u pojedinom izvlačenju (tj.* Ω *je skup svih varijacija s ponavljanjem* 30*-og razreda dvočlanog skupa* $\{c, z\}$*).*

Vjerojatnost da su u prvim dvama pokušajima izvučene zelene kuglice, a u svim ostalima crvene, možemo izračunati kao vjerojatnost presjeka nezavisnih događaja, pa ona iznosi

$$\left(\frac{1}{11}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^{28}.$$

Međutim, isto toliko iznosi vjerojatnost pojave svake uređene 30*-torke toga pokusa u kojoj su točno dva slova "z". S obzirom da u* Ω *ima* $\binom{30}{2}$ *elemenata koji imaju "z" na točno dvjema pozicijama, a svaki od njih ima vjerojatnost* $\left(\frac{1}{11}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^{28}$, *onda vjerojatnost izvlačenja točno dviju zelenih kuglica u tih* 30 *ponavljanja pokusa iznosi*

$$\binom{30}{2} \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^2 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^{28}.$$

Formula potpune vjerojatnosti

Korištenje uvjetnih vjerojatnosti može olakšati računanje vjerojatnosti u složenijim slučajevima.

Primjer 1.35. *Student je pristupio pismenom ispitu, no ne može doći pogledati rezultate, stoga ne zna je li prošao ili pao. Zamolio je svog prijatelja da to učini umjesto njega i da mu pošalje poruku po bratu. Međutim, svjestan je da obojica govore istinu samo s vjerojatnošću* $2/3$. *Kolika je vjerojatnost da će student dobiti točnu informaciju?*

Označimo A *događaj koji znači da je student dobio točnu informaciju,* L_p *činjenicu da je slagao prijatelj, a* L_b *činjenicu da je slagao brat. Događaje da su brat i prijatelj govorili istinu označit ćemo sa* I_p *i* I_b.

Taj primjer možemo riješiti tako da prebrojimo sve mogućnosti i izračunamo vjerojatnosti presjeka iz skupa

$$\{L_p \cap L_b, I_p \cap L_b, L_p \cap I_b, I_p \cap I_b\}.$$

Student može čuti točnu informaciju u dvama od navedenih slučajeva: $L_p \cap L_b$ *i* $I_p \cap I_b$. *Ako mu brat i prijatelj lažu neovisno jedan od drugoga, onda je*

$$P(L_p \cap L_b) = P(L_p)P(L_b) = \frac{1}{9},$$

$$P(I_p \cap I_b) = P(I_p)P(I_b) = \frac{4}{9},$$

pa je vjerojatnost da čuje točnu informaciju

$$P(A) = P(L_p \cap L_b) + P(I_p \cap I_b) = \frac{5}{9}.$$

Problem je jednostavan. Međutim, sljedeći način rješavanja istog primjera sugerira princip koji se može generalno primijeniti te olakšati računanje u mnogo složenijim situacijama.

Uočimo da prijatelj može samo lagati ili reći istinu. Dakle, događaji se L_p *i* I_p *međusobno isljučuju (disjunktni su) i opisuju sve što se može dogoditi u odnosu na informaciju koju prenosi prijatelj. Također je*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap I_p) + P(A \cap L_p) = \\ &= P(A \mid I_p)P(I_p) + P(A \mid L_p)P(L_p) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

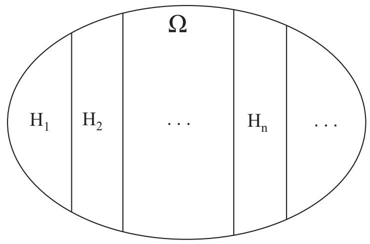
Definicija 1.8. *Konačna ili prebrojiva familija događaja* $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *u vjerojatnostnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je* **potpun sustav događaja** *ako vrijedi:*

1. $P(H_i) > 0$ *za sve* $i \in I$,
2. $H_i \cap H_j = \emptyset$ *za sve* $i \neq j$, $i, j \in I$,
3. $\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega$.

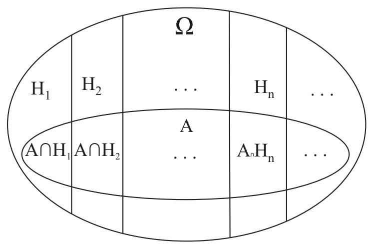
Napomena 1.1. *Potpun sustav događaja* $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *čini jednu particiju prostora elementarnih događaja* Ω *(slika 1.15). Prema tome, bilo koji događaj* $A \subset \Omega$ *moguće je prikazati kao uniju presjeka događaja* A *s događajima* H_i, $I \subseteq \mathbb{N}$, *potpunog sustava događaja, tj.*

$$A = \bigcup_{i \in I} (A \cap H_i),$$

što prikazujemo slikom 1.16.



Slika 1.15: Potpun sustav događaja.



Slika 1.16: Prikaz događaja $A \subset \Omega$ kao unije događaja $A \cap H_i$, $i \in I \subseteq \mathbb{N}$.

Teorem 1.1 (**Formula potpune vjerojatnosti**). *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *potpun sustav događaja na njemu. Tada za proizvoljan događaj* $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \mid H_i) P(H_i). \tag{1.3}$$

Dokaz. *Uočimo da događaj* $A \in \mathcal{F}$ *možemo predstaviti na sljedeći način:*

$$A = \bigcup_{i \in I} A \cap H_i.$$

Također uočimo da je $\{A \cap H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *familija disjunktnih skupova. Prema tome slijedi da je*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap H_i) = \sum_{i \in I} P(A \mid H_i) P(H_i).$$

Primjer 1.36. *Ulični kockar ima dva novčića od jedne kune: jedan je pravilno izrađen (tzv. standardni novčić), a drugi s obiju strana ima slavuja (tj. nepravilno je izrađen, tzv. nestandardni novčić). Vama je ponudio da na slučajan način odaberete jedan novčić koji će on baciti dva puta. Kolika je vjerojatnost da je u oba bacanja odabrani novčić pao na slavuja?*

Očito tražena vjerojatnost ovisi o tome koji smo od dvaju ponuđenih novčića odabrali. Dakle, kao potpun sustav događaja promatramo familiju $\{H_1, H_2\}$ *gdje su događaji* H_1 *i* H_2 *definirani na* *sljedeći način:*

$$H_1 \quad - \quad \textit{odabran je standardan novčić,}$$
$$H_2 \quad - \quad \textit{odabran je nestandardan novčić.}$$

Budući da novčić izvlačimo na slučajan način, vjerojatnosti događaja H_1 *i* H_2 *iznose*

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Događaj čiju vjerojatnost želimo izračunati jest

$$A - \textit{u dvama je bacanjima odabrani novčić oba puta pao na slavuja.}$$

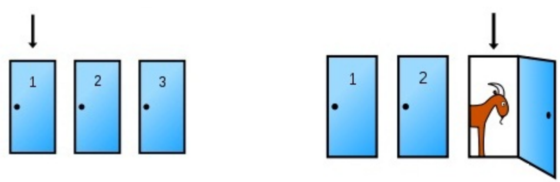
Iz definicije promatranog problema slijedi:

$$P(A \mid H_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P(A \mid H_2) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Prema formuli potpune vjerojatnosti slijedi tražena vjerojatnost:

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{8}.$$

Primjer 1.37 (**Monty Hall problem** [4]**).** *Pretpostavite da igrač sudjeluje u igri u kojoj bira jedna od triju vrata. Iza jednih je vrata automobil, a iza preostalih dvaju vrata nalaze se koze. Npr. ako igrač izabere prva vrata, voditelj igre (koji zna iza kojih vrata se nalazi automobil, a iza kojih koze) otvorit će ona od preostalih dvaju vrata za koja zna da kriju kozu (slika 1.17).*



(a) Početni izbor (b) Potez voditelja

Slika 1.17: Monty Hall problem

Nakon toga voditelj pita igrača: "Želite li promjeniti vaš izbor vrata?". Mi se pitamo je li mudro da igrač promijeni izbor?

Promotrimo situaciju u kojoj se automobil nalazi iza drugih vrata, a igrač je odabrao prva vrata - to znači da će voditelj otvoriti treća vrata jer zna da se iza njih nalazi koza. Uvedimo sljedeće oznake za promatrane događaje:

A_i *- automobil se nalazi iza* i*-tih vrata,*

I_i *- igrač je izabrao* i*-ta vrata,*

[4] Monty Hall problem prvi put postavljen je 1975. u pismu Stevea Selvina uredniku časopisa *American Statistician*, a nazvan je prema voditelju američkog kviza *Let's make a deal*.

V_i - voditelj je otvorio i-ta vrata,

$V_i \mid I_j$ - ako je igrač odabrao j-ta vrata, voditelj je otvorio i-ta vrata, $i \neq j$,

gdje su $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Budući da igrač ne zna iza kojih se vrata nalazi automobil, događaji A_i i I_j nezavisni su za svaki izbor i i j. Odgovor na pitanje je li mudro za igrača promijeniti izbor vrata možemo dobiti tako da izračunamo vjerojatnost da se automobil nalazi iza drugih vrata ako je igrač odabrao prva vrata i voditelj potom otvorio treća vrata. Tu vjerojatnost računamo primjenom definicije uvjetne vjerojatnosti:

$$P(A_2|I_1 \cap V_3) = \frac{P\left(V_3 \cap (A_2 \cap I_1)\right)}{P(I_1 \cap V_3)} = \frac{P(V_3 \mid A_2 \cap I_1)P(A_2)}{P(V_3 \mid I_1)}.$$

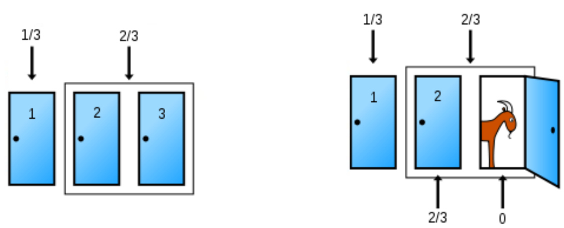
Kako će u promatranoj situaciji voditelj otvoriti treća vrata jer zna da se iza njih nalazi koza, slijedi da je $P(V_3 \mid A_2 \cap I_1) = 1$. Događaji A_1, A_2 i A_3 čine potpun sustav događaja i $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. Preostaje izračunati $P(V_3 \mid I_1)$. Prema formuli potpune vjerojatnosti slijedi da je

$$P(V_3 \mid I_1) = P_{I_1}(V_3) = \sum_{i=1}^{3} P_{I_1}(A_i) P_{I_1}(V_3 \mid A_i) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i \mid I_1) P\left(V_3 \mid A_i \cap I_1\right).$$

Kako su događaji A_i i I_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ nezavisni, slijedi da je

$$P(A_i \mid I_1) = P(A_i) = \frac{1}{3}, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Nadalje, zaključujemo da je $P\left(V_3 \mid A_1 \cap I_1\right) = 1/2$, $P\left(V_3 \mid A_2 \cap I_1\right) = 1$ i $P\left(V_3 \mid A_3 \cap I_1\right) = 0$, iz čega slijedi da je $P_{I_1}(V_3) = P(V_3 \mid I_1) = 1/2$. Sada lako slijedi da je $P(A_2|I_1 \cap V_3) = 2/3$ te zaključujemo da je u opisanoj situaciji promjena izbora vrata mudar potez za igrača (slika 1.18).



(a) Vjerojatnosti bez sudjelovanja voditelja

(b) Vjerojatnosti sa sudjelovanjem voditelja

Slika 1.18: Vjerojatnosti ishoda u Monty Hall problemu

Analizirajte probleme vezane uz druge odabire vrata i smještaje automobila.

U primjenama često elemente potpunog sustava događaja $\{H_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, tj. skupove H_i zovemo **hipotezama**. Ponekad je korisno razmišljati o računanja vjerojatnosti da je postavljena hipoteza istinita ako utvrdimo da se realizirao neki događaj. Npr. ako u primjeru 1.36 utvrdimo da se u oba pokušaja okrenuo slavuj, možemo se pitati kolika je vjerojatnost da je izvučeni novčić standardan, a kolika da nije standardan. Za izračunavanje vjerojatnosi tog oblika može se koristiti rezultat poznat pod nazivom **Bayesova formula**.

Teorem 1.2. *Neka je* $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i neka je* $A \in \mathcal{F}$ *događaj s pozitivnom vjerojatnosti, tj.* $P(A) > 0$. *Tada za svaki* $i \in I$ *vrijedi:*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}. \tag{1.4}$$

Dokaz. Primjenom definicije uvjetne vjerojatnosti slijedi:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}.$$

Primjer 1.38. *Za problem opisan u primjeru 1.36 pomoću Bayesove formule izračunajmo vjerojatnosti* $P(H_1 \mid A)$ *i* $P(H_2 \mid A)$, *pri čemu događaje* $H_1 \mid A$ *i* $H_2 \mid A$ *interpretiramo na sljedeći način:*

$H_1 \mid A$ – *ako je u oba bacanja novčić pao na slavuja, odabran je standardan novčić.*

$H_2 \mid A$ – *ako je u oba bacanja novčić pao na slavuja, odabran je nestandardan novčić.*

Primjenom Bayesove formule slijedi:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}, \quad P(H_2 \mid A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}.$$

Uočimo da je

$$P(H_1 \mid A) + P(H_2 \mid A) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1.$$

1.10 Zadaci

Zadatak 1.1. Odredite skupove elementarnih događaja za sljedeće slučajne pokuse:

a) uzastopno bacanje pravilno izrađenog novčića dva puta,

b) bacanje jedne pravilno izrađene igraće kockice,

c) istovremeno bacanje dviju pravilno izrađenih igraćih kockica,

d) uzastopno bacanje pravilnom izrađene igraće kockice n puta, $n \in \mathbb{N}$,

e) slučajan izbor delegacije od dvaju članova iz skupa osoba $\{A, B, C, D, E, F\}$.

Rješenje:

a) $\Omega = \{(P,P), (P,G), (G,P), (G,G)\}$,

b) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

c) $\Omega = \{(i,j) : i, j \in \{1, \ldots, 6\}\}$,

d) $\Omega = \{(i_1, \ldots, i_n) : i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, 6\}\}$,

e) Ω je familija svih dvočlanih podskupova skupa $\{A, \ldots, F\}$.

Zadatak 1.2. Odredite prostor elementarnih događaja slučajnog pokusa koji se sastoji od bacanja pravilno izrađenog novčića i pravilno izrađene igraće kockice redom, pri čemu se kao ishod registriraju pojava pisma ili glave na novčiću i broj na gornjoj strani kockice.

Rješenje: $\Omega = \{(i, j) : i \in \{P, G\}, j \in \{1, \ldots, 6\}\}$.

Zadatak 1.3. Odredite prostor elementarnih događaja slučajnog pokusa koji se sastoji od bacanja pravilno izrađenog novčića i odabira jednog elementa skupa $\{A, B, C, D, E\}$ redom.

Rješenje: označimo 1 realizaciju pisma i 0 realizaciju glave pri bacanju novčića; $\Omega = \{0, 1\} \times \{A, B, C, D, E\}$.

Zadatak 1.4. Odredite prostor elementranih događaja slučajnog pokusa koji se sastoji redom od bacanja pravilno izrađene igraće kockice i pravilno izrađenog tetraedra čije su strane numerirane slovima a, b, c i d.

Rješenje: $\Omega = \{(i, j) : i \in \{1, \ldots, 6\}, j \in \{a, b, c, d\}\}$.

Zadatak 1.5. Slučajan pokus sastoji se od uzastopnog bacanja pravilno izrađenog novčića sve dok ne padne pismo. Odredite prostor elementarnih događaja tog pokusa.

Rješenje: označimo 1 realizaciju pisma i 0 realizaciju glave; $\Omega = \{1, (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1), \ldots\}$

Zadatak 1.6. U kutiji se nalaze četiri papirića numerirana brojevima 1, 2, 3 i 4. Iz kutije se na slučajan način izvlači jedan po jedan papirić i to:

a) bez vraćanja,

b) s vraćanjem,

sve dok se ne izvuče papirić na kojemu je neparan broj. Ako se kao ishod tog slučajnog pokusa registriraju izvučeni brojevi, odredite prostor elementarnih događaja.

Rješenje:
a) $\Omega = \{1, 3, (2, 1), (4, 1), (2, 3), (4, 3), (2, 4, 1), (2, 4, 3), (4, 2, 1), (4, 2, 3)\}$,
b) $\Omega = \{1, 3, (2, 1), (2, 2, 1), (2, 2, 2, 1), \ldots\}$.

Zadatak 1.7. Strijelac gađa metu 4 puta, pri čemu se registriraju pogoci (označeni nulom) i promašaji (označeni jedinicom). Odredite prostor elementarnih događaja i sljedeće događaje:

a) A - gađanje je započelo promašajem,

b) B - rezultat je svih gađanja isti,

c) C - cilj je pogođen dva puta,

d) D - cilj je pogođen barem dva puta.

Rješenje:
$$\Omega = \{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,0,0),\\ (0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,0,1),(1,1,1,0),\\ (0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,1)\}.$$

Zadatak 1.8. Vitez Okruglog stola kralja Arthura, Sir Lancelot, odlučio je strijelom gađati jabuku kroz zlatni prsten u čast kraljice Guinevere. Sir Lancelot ima na raspolaganju samo luk i 4 strijele i može gađati jabuku sve dok je ne pogodi 2 puta ili ne potroši sve strijele (pogoci i promašaji ne moraju se realizirati zaredom). Odredite prostor elementarnih događaja Ω te sljedeće događaje:

- A - jabuka je promašena točno dva puta,
- B - jabuka je promašena u posljednjem pokušaju.

Jesu li događaji A i B disjunktni?

Rješenje:
$$\Omega = \{(1,1),(0,1,1),(1,0,1),(0,0,1,1),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(1,0,0,0),\\ (0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(0,0,0,0)\},$$
$$A = \{(1,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,0,1)\},$$
$$B = \{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Zadatak 1.9. U natjecanju u streličarstvu lukom i strijelom Robin Hood gađa jednostavnu metu (jedine moguće realizacije gađanja su ili pogodak ili promašaj) sve dok ju ili ne pogodi dva puta ili ne promaši tri puta (pogoci i promašaji ne moraju se realizirati zaredom). Odredite prostor elementarnih događaja Ω te sljedeće događaje:

- A - druga odapeta strelica promašila je metu,
- B - prva i treća odapeta strelica pogodile su metu.

Jesu li događaji A i B disjunktni?

Rješenje:
$$\Omega = \{(1,1),(1,0,1),(0,1,1),(0,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,0),\\ (1,0,0,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}, A = \{(1,0,1),(0,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,0),(1,0,0,0),(1,0,0,1)\},$$

$$B = \{(1,0,1)\}, \quad B \subset A.$$

Zadatak 1.10. Strijelac gađa cilj oblika kružne mete polumjera R, pri čemu se mjeri udaljenost od mjesta pogotka do središta mete. Odredite prostor elementarnih događaja.

Rješenje: označimo O promašaj mete pri gađanju; $\Omega = [0, R] \cup \{O\}$.

Zadatak 1.11. Neka je Ω prostor elementarnih događaja nekog slučajnog pokusa, te neka su A, B i C događaji ($A, B, C \subseteq \Omega$). Pomoću događaja A, B i C izrazite sljedeće događaje:

a) realizirao se samo događaj A,

b) realizirali su se događaji A i B,

c) realizirala su se sva tri događaja,

d) realizirao se barem jedan od događaja A, B i C,

e) realizirao se točno jedan od događaja A, B i C,

f) realizirali su se barem dva od događaja A, B i C,

g) realizirali su se točno dva od događaja A, B i C,

h) realizirali su se najviše dva od događaja A, B i C,

i) nije se realizirao niti jedan od događaja A, B i C.

Rješenje:
a) $A \cap B^c \cap C^c$,
b) $A \cap B$,
c) $A \cap B \cap C$,
d) $A \cup B \cup C$,
e) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$,
f) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
g) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$,
h) $A^c \cup B^c \cup C^c$,
i) $(A \cup B \cup C)^c$.

Zadatak 1.12. Među studentima se okupljenima na predavanju slučajno bira jedan student. Promatramo sljedeće događaje:

- A - student je muškog spola,
- B - student je vegetarijanac,
- C - student živi u studentskom domu.

a) Opišite događaj $A \cap B \cap C$.

b) Kada će vrijediti $A \cap B \cap C = A$?

c) Kada će vrijediti $C^c \subseteq B$?

d) Kada će vrijediti $A^c = B$? Vrijedi li nužno ta jednakost ako su svi studenti muškog spola vegetarijanci?

Rješenje:

a) Student je muškog spola, vegetarijanac je i živi u studentskom domu.

b) Vrijedi kad su svi studenti muškog spola vegetarijanci i žive u studentskom domu.

c) Vrijedi kad su svi studenti koji ne žive u studentskom domu vegetarijanci.

d) $A^c = B$ *vrijedi ako su svi studenti vegetarijanci ženskog spola (*$B \subseteq A^c$*) i ako su sve studentice vegetarijanci (*$A^c \subseteq B$*). Ako su svi studenti muškog spola vegetarijanci (tj. ako je* $A \subseteq B$*) zaključujemo sljedeće:*

- $A^c \subseteq B$ *samo ako su svi studenti (bez obzira na spol) vegetarijanci,*
- $B \subseteq A^c$ *u opisanoj situaciji ne vrijedi,*

što znači da ako je $A \subseteq B$, skupovi A^c i B nisu jednaki.

Zadatak 1.13. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Ako su $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $P(A \triangle B) = 0$, dokažite da je $P(A) = P(B)$.

Uputa: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Zadatak 1.14. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor te neka za $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi da je $P(A \triangle B) = 0$ i $P(A) = p$. Izračunajte:

a) $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$,

b) $P(A \setminus B)$ i $P(B \setminus A)$.

Zadatak 1.15. Dokažite da nezavisnost događaja A i B, $A, B \in \mathcal{F}$, povlači nezavisnost

a) događaja A i B^c,

b) događaja A^c i B^c.

Zadatak 1.16. Na raspolaganju nam je kutija u kojoj se nalazi 100 papirića numeriranih brojevima $1, 2, \ldots, 100$. Slučajan pokus sastoji se od izvlačenja jednog papirića iz kutije. Upotrebom klasične definicije vjerojatnosti odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A - izvučeni je broj jednoznamenkast,

b) B - izvučeni je broj dvoznamenkast,

c) C - izvučeni je broj manji ili jednak broju k, $k \in \{1, 2, \ldots, 100\}$,

d) D - izvučeni je broj strogo veći od k, $k \in \{1, 2, \ldots, 100\}$,

e) E - suma je znamenaka izvučenog broja 3,

f) F - umnožak je znamenaka izvučenog broja 6.

Rješenje:

a) $P(A) = 0.09$,	b) $P(B) = 0.9$,	c) $P(C) = k/100$,
d) $P(D) = (100 - k)/100$,	e) $P(E) = 0.04$,	f) $P(F) = 0.04$.

Zadatak 1.17. Pravilno izrađena igraća kockica baca se dva puta. Upotrebom klasične definicije vjerojatnosti odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A - pali su jednaki brojevi,

b) B - suma je brojeva koji su pali 8,

c) C - produkt je brojeva koji su pali 8,

d) D - suma brojeva koji su pali veća je od produkta brojeva koji su pali,

e) E - produkt brojeva koji su pali veći je od sume brojeva koji su pali.

Rješenje:
a) $P(A) = 1/6$, b) $P(B) = 5/36$, c) $P(C) = 1/18$,
d) $P(D) = 11/36$, e) $P(E) = 2/3$.

Zadatak 1.18. Pretpostavimo da u pošiljci od ukupno 500 jabuka ima 2% prezrelih jabuka. Kolika je vjerojatnost da slučajan uzorak od 20 jabuka uzet iz te pošiljke sadrži točno dvije prezrele jabuke?

Rješenje: $\dfrac{\binom{10}{2}\binom{490}{18}}{\binom{500}{20}}$.

Zadatak 1.19 (Problem rođendana). Kolika je vjerojatnost da između n osoba, $n \leq 365$, barem dvije osobe imaju rođendan istog datuma? Pretpostavljamo da svaka od n osoba može biti rođena s jednakom vjerojatnošću bilo kojeg dana u godini i zanemarujemo postojanje prijestupnih godina.

Rješenje: $1 - \dfrac{364 \cdots (366-n)}{365^{n-1}}$.

Zadatak 1.20. U kutiji se nalazi a crvenih i b zelenih kuglica ($a \geq 2$, $b \geq 2$). Iz kutije na slučajan način istovremeno izvadimo dvije kuglice. Definirajmo sljedeće događaje:

A – izvučene su kuglice iste boje,
B – izvučene su kuglice različitih boja.

Koji je od događaja A i B vjerojatniji?

Rješenje: $P(A) = \dfrac{\binom{a}{2}+\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{2}}$, $\quad P(B) = \dfrac{ab}{\binom{a+b}{2}}$.

Zadatak 1.21. Pravilno izrađen novčić bacamo 10 puta zaredom. Kolika je vjerojatnost da se pismo realizira točno tri puta?

Rješenje: $\dfrac{120}{2^{10}}$.

Zadatak 1.22. Pravilno izrađenu igraću kockicu bacamo 10 puta. Kolika je vjerojatnost da se kao rezultat bacanja brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6$ pojave redom $2, 3, 1, 1, 1, 2$ puta?

Rješenje: $\dfrac{10!}{4 \cdot 6^{11}}$.

Zadatak 1.23. U autobusu se nalazi 15 ljudi. Do kraja putovanja ostale su 4 stanice. Kolika je vjerojatnost da svi putnici izađu na istoj stanici?

Rješenje: 4^{-14}.

Zadatak 1.24. Pretpostavimo da n ljudi na slučajan način sjeda za okrugli stol. Izračunajte vjerojatnost da će dva unaprijed odabrana čovjeka sjediti zajedno.

Rješenje: $\dfrac{2}{n-1}$.

Zadatak 1.25. m muškaraca i n žena raspoređuju se na slučajan način u kazalištu na $(m+n)$ sjedala složenih u redu. Kolika je vjerojatnost da sve žene sjede zajedno (tj. jedna do druge)?

Rješenje: $\dfrac{n!(m+1)!}{(m+n)!} = \dfrac{m+1}{\binom{m+n}{n}}$.

Zadatak 1.26. Svežanj od 52 karte podijeli se na dva jednakobrojna dijela. Odredite vjerojatnost sljedećih događaja:

a) A - u svakom dijelu nalaze se po dva kralja,

b) B - u jednom dijelu ne nalazi se niti jedan kralj,

c) C - u jednom dijelu nalazi se jedan, a u drugom dijelu tri kralja.

Rješenje: $P(A) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{48}{24}}{\binom{52}{26}}$, $\quad P(B) = \dfrac{2\binom{48}{26}}{\binom{52}{26}}$, $\quad P(C) = \dfrac{8\binom{48}{25}}{\binom{52}{26}}$.

Zadatak 1.27. Iz špila od 52 karte na slučajan način biramo 8 karata. Izračunajte vjerojatnost da su izvučena

a) tri asa,

b) tri kralja,

c) tri asa ili tri kralja.

Rješenje: a) $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{48}{5}}{\binom{52}{8}}$, $\quad$ c) $\dfrac{2\binom{4}{3}\binom{48}{5} - \binom{4}{3}^2\binom{44}{2}}{\binom{52}{8}}$.

Zadatak 1.28. Student je došao na ispit znajući odgovore na 90 od 100 pitanja. Izvlači se pet pitanja.

a) Kolika je vjerojatnost da će student znati odgovore na svih pet pitanja?

b) Kolika je vjerojatnost da će student znati odgovore na barem tri od pet izvučenih pitanja?

Rješenje: a) $\dfrac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 0.584$, $\quad$ b) $\dfrac{\binom{90}{5} + 10\binom{90}{4} + \binom{10}{2}\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}} \approx 0.99$.

Zadatak 1.29. Iz šešira u kojem se nalazi n kuglica na slučajan način izaberemo nekoliko kuglica. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli paran broj kuglica?

Rješenje: $\dfrac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$.

Zadatak 1.30 (De Mereov paradoks). Bacamo tri različite pravilno izrađene igraće kockice. Zanima nas vjerojatnost sljedećih događaja:

(a) A - zbroj brojeva na svim trima kockicama jednak je 11,

(b) B - zbroj brojeva na svim trima kockicama jednak je 12.

Rješenje: $P(A) = \dfrac{27}{6^3}, \quad P(B) = \dfrac{25}{6^3}$.

Zadatak 1.31. Standardni svežanj od 52 karte sastoji se od 26 crvenih karata (13 hercova i 13 karo karata) i 26 crnih karata (13 pikova i 13 trefova). Na slučajan način iz špila biramo 11 karata. Odredite prostor elementarnih događaja Ω i izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A - izvučena je barem jedna crvena karta,

b) B - izvučeno je točno pet crnih karata ili točno sedam hercova.

Rješenje: $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{26} \dfrac{\binom{26}{k}\binom{26}{11-k}}{\binom{52}{11}}, \quad P(B) = \dfrac{\binom{26}{5}\binom{26}{6}+\binom{13}{7}\binom{39}{4}}{\binom{52}{11}}$.

Zadatak 1.32. U šeširu se nalazi 100 listića s oznakama od 00 do 99. Ako je xy (ne radi se o umnošku $x \cdot y$) oznaka na slučajno odabranom listiću, odredite vjerojatnosti događaja $A = \{xy : x \cdot y < 5\}$, $B = \{xy : x + y = 11\}$ te događaja $C = \{xy : xy > 60\}$ pod uvjetom da se realizirao događaj $D = \{xy : y > 7\}$.

Rješenje: $P(A) = 27/100$, $P(B) = 2/25$, $P(C|D) = 2/9$.

Zadatak 1.33. Pravilno izrađen novčić bacamo n puta. Odredite vjerojatnost da se pismo realizira u točno m bacanja, $m \leq n$.

Rješenje: $\dfrac{\binom{n}{m}}{2^n}$.

Zadatak 1.34. Odredite vjerojatnost da rođendani 12 nasumično odabranih ljudi padnu u različite mjesece u godini?

Rješenje: $\dfrac{11!}{12^{11}}$.

Zadatak 1.35. U kutiji se nalazi $(n + m)$ srećki od kojih n dobiva. Na slučajan način odabere se k srećki. Kolika je vjerojatnost da među njima bude j dobitnih?

Rješenje: $\dfrac{\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{n+m}{k}}$.

Zadatak 1.36. Odredite vjerojatnost da je slučajno odabrana točka iz segmenta $[0, 1]$ racionalna?

Rješenje: vjerojatnost odabira racionalne točke iz segmenta $[0,1]$ jest nula, tj. slučajno će odabrana točka iz segmenta $[0,1]$ gotovo sigurno biti iracionalna.

Zadatak 1.37. Za fiksiranu točku $c \in [a,b]$ i slučajno odabranu točku $x \in [a,b]$ odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $x \leq c$,

b) $x < c$,

c) $x = c$,

d) x je bliže točki a nego točki b.

Rješenje: a) $\dfrac{c-a}{b-a}$, b) $\dfrac{c-a}{b-a}$, c) 0, d) 0.5.

Zadatak 1.38. Neka su x i y dva slučajno odabrana broja iz segmenta $[0,1]$. Odredite vjerojatnost da za njih vrijedi:

a) $x > y$,

b) $x + y < 3/2$,

c) $x = y$,

d) $xy \leq 2/9$ i $x + y < 1$.

Rješenje: a) $1/2$, b) $7/8$, c) 0, d) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9}\ln 2$.

Zadatak 1.39. Neka su x i y dva slučajno odabrana broja iz segmenta $[-2,2]$. Odredite vjerojatnost da za njih vrijedi $y \leq x^2$ i $x < \frac{1}{2}y + 1$.

Zadatak 1.40. Dva broda A i B trebaju stići u istu luku. Njihova su vremena dolaska u luku slučajna, međusobno nezavisna i jednako vjerojatna tijekom 24 sata. Kad brod A stigne u luku, on ostaje u njoj 1 sat, a brod B 2 sata. Budući da luka ne može odjednom primiti dva broda, odredite vjerojatnost da jedan od brodova čeka na oslobađanje luke dok drugi brod ne ode.

Rješenje: 0.121.

Zadatak 1.41. Na kružnici polumjera $r = 2\,cm$ na slučajan način biramo dvije točke. Kolika je vjerojatnost da će udaljenost među tim točkama mjerena dužinski (ne po kružnici) biti najviše $2\,cm$?

Rješenje: $1/3$.

Zadatak 1.42. Na kružnici polumjera r na slučajan način odabrane su tri točke: A, B i C. Kolika je vjerojatnost da je kružnici upisan trokut ABC šiljastokutan?

Rješenje: $1/4$. Pretpostavite da je položaj točke A na kružnici fiksan, promatrajte duljine kružnih lukova AB i BC te tako određen prostor elementarnih događaja skicirajte u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

Zadatak 1.43. Izračunajte vjerojatnost da korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ budu realni, ako se koeficijenti p i q izabiru na slučajan način iz segmenta $[-1, 1]$.

Rješenje: $13/24$.

Zadatak 1.44. U pravokutniku kojemu se stranice odnose kao $1 : 2$ na slučajan način biramo jednu točku. Kolika je vjerojatnost da je točka pala:

a) na dijagonalu pravokutnika,

b) bliže duljoj stranici pravokutnika?

Rješenje: a) 0, b) $3/4$.

Zadatak 1.45. Na dužini $\overline{AB}$ duljine a na slučajan način izabrane su točke M i N. Odredite vjerojatnost da je točka M bliže točki A nego točki N.

Rješenje: $1/4$.

Zadatak 1.46. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka u kvadratu bude bliža jednoj od dijagonala nego stranicama kvadrata?

Rješenje: $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

Zadatak 1.47. Vjerojatnost da se knjiga nalazi u knjižnici iznosi p. Ako je knjiga u knjižnici, nalazi se na jednoj od n polica s jednakom vjerojatnošću (za svaku od tih n polica). Pregledano je m polica, $m < n$, i knjiga nije nađena. Kolika je vjerojatnost da je knjiga ipak u knjižnici?

Rješenje: $\dfrac{(n-m)p}{n-mp}$.

Zadatak 1.48. Pretpostavimo da na slučajan način odabiremo realne brojeve $x \in [0, 1]$ i $y \in [0, 2]$. Kolika je vjerojatnost da je njihov zbroj veći od dva, a produkt manji od jedan?

Rješenje: $\dfrac{1}{2} \ln 2 - \dfrac{1}{4}$.

Zadatak 1.49. Točka A bira se na slučajan način unutar jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine 3 cm. Kolika je vjerojatnost da udaljenost točke A od bilo kojeg vrha trokuta bude veća od 1 cm?

Rješenje: $\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Zadatak 1.50. Zadano nam je pet dužina čije su duljine 2 cm, 4 cm, 5 cm, 7 cm i 9 cm. Kolika je vjerojatnost da se od tri slučajno odabrane dužine može konstruirati trokut?

Rješenje: $2/5$.

Zadatak 1.51. Točka A bira se na slučajan način unutar raznostraničnog pravokutnog trokuta. Kolika je vjerojatnost da je odabrana točka A bliža hipotenuzi nego katetama?

Rješenje: duljinu hipotenuze označimo c, a duljine kateta a i b; tada je tražena vjerojatnost $\dfrac{c}{a+b+c}$.

Zadatak 1.52. Trenutak u kojem će neki signal stići do prijemnika slučajno je odabrani trenutak iz intervala $[0, T]$. Prijemnik neće registrirati drugi signal ako je razlika između dva uzastopna signala manja od τ, $\tau < T$. Odredite vjerojatnost da prijemnik neće registrirati drugi signal.

Rješenje: $\dfrac{\tau(2T-\tau)}{T^2}$.

Zadatak 1.53 (Buffonov problem). Ravnina je podijeljena paralelnim pravcima koji su jedan od drugog udaljeni za $2a$. Na tu se ravninu na slučajan način baca igla duljine $2l$, $l < a$. Odredite vjerojatnost da igla siječe neki od pravaca.

Rješenje: $\dfrac{2l}{a\pi}$.

Zadatak 1.54. Slučajan pokus sastoji se od bacanja pravilno izrađenog novčića tri puta za redom. Želimo naći vjerojatnost događaja A uz dani događaj B kada su A i B sljedeći događaji:

- A - glava je pala više puta nego pismo,
- B - prvo je palo pismo.

Rješenje: $P(A|B) = 0.25$.

Zadatak 1.55. Iz kutije u kojoj se nalazi m crvenih i n zelenih kuglica na slučajan način izvučeno je k kuglica. Uz pretpostavku da su sve izvučene kuglice iste boje, kolika je vjerojatnost da su sve zelene?

Rješenje: $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{m}{k}+\binom{n}{k}}$.

Zadatak 1.56. Slučajan pokus sastoji se od slučajnog odabira obitelji koja ima dvoje djece (uz pretpostavku da su vjerojatnosti rođenja kćerke i sina jednake (što približno odgovara stvarnoj situaciji) te da znamo redoslijed rađanja djece u obitelji). Treba provjeriti jesu li sljedeći događaji nezavisni:

- A - u obitelji je barem jedna kćerka,
- B - u obitelji su jedna kćerka i jedan sin.

Rješenje: A i B nisu nezavisni događaji.

Zadatak 1.57. Cilj se gađa iz tri topa. Topovi pogađaju cilj nezavisno jedan od drugoga s vjerojatnošću 0.4. Ako jedan top pogodi cilj uništava ga s vjerojatnošću 0.3, ako ga pogode dva topa uništavaju ga s vjerojatnošću 0.7, a ako ga pogode tri topa uništavaju ga s vjerojatnošću 0.9. Nađite vjerojatnost uništenja cilja.

Rješenje: 0.3888.

Zadatak 1.58. Imamo dvije kutije. U prvoj se nalazi a bijelih i b crnih kuglica, a u drugoj c bijelih i d crnih kuglica. Iz prve kutije na slučajan način biramo k kuglica, a iz druge m kuglica. Tih $(k+m)$ kuglica izmiješamo i stavimo u treću kutiju.

a) Iz treće kutije na slučajan način izvučemo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da ona bude bijele boje?

b) Iz treće kutije na slučajan način izvučemo tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da je barem jedna kuglica bijele boje?

Rješenje:
a) $\frac{1}{k+m}\left(\frac{ak}{a+b}+\frac{cm}{c+d}\right)$

b) Pomoću formule potpune vjerojatnosti odrediti vjerojatnost suprotnog događaja.

Zadatak 1.59. Na usmenom ispitu iz Uvoda u vjerojatnost i statistiku ponuđeno je 10 pitanja od kojih je student naučio njih n, $0 \leq n \leq 10$. Student će položiti ispit ako bude točno odgovorio na dva slučajno odabrana pitanja ili ako točno odgovori na jedno od njih te na treće, dodatno postavljeno pitanje. Na koliko pitanja student treba znati točno odgovoriti da bi s vjerojatnošću većom od 0.8 položio ispit?

Rješenje: student treba znati točno odgovoriti na bar sedam pitanja.

Zadatak 1.60. Ptica slijeće u slučajno izabrano gnijezdo od ukupno tri gnijezda koja su joj na raspolaganju. Svako gnijezdo sadrži dva jaja i to: u prvom gnijezdu su oba jaja zdrava, u drugom je jedno zdravo i jedan mućak, a u trećem su oba jaja mućka. Nađite vjerojatnost da ptica sjedi na mućku. Ako je sjela na mućak, kolika je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu?

Rješenje: ako je sjela na mućak, vjerojatnost da sjedi na drugom jajetu jest $1/3$.

Zadatak 1.61. Neki izvor emitira poruke koje se sastoje od znakova 0 i 1. Vjerojatnost emitiranja znaka 1 jest 0.6, a vjerojatnost emitiranja znaka 0 jest 0.4. Na izlazu se iz kanala 10% znakova pogrešno interpretira. Ako je primljena poruka 101, kolika je vjerojatnost da je ona i poslana?

Rješenje: 0.743.

Zadatak 1.62. Svi studenti iz grupe koja se sastoji od a odličnih, b vrlo dobrih i c dobrih studenata prijavili su ispit iz Uvoda u vjerojatnost i statistiku. Odličan student na ispitu može dobiti samo odličnu ocjenu, vrlo dobar student s jednakom vjerojatnošću može dobiti odličnu ili vrlo dobru ocjenu, a dobar student s jednakom vjerojatnošću može dobiti vrlo dobru, dobru ili dovoljnu ocjenu. Na ispitu se na slučajan način proziva jedan student iz grupe. Kolika je vjerojatnost da on dobije odličnu ili vrlo dobru ocjenu?

Rješenje: $\dfrac{3a+3b+c}{3(a+b+c)}$.

Zadatak 1.63. Iz šešira u kojem se nalazi n kuglica na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu.

a) Kolika je vjerojatnost da će ta kuglica biti bijela ako su sve pretpostavke o prethodnom broju bijelih kuglica jednako vjerojatne?

b) Ako je izvučena bijela kuglica, kolika je vjerojatnost da se sve kuglice u šeširu bijele?

Rješenje: a) $1/2$; b) $2/(n+1)$.

Zadatak 1.64. U mračnoj prostoriji nalaze se četiri svjetiljke i sedam žarulja. Od četiri svjetiljke ispravne su dvije, a od sedam žarulja ispravne su četiri. Ako na slučajan način odaberemo četiri žarulje i stavimo ih u svjetiljke, kolika je vjerojatnost da će prostoriju obasjati svjetlo?

Rješenje: $6/7$.

Zadatak 1.65. Dane su nam dvije kutije šibica. U prvoj kutiji nalazi se 12 šibica od kojih je jedna slomljena, a u drugoj kutiji 10 šibica od kojih je jedna slomljena. Uzimamo jednu šibicu iz prve kutije i prebacimo ju u drugu kutiju. Nakon toga iz druge kutije na slučajan način biramo jednu šibicu. Kolika je vjerojatnost da smo izabrali slomljenu šibicu?

Rješenje: $13/132$.

Zadatak 1.66. Na raspolaganju imamo dvije kutije: u prvoj se nalaze 2 bijele i 4 plave, a u drugoj 3 bijele i 2 plave kuglice. Iz prve kutije na slučajan način, nezavisno jednu od druge, odaberemo dvije kuglice i prebacimo ih u drugu kutiju. Kolika je vjerojatnost da potom odabrana kuglica iz druge kutije bude bijele boje?

Rješenje: $11/21$.

Zadatak 1.67. Iz šešira u kojem se nalazi n kuglica izvlačimo nasumično jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da će ta kuglica biti bijela, ako su sve pretpostavke o prethodnom broju kuglica jednako vjerojatne? Nakon što je izvučena bijela kuglica, kolika je vjerojatnost da su sve kuglice u šeširu bijele?

Rješenje: $\dfrac{2}{n+1}$.

Zadatak 1.68. U tri kutije nalaze se žute i zelene kuglice. U prvoj kutiji nalazi se 5 žutih i 3 zelene kuglice, u drugoj kutiji nalaze se 4 žute i 4 zelene kuglice, a u trećoj 3 žute i 5 zelenih kuglica. Na slučajan način iz svake kutije izaberemo po četiri kuglice i stavimo u četvrtu kutiju. Zatim iz četvrte kutije na slučajan način uzmemo jednu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da je ta kuglica zelene boje?

Zadatak 1.69. U šeširu se nalaze 4 bijele kuglice. Tri se puta na slučajan način izvlači jedna kuglica i zamjenjuje crnom kuglicom. Potom je na slučajan način izvučena jedna kuglica i vidjelo se da je bijela. Koliko iznosi vjerojatnost da su u šeširu točno dvije crne kuglice nakon opisanih zamjena?

Zadatak 1.70. Slučajan pokus zamišljen je na sljedeći način:

- iz skupa $S = \{1, 6, 7, 8, 9\}$ na slučajan način odaberemo jedan broj,
- od preostalih elemenata skupa S slučajno odaberemo još jedan broj.

Kolika je vjerojatnost da je drugi izabrani broj neparan?

Zadatak 1.71. Četiri strijelca gađaju metu (pretpostavljamo da je meta jednostavna, tj. da su moguće realizacije gađanja ili pogodak ili promašaj). Vjerojatnosti pogotka za pojedine strijelce iznose redom 0.6, 0.7, 0.8, 0.9.

a) Izračunajte vjerojatnost da barem tri strijelca pogode metu.

b) Ako je meta pogođena s tri hica, izračunajte vjerojatnost da su ju pogodili prvi i drugi strijelac.

Zadatak 1.72. Grupa od 10 studenata došla je na ispit na kojemu svaki student odgovara na tri slučajno odabrana pitanja od 20 ponuđenih. Tri su studenta ispit pripremila odlično, četvorica dobro, dvojica dovoljno i jedan loše. Odlično pripremljen student zna odgovore na svih 20 pitanja, dobro pripremljen student na 16, dovoljno pripremljen student na 10 i loše pripremljen student na 5 pitanja. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrani student točno odgovorio na sva tri postavljena pitanja?

Zadatak 1.73. Pokažite da sljedećim realnim funkcijama realne varijable možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & , x \in [-1,1] \\ 0 & , x \neq [-1,1] \end{cases}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \in (0,\infty) \\ 0 & , x \in (-\infty, 0] \end{cases}$.

c) Koristeći funkcije iz zadataka a) i b) odredite vjerojatnost događaja

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1/2 < x \leq 1/2\} = (-1/2, 1/2].$$

Rješenje: obje su funkcije su nenegativne i normirane, pa pomoću njih možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}$. Vjerojatnost događaja A je: a) $P(A) = 11/16$, b) $P(A) = 1 - e^{-\lambda/2}$.

Zadatak 1.74. Pokažite da funkcijom $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranom formulom

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(x^2+y) & , (x,y) \in [-1,1] \times [0,1] \\ 0 & , (x,y) \neq [-1,1] \times [0,1] \end{cases}$$

možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz $\mathbb{R}^2$ pripada pravokutniku

$$A = [0,1] \times [0,1/2].$$

Rješenje: funkcija f nenegativna je i normirana, stoga pomoću nje možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$. Vjerojatnost događaja A jest $P(A) = 7/40$.