Poglavlje 2

Slučajna varijabla

Proučavanje cijelog prostora elementarnih događaja nekog slučajnog pokusa i vjerojatnosti zadane na njemu može biti vrlo složen zadatak. Skupovi elementarnih događaja mogu sadržavati razne objekte, npr. brojeve, uređene parove, uređene n-torke, nizove brojeva, slova, nizove slova, boje, itd. Međutim, vrlo se često naš interes za slučajan pokus svodi samo na proučavanje jedne ili nekoliko karakteristika koje možemo opisati (ili kodirati) numerički.

Primjer 2.1. *Ispit se sastoji od* 10 *pitanja višestrukog izbora. Ispit je za kandidata slučajan pokus. Prostor elementarnih događaja takvog pokusa jest skup uređenih desetorki s oznakama koje se koriste za "točan odgovor", odnosno "netočan odgovor". Međutim, prilikom polaganja ispita kandidata prvenstveno zanima koliko će ukupno imati točnih odgovora, a ne i koji će po redu odgovor biti točan. Dakle, njega zanima modeliranje na skupu mogućih ishoda* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Osim toga, zanima ga i koliku će ocjenu postići, što znači da ga zanima i skup mogućih ishoda* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

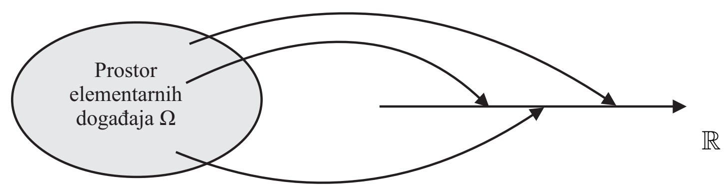
Da bismo za dani slučajni pokus analizirali i modelirali pojedinačne slučajne karakteristike ili više njih, u ovom poglavlju definirat ćemo pojam slučajne varijable, a u sljedećem pojam slučajnog vektora.

2.1 Diskretna slučajna varijabla

Kao što je već rečeno, diskretan vjerojatnosni prostor karakteriziran je činjenicom da Ω ima konačno ili prebrojivo mnogo elemenata. U poglavlju 1.6 označili smo ga $\Omega = \{\omega_i : i \in I_\Omega\}$, $I_\Omega \subseteq \mathbb{N}$. Pridružena je σ-algebra tada točno jednaka partitivnom skupu od Ω, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, a vjerojatnost se može odrediti zadavanjem vrijednosti samo na jednočlanim podskupovima od Ω. Ako Ω nije diskretan (primjerice $\Omega = \mathbb{R}$), nije moguće definirati vjerojatnost samo zadavanjem vrijednosti na elementima od

Ω. Zbog toga ćemo i izučavanje slučajne varijable razdvojiti na takozvane diskretne i apsolutno neprekidne slučajne varijable. Pri tome ćemo diskretne slučajne varijable prirodno vezati uz diskretan vjerojatnosni prostor (iako to nije općenito nužno).

Definicija 2.1. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. *Svaku funkciju* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *zvat ćemo* **diskretna slučajna varijabla**.



Slika 2.1: Prikaz djelovanja slučajne varijable.

Primjer 2.2. *Neka se na skladištu nalaze četiri istovrsna proizvoda. Vjerojatnost prodaje jednog od ponuđenih proizvoda u jednom danu iznosi* $1/2$. *Broj je prodanih proizvoda u jednom danu jedna slučajna varijabla. Označimo je sa* X.

Uočimo da se u tom primjeru Ω *sastoji od uređenih četvorki nula i jedinica koje označavaju je li taj dan pojedini proizvod prodan ili ne, tj.* $\Omega = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l \in \{0, 1\}\}$. *Vjerojatnost svakog elementa iz* Ω *iznosi* $1/2^4$. *Međutim, nama je zanimljivo koliko je proizvoda prodano, ali nam nije bitno o kojim se proizvodima radi. Zato koristimo slučajnu varijablu*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}, \quad X(i, j, k, l) = i + j + k + l.$$

Skup $\{(i, j, k, l) \in \Omega : X(i, j, k, l) = 2\}$ *predstavlja moguće ishode iz* Ω *kod kojih su prodana točno 2 proizvoda. Obzirom da nas zapravo zanima vjerojatnost realizacije takvih skupova, a njihovo je označavanje komplicirano, ovdje ćemo koristiti oznaku za skup:*

$$\{(i, j, k, l) \in \Omega : X(i, j, k, l) = 2\} = \{X = 2\},$$

a za vjerojatnost

$$P(\{(i, j, k, l) \in \Omega : X(i, j, k, l) = 2\}) = P\{X = 2\}.$$

Oznake analogne onima iz primjera 2.2 koristimo općenito kad računamo sa slučajnim varijablama. Tako ćemo za $A \subseteq \mathbb{R}$ uvesti sljedeću oznaku:

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\},$$

a za vjerojatnost tog skupa

$$P\{X \in A\} = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}).$$

Primjerice, za dani $x \in \mathbb{R}$ koristimo oznaku

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = \{X = x\}.$$

Primjer 2.3. *Vratimo se primjeru 2.2. Skup je svih mogućih realizacija slučajne varijable X koja broji prodane proizvode skup $\{0,1,2,3,4\}$.*
Naime, vjerojatnosna svojstva te slučajne varijable određena su ako ulogu prostora elementarnih događaja preuzme $\mathcal{R}(X) = \{0,1,2,3,4\}$. Na njemu vjerojatnost zadajemo nizom brojeva:

$$p_0 = P\{X=0\}, \qquad p_1 = P\{X=1\}, \qquad p_2 = P\{X=2\},$$
$$p_3 = P\{X=3\}, \qquad p_4 = P\{X=4\}.$$

Prebrojavanjam elementarnih događaja iz Ω (primjer 2.2) te primjenom aditivnosti vjerojatnosti slijedi:

$$p_0 = \frac{1}{16}, \quad p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{3}{8}, \quad p_3 = \frac{1}{4}, \quad p_4 = \frac{1}{16}.$$

Radi preglednosti ćemo tu diskretnu slučajnu varijablu zapisati pomoću sljedeće tablice:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Pregledan zapis slučajne varijable prezentiran u prethodnom primjeru koristit ćemo i općenito. Dakle, ako je X dana diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, označimo skup svih vrijednosti koje ona može primiti kao $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, a pripadne vjerojatnosti nizom brojeva $(p_i, i \in I)$ za koji vrijedi:

$$p_i = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = P\{X = x_i\}, \quad i \in I.$$

Bez smanjenja općenitosti, u nastavku razmatranja pretpostavit ćemo da je $I = \mathbb{N}$.

Slučajnu varijablu X prikazujemo u obliku tablice:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

i taj prikaz zovemo **zakon razdiobe**, **tablica distribucije** ili, kraće, **distribucija** slučajne varijable X.

Dakle, za svaku diskretnu slučajnu varijablu možemo istaknuti dva bitna skupa brojeva. Jedan čine sve vrijednosti koje slučajna varijabla X može primiti, tj. skup $\mathcal{R}(X) = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ kojega zovemo slika slučajne varijable, a drugi je niz pripadnih vjerojatnosti, tj. $(p_i, i \in \mathbb{N})$ takav da vrijedi $p_i = P\{X = x_i\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Uočimo da za elemente od $\mathcal{R}(X)$ vrijedi $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ s obzirom da je to skup, dok u nizu $(p_i, i \in \mathbb{N})$ može biti istih elemenata, ali on ima druga dva bitna svojstva:

1. $0 \leq p_i \leq 1$ za svaki $i \in \mathbb{N}$,
2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Zaista, budući da je X slučajna varijabla koja prima vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X)$, to je $P\{X \in \mathcal{R}(X)\} = P(\Omega) = 1$, pa iz svojstava vjerojatnosti slijedi:

$$0 \leq p_i = P\{X = x_i\} \leq 1.$$

Osim toga je

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i\} = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X = x_i\}\right) = P\{X \in \mathcal{R}(X)\} = 1.$$

Koristeći rezultate poglavlja 1.6 znamo da je pomoću niza realnih brojeva $(p_i, i \in \mathbb{N})$ koji zadovoljava svojstva

1. $0 \leq p_i \leq 1$ za svaki $i \in \mathbb{N}$,
2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

dobro definirana vjerojatnost na diskretnom vjerojatnosnom prostoru koji za prostor elementarnih događaja ima skup $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.

Ako brojevi p_i ujedno zadovoljavaju svojstvo

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

vjerojatnost definiranu na $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ označavat ćemo P_X, a novonastali vjerojatnosni prostor $(\mathcal{R}(X), \mathcal{P}(\mathcal{R}(X)), P_X)$ zovemo **vjerojatnosni prostor induciran slučajnom varijablom** X.

Primjer 2.4. *Zbroj brojeva koji su se okrenuli prilikom bacanja dviju pravilno izrađenih igraćih kockica modeliran je diskretnom slučajnom varijablom sa sljedećom tablicom distribucije:*

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Ako nas zanima vjerojatnost događaja

A - zbroj je brojeva na kockicama je manji od 6,

za izračun ćemo iskoristiti prethodnu tablicu distribucije:

$$P(A) = P\{X < 6\} = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < 6\} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{18}.$$

Općenito, za računanje vjerojatnosti skupova (događaja) oblika $\{X \in A\}$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}$, možemo iskoristiti tablicu distribucije slučajne varijable X (tablica 2.1) na sljedeći način:

$$P\{X \in A\} = \sum_{x_i \in A} p_i.$$

Grafički prikaz distribucije

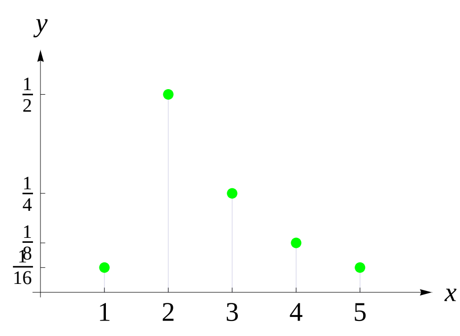
Distribuciju diskretne slučajne varijable koja ima konačan skup mogućih vrijednosti $\mathcal{R}(X)$ i zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

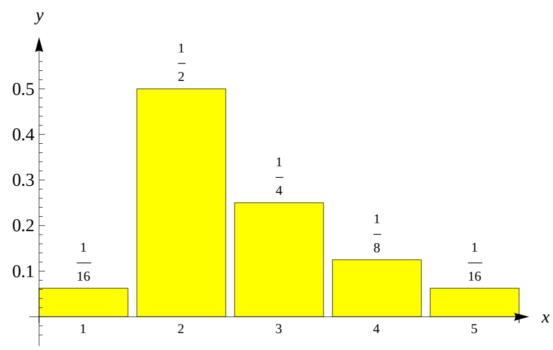
grafički prikazujemo grafom funkcije definirane na $\mathcal{R}(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$ s vrijednostima iz skupa $\{p_1, \dots, p_n\}$ koja svakom elementu $x_i \in \mathcal{R}(X)$ pridružuje pripadnu vjerojatnost $p_i = P\{X = x_i\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Očito se graf te funkcije sastoji od točaka (x_i, p_i).

Također, za grafički prikaz distribucije takve diskretne slučajne varijable često koristimo **stupčasti dijagram**. Stupčasti dijagram sastoji se od niza pravokutnika iste širine, svaki za jednu vrijednost $x_i \in \mathcal{R}(X)$ visine p_i.

Primjer 2.5. *Na temelju tablice distribucije diskretne slučajne varijable definirane u primjeru 2.2 možemo napraviti grafičke prikaze njezine distribucije. Na slici 2.2 prikazan je graf, a na slici 2.3 stupčasti dijagram distribucije te slučajne varijable.*



Slika 2.2: Graf distribucije diskretne slučajne varijable iz primjera 2.2.



Slika 2.3: Stupčasti dijagram distribucije diskretne slučajne varijable iz primjera 2.2.

2.2 Neprekidna slučajna varijabla

Ukoliko prostor elementarnih događaja nije diskretan skup, funkcije definirane na njemu ne moraju nužno imati prebrojiv skup svih mogućih vrijednosti, iako to nije isključeno. Ako je za neku funkciju X, definiranu na Ω koji nije diskretan, skup $\mathcal{R}(X)$ diskretan skup[1], moći ćemo napraviti konstrukciju diskretnog vjerojatnosnog prostora induciranog tom slučajnom varijablom, tj. proučavanje takve slučajne varijable svest ćemo na diskretan slučaj. Međutim, ako prostor elementarnih događaja sadrži neki interval, često nas zanimaju i slučajne karakteristike s neprebrojivim skupom vrijednosti.

Primjer 2.6. *Pretpostavimo da promenadom uz rijeku Dravu želimo prošetati od Tvrđe do hotela Osijek. Taj put dug je oko 2 km. Zbog različite brzine hoda i ostalih subjektivnih utjecaja na trajanje šetnje, jasno je da put koji osoba pritom prijeđe u prvih 5 minuta možemo modelirati kao slučajnu karakteristiku s neprebrojivim skupom mogućih ishoda* $[0, 2]$.

Primjer 2.7. *Praćenje vremena koje protekne od dana stavljanja stroja u upotrebu do prvog kvara jedno je promatranje sa slučajnim ishodima. Pretpostavimo da dobit ostvarena na tom stroju proporcionalno ovisi o vremenu rada stroja te da nema drugih utjecaja na visinu (iznos) dobiti. Time je dobit ostvarena do njegovog prvog stavljanja izvan pogona zbog kvara (koji će uz to uzrokovati dodatne troškove!) slučajna karakteristika za koju je prirodno pretpostaviti da njezin skup mogućih realizacija sadrži neki interval.*

U tom poglavlju definirat ćemo jedan tip slučajne varijable čija je slika $\mathcal{R}(X)$ podskup od $\mathbb{R}$ i sadrži interval.

Definicija 2.2. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i funkcija* $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ *za koju vrijedi:*

[1] Za definiciju diskretne slučajne varijable u općenitom slučaju pogledati [26]

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$,
- *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable,* f, *takva da vrijedi:*

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkciju X *zovemo* **apsolutno neprekidna slučajna varijabla** *na* Ω *ili, kraće,* **neprekidna slučajna varijabla**. *Funkciju* f *tada zovemo* **funkcija gustoće vjerojatnosti** *slučajne varijable* X *ili, kraće,* **funkcija gustoće** *slučajne varijable* X.

Valja napomenuti da nisu sve slučajne varijable, koje nisu diskretne, apsolutno neprekidne u tom smislu. Za opću teoriju pogledati npr. [26], [4], [6].

Bitna svojstva funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable

1. Nenegativnost: $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.
2. Normiranost:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

   Dokaz. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ možemo prikazati kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{n} f(x)\,dx.$$

   Koristeći neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na monotono rastuću familiju skupova imamo:

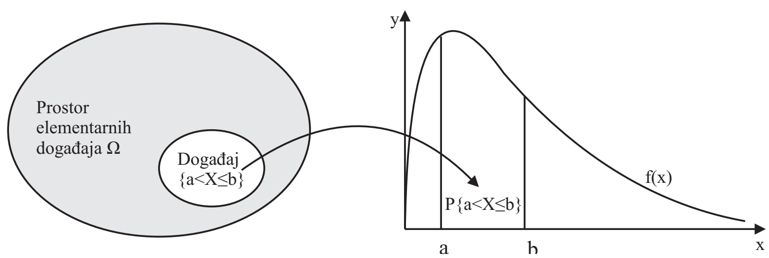
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{n} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} P\{X \in \langle -\infty, n]\} = P\{\Omega\} = 1.$$

3. Vjerojatnost da slučajna varijabla X, čija je funkcija gustoće f, primi vrijednost iz intervala $(a, b]$ može se izračunati korištenjem funkcije gustoće na sljedeći način (vidi sliku 2.4):

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \in \langle a, b]\} = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Dokaz. Koristeći svojstva vjerojatnosti i svojstva integrala slijedi:

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$



Slika 2.4: Vjerojatnost kao površina od osi x do grafa funkcije gustoće nad izabranim intervalom.

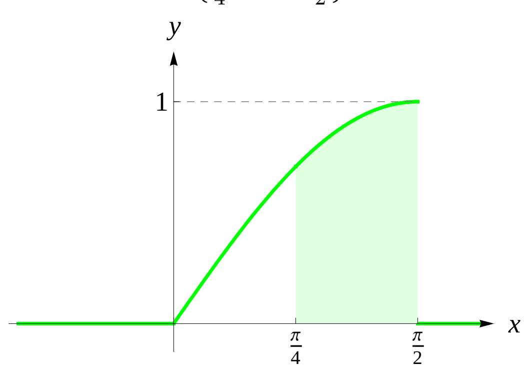
Ako je zadana nenegativna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava svojstvo normiranosti, može se dokazati da postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neprekidna slučajna varijabla X na njemu za koju je f funkcija gustoće (vidi [26]).

Primjer 2.8. *Analizirajmo može li funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vidi sliku 2.5) definirana izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & , \ x \notin \langle 0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

poslužiti kao funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable X. Ako može, odredimo

$$P\left\{\frac{\pi}{4} < X \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$



Slika 2.5: Funkcija gustoće slučajne varijable iz primjera 2.8.

Iz definicije funkcije f očito je da se radi o nenegativnoj funkciji:

- *na intervalu* $\langle 0, \pi/2]$ *jest* $f(x) = \sin x$, *a funkcija je sinus na tom intervalu pozitivna,*
- *na* $\langle -\infty, 0] \cup \langle \pi/2, \infty\rangle$ *je* $f(x) = 0$.

Pokažimo da je funkcija f *normirana:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1.$$

Budući da je funkcija f *nenegativna i normirana, zaključujemo da može poslužiti kao funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable.*

Traženu vjerojatnost računamo na sljedeći način:

$$P\left\{\frac{\pi}{4} < X \leq \frac{\pi}{2}\right\} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.3 Funkcija distribucije slučajne varijable

Diskretna i neprekidna slučajna varijabla samo su dva tipa slučajnih varijabli koje se najčešće koriste u praksi. Općenito, **ako je dan bilo kakav vjerojatnosni prostor** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$**, svaku funkciju** X **definiranu na** Ω **sa skupom vrijednosti iz** $\mathbb{R}$ **koja zadovoljava svojstvo**

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

zovemo slučajna varijabla na Ω**.** Vjerojatnosna svojstva za sve slučajne varijable opisana su tzv. **funkcijom distribucije** o kojoj će biti riječi u ovom poglavlju.

Definicija 2.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i neka je* X *slučajna varijabla. Funkciju* $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *koja realnom broju* x *pridružuje vjerojatnost da dana slučajna varijabla bude manja ili jednaka tom broju, tj. funkciju*

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\},$$

zovemo **funkcija distribucije slučajne varijable X**.

Svojstva funkcije distribucije:

1. Funkcija distribucije slučajne varijable monotono je rastuća funkcija, tj.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2).$$

Dokaz. *Ako je* $x_1 < x_2$, *tada je* $\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\}$. *Primjenom svojstva monotonosti vjerojatnosti na prethodnu činjenicu slijedi tvrdnja.*

2. Neka je F funkcija distribucije neke slučajne varijable. Tada vrijedi:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0.$$

Dokaz. *Neka je $(a_n, n \in \mathbb{N})$ monotono padajući niz koji divergira u $-\infty$. Tada vrijedi:*

$$\lim_{n \to \infty} F(a_n) = \lim_{n \to \infty} P\{X \leq a_n\} = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq a_n\}\right) = P(\emptyset) = 0.$$

Odavde lako slijedi tvrdnja.

3. Neka je F funkcija distribucije neke slučajne varijable. Tada vrijedi:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1.$$

Dokaz. *Slično dokazu prethodne tvrdnje.*

4. Funkcija distribucije neprekidna je zdesna, tj.

$$\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0).$$

Dokaz. *Neka je $x \in \mathbb{R}$ i $(h_n, n \in \mathbb{N})$ monotono padajući niz brojeva takvih da je $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$. Tada vrijedi:*

$$F(x + h_n) - F(x) = P\{x < X \leq x + h_n\},$$

$$\lim_{n \to \infty} (F(x + h_n) - F(x)) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x < X \leq x + h_n\}\right) = P(\emptyset) = 0.$$

Napomenimo da se može dogoditi da je

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) \neq F(x_0),$$

tj. funkcija distribucije ne mora nužno biti neprekidna i slijeva, no limes slijeva uvijek postoji i stoga uvodimo sljedeću oznaku:

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F\left(x_0 -\right).$$

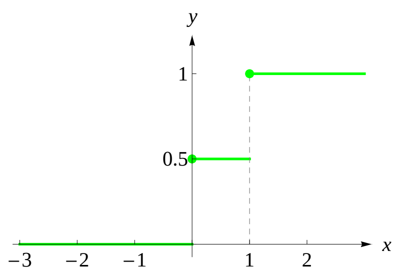
Primjer 2.9. *Neka je dana diskretna slučajna varijabla X kojom modeliramo bacanje pravilno izrađenog novčića. Ako označimo "uspjeh" (npr. palo je "pismo") brojem 1, a "neuspjeh" brojem 0, tablica distribucije ove slučajne varijable jest*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Funkcija distribucije ima vrijednost 0 za sve x koji su manji od 0. U broju 0 prima vrijednost $\frac{1}{2}$ i ostaje na toj vrijednosti sve do broja 1 kada prima vrijednost 1, tj.

$$F(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0 \ , \ x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ \frac{1}{2} \ , \ x \in [0,1\rangle \\ 1 \ , \ x \in [1,\infty\rangle \end{cases} .$$

Graf funkcije distribucije te slučajne varijable prikazan je na slici 2.9. Uočimo da navedena funkcija distribucije nije neprekidna slijeva.



Slika 2.6: Funkcija distribucije za slučajnu varijablu kojom modeliramo bacanje pravilno izrađenog novčića.

Koristeći funkciju distribucije i svojstva vjerojatnosti možemo lako računati vjerojatnost da slučajna varijabla primi vrijednost iz nekog skupa A, gdje je skup A neki interval, prebrojiva unija ili presjek intervala, njihova razlika i slično. Primjerice, za $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a < b$ vrijedi:

$$\begin{aligned} P\{a < X \le b\} &= P\{X \le b\} - P\{X \le a\} = F(b) - F(a), \\ P\{X = a\} &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{a - \tfrac{1}{n} < X \le a\}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}(F(a) - F(a - \tfrac{1}{n})) = \\ &= F(a) - F(a-), \\ P\{a \le X \le b\} &= P\{X = a\} + P\{a < X \le b\} = \\ &= F(b) - \lim_{n\to\infty} F(a - \tfrac{1}{n}) = \\ &= F(b) - F(a-) \end{aligned}$$

i slično.

Specijalno, ako je slučajna varijabla diskretna, funkcija distribucije može se izraziti koristeći tablicu distribucije slučajne varijable, a ako je neprekidna, koristeći pripadnu funkciju gustoće.

2.3.1 Funkcija distribucije diskretne slučajne varijable

Neka je dana diskretna slučajna varijabla

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix},$$

tj. $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, je dani skup vrijednosti slučajne varijable X, a $(p_i, i \in I)$ niz pripadnih vjerojatnosti za koji vrijedi

$$p_i = P\{X = x_i\} \geq 0, \quad \forall i \in I, \qquad \sum_{i \in I} p_i = 1.$$

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Uočimo da je takva funkcija distribucije stepenasta funkcija, tj. funkcija sa skokovima u točkama x_i, dok na intervalu $[x_i, x_{i+1})$ prima stalno istu vrijednost koja je jednaka $F(x_i)$ (vidi npr. sliku 2.6).

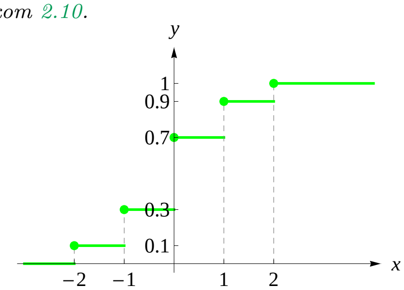
Primjer 2.10. *Neka je diskretna slučajna varijabla zadana sljedećom tablicom distribucije:*

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Prema definiciji funkcije distribucije slijedi da je funkcija distribucije slučajne varijable X definirana izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -2) \\ 0.1 & , x \in [-2, -1) \\ 0.3 & , x \in [-1, 0) \\ 0.7 & , x \in [0, 1) \\ 0.9 & , x \in [1, 2) \\ 1 & , x \in [2, \infty) \end{cases}.$$

Njezin graf prikazan je slikom 2.10.



Slika 2.7: Graf funkcije distribucije diskretne slučajne varijable X iz primjera 2.10.

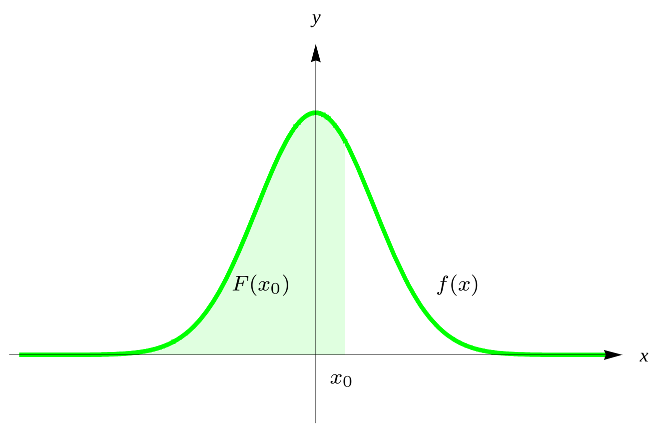
2.3.2 Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable

Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Dakle, $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ i

$$P\{X \leq x\} = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Odavde direktno slijedi da vrijednost funkcije distribucije slučajne varijable X za proizvoljan realan broj x_0 određujemo na sljedeći način (slika 2.8):

$$F(x_0) = P\{X \leq x_0\} = \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(t)\,dt, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$



Slika 2.8: Funkcija gustoće i vrijednost funkcije distribucije u x_0 (osjenčana površina) neprekidne slučajne varijable.

Iz dobro poznatih svojstava integrala očigledno je da je, za razliku od diskretnog slučaja, funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable neprekidna funkcija u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$. Također, funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X može se dobiti kao derivacija pripadne funkcije distribucije u gotovo svakoj točki $x \in \mathbb{R}$, tj. $f(x) = F'(x)$.

Odavde slijedi i sljedeće važno svojstvo za neprekidne slučajne varijable.

Neka je X neprekidna slučajna varijabla. Tada za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$P\{X = x_0\} = 0.$$

Dokaz. *Zbog neprekidnosti funkcije distribucije vrijedi:*

$$P\{X = x_0\} = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_0 - \frac{1}{n} < X \le x_0\}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(F(x_0) - F\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)\right) = 0.$$

Primjer 2.11. *Odredimo funkciju distribucije neprekidne slučajne varijable s funkcijom gustoće definiranom sljedećim izrazom:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \ , \ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}] \\ \ \ 0 \ \ \ \ , \ x \notin \langle 0, \frac{\pi}{2}] \end{cases} . \tag{2.2}$$

Ako je $x \in \langle -\infty, 0]$, tada je

$$F(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0.$$

Za $x \in \langle 0, \pi/2]$ je

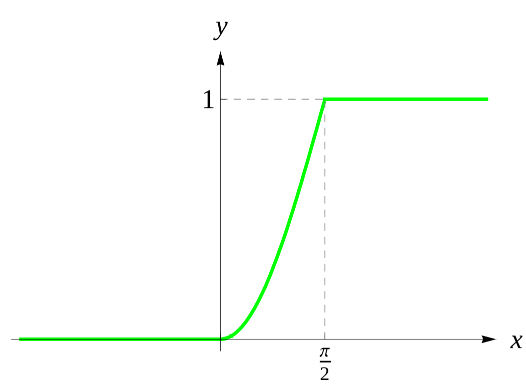
$$F(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \sin x dx = 1 - \cos x.$$

Za $x > \pi/2$ je očigledno $F(x) = F(\pi/2) = 1$.

Dakle, funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable X definirana je izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in \langle -\infty, 0] \\ 1 - \cos x & , \ x \in \langle 0, \pi/2] \\ 1 & , \ x \in \langle \pi/2, \infty) \end{cases}$$

Graf te funkcije distribucije prikazan je na slici 2.11. Uočimo da je funkcija F neprekidna.



Slika 2.9: Graf funkcije distribucije neprekidne slučajne varijable X s gustoćom (2.2).

Intuitivno značenje naziva "gustoća slučajne varijable" za neprekidne slučajne varijable može se prepoznati iz činjenice da je funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable zapravo derivacija funkcije distribucije. Naime, iz definicije derivacije slijedi:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

Dakle, $f(x)$ je granična vrijednost po duljini intervala, kvocijenta vjerojatnosti da se X nađe u intervalu $\langle x, x + \Delta x]$ i duljine intervala, što intuitivno odgovara pojmu gustoće vjerojatnosti.

2.4 Primjeri parametarski zadanih diskretnih distribucija

Neki tipovi tablica distribucije diskretnih slučajnih varijabli koji se često koriste u praksi daju se jednostavno opisati koristeći jedan ili nekoliko realnih brojeva (parametara). Za takve distribucije kažemo da se mogu zadati parametarski i svrstavamo ih u parametarske familije distribucija s prepoznatljivim imenima i svojstvima. U ovom poglavlju definirat ćemo nekoliko takvih familija.

2.4.1 Diskretna uniformna distribucija

Za slučajnu varijablu X kažemo da ima diskretnu uniformnu distribuciju ako je njezin skup svih mogućih vrijednosti konačan podskup skupa realnih brojava, tj. $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, a pripadni je niz vjerojatnosti definiran kao

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

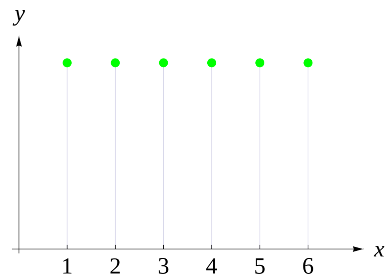
Takve distribucije koriste se ako slučajna varijabla X može primiti samo vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i to tako da je vjerojatnost realizacije svakog pojedinog ishoda ista, tj. $P\{X = x_i\} = 1/n$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Uočimo da je na taj način dobro definirana tablica distribucije s obzirom da je $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Također, pripadni niz vjerojatnosti ovisi samo o broju elemenata skupa $\mathcal{R}(X)$, tj. o broju n.

Primjer 2.12 (Bacanje igraće kockice.). *Neka slučajna varijabla X daje broj koji se okrenuo pri bacanju pravilno izrađene igraće kockice. Tada ona ima diskretnu uniformnu distribuciju zadanu tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Graf distribucije bacanja igraće kockice prikazan je slikom 2.10.



Slika 2.10: Graf distribucije bacanja igraće kockice.

Primjer 2.13. *Pretpostavimo da na ispitu na slučajan način biramo jedno od m ponuđenih pitanja. Rezultate tog slučajnog pokusa možemo opisati diskretnom uniformnom slučajnom varijablom X s tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m-1 & m \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Bernoullijeva distribucija

Neka je X slučajna varijabla koja može primiti točno dvije vrijednosti, i to $\mathcal{R}(X) = \{0, 1\}$. Njezina distribucija dana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \; p \in \langle 0, 1 \rangle, \; q = 1 - p.$$

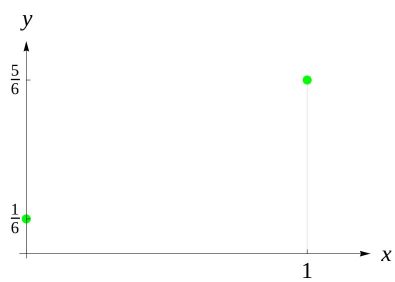
Za takvu slučajnu varijablu reći ćemo da ima Bernoullijevu distribuciju s parametrom p, pri čemu parametar p ima značenje vjerojatnosti da X primi vrijednost 1.

Bernoullijev tip distribucije koristi se pri modeliranju slučajnih karakteristika koje mogu imati točno dvije vrijednosti. Te moguće vrijednosti uglavnom zovemo "uspjeh" i "neuspjeh" te koristimo oznake 1 za "uspjeh", a 0 za "neuspjeh". Dakle, parametar p Bernoulijeve distribucije ima značenje vjerojatnosti pojavljivanja "uspjeha".

Primjer 2.14. *Igramo kockarsku igru u kojoj ostvarujemo dobitak ako se na pravilno izrađenoj igraćoj kocki okrene šestica (što interpretiramo kao uspjeh i označavamo 1). Ishod te igre modeliramo Bernoullijevom slučajnom varijablom X s tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Graf distribucije prikazan je slikom 2.11.



Slika 2.11: Graf Bernoullijeve distribucije iz primjera 2.14.

Primjer 2.15. *Izvlačimo jedan proizvod iz velike pošiljke u kojoj je 2% neispravnih. Ako nas zanima je li izvučen ispravan ili neispravan proizvod, rezultat izvlačenja možemo modelirati Bernoullijevom slučajnom varijablom X. Neka je 1 oznaka dobrog proizvoda. Tada je X zadana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix}.$$

2.4.3 Binomna distribucija

Binomna distribucija vezana je uz nezavisno ponavljanje uvijek istog pokusa. Ako nas pri svakom izvođenju pokusa zanima samo je li se dogodio neki događaj (uspjeh!) ili ne (neuspjeh!), onda svako izvođenje pokusa možemo modelirati istom Bernoullijevom distribucijom

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},\ p \in \langle 0, 1\rangle,\ q = 1 - p,$$

gdje p predstavlja vjerojatnost uspjeha.

Pretpostavimo da pokus ponavljamo nezavisno n puta i pri tome nas zanima broj uspjeha. Za slučajnu varijablu X koja opisuje broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja slučajnog pokusa modeliranog Bernoullijevog slučajnom varijablom Y kažemo da ima binomnu distribuciju s parametrima n i p.

Primjer 2.16. *Stroj proizvodi CD-ove. Vjerojatnost da bude proizveden neispravan CD je p. Zanima nas broj neispravnih CD-ova ako s beskonačne trake uzimamo njih 100. Slučajna varijabla kojom modeliramo broj neispravnih CD-ova među 100 odabranih jest binomna slučajna varijabla X parametrima $n = 100$ i p, a zadana je sljedećom tablicom distribucije:*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 100 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{100} \end{pmatrix},$$

gdje je:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \binom{100}{i} p^i (1-p)^{100-i},\ i \in \{0, 1, \ldots, 100\}.$$

Definirajmo slučajnu varijablu s binomnom distribucijom.

Definicija 2.4. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *i* $p \in \langle 0,1 \rangle$. *Za slučajnu varijablu koja prima vrijednosti iz skupa* $\{0,1,2,...,n\}$ *s vjerojatnostima*

$$p_i = P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

kažemo da ima **binomnu distribuciju s parametrima** n **i** p *i pišemo:* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Značenje parametara u $X \sim \mathcal{B}(n,p)$:

p je vjerojatnost uspjeha u jednom izvođenju pokusa,

n je broj nezavisnih ponavljanja pokusa.

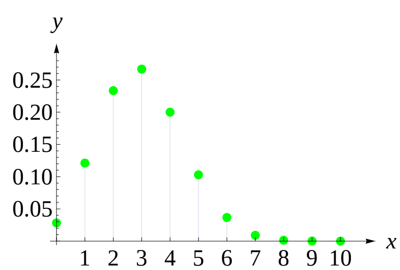
Provjerimo je li na taj način dobro definirana distribucija, tj. je li $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$. Vrijedi:

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = (p+q)^n = 1.$$

Primjer 2.17. *Pretpostavimo da iz velikog skladišta slatkiša (u kojemu se nalaze čokolade, bomboni, keksi, ...) 10 puta nezavisno izvlačimo po jedan slatkiš. Ako je vjerojatnost da u jednom izvlačenju izvučemo čokoladu* $p = 0.3$, *tada slučajna varijabla koja opisuje broj izvučenih čokolada u 10 nezavisnih izvlačenja ima binomnu distribuciju s parametrima* $n = 10$ *i* $p = 0.3$, *tj.* $X \sim \mathcal{B}(10, 0.3)$. *Tablica distribucije slučajne varijable* X *jest*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 10 \\ 0.7^{10} & \binom{10}{1} \cdot 0.3 \cdot 0.7^9 & \binom{10}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^8 & \dots & 0.3^{10} \end{pmatrix}.$$

Graf ove distribucije prikazan je slikom 2.12.



Slika 2.12: Graf binomne distribucija iz primjera 2.17.

Sada lako možemo odrediti sljedeće vjerojatnosti:

a) vjerojatnost da smo čokoladu izvukli točno 5 *puta:*

$$P\{X = 5\} = \binom{10}{5} 0.3^5 (1 - 0.3)^5 \approx 0.103,$$

b) vjerojatnost da smo čokoladu izvukli manje od 3 puta:

$$P\{X < 3\} = P\{X \leq 2\} = \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} 0.3^k (1 - 0.3)^{10-k} \approx 0.383,$$

c) vjerojatnost da smo čokoladu izvukli barem 2 *puta:*

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X < 2\} = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{10}{k} 0.3^k (1 - 0.3)^{10-k} \approx 0.851.$$

2.4.4 Poissonova distribucija

Poissonova distribucija, slično kao i binomna, može se primijeniti kao distribucija slučajne varijable koja broji uspjehe, ali ne pri nezavisnom ponavljanju pokusa konačno mnogo puta, nego u jediničnom vremenskom intervalu ili intervalu volumena, mase, itd. ako pokus zadovoljava sljedeće uvjete:

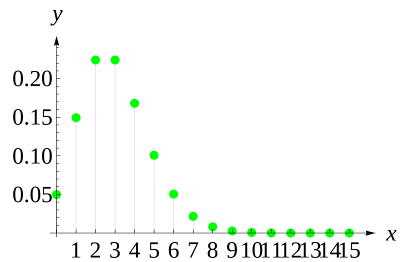
- vjerojatnost da se pojavi uspjeh ne ovisi o tome u kojem će se jediničnom intervalu dogoditi,
- broj uspjeha u jednom intervalu neovisan je o broju uspjeha u nekom drugom intervalu,
- očekivani broj uspjeha isti je za sve jedinične intervale i dan je pozitivnim realnim brojem λ.

Definicija 2.5. *Slučajna varijabla X ima* **Poissonovu distribuciju s parametrom** $\lambda > 0$ *ako prima vrijednosti iz skupa* $\{0, 1, 2, \dots\}$ *s vjerojatnostima*

$$p_i = P\{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}.$$

Tada pišemo $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Histogram distribucije Poissonove slučajne varijable s parametrom 3 za skup realizacija $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$ prikazan je slikom 2.13.



Slika 2.13: Graf Poissonove distribucija s parametrom 3 za skup realizacija $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$.

Provjerimo je li na taj način dobro definirana distribucija, tj. je li $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Vrijedi:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Primjer 2.18. *Pretpostavimo da neki kafić u toku jednog sata u prosjeku posjeti* 15 *ljudi. Slučajna varijabla koja broji posjetitelje kafića tijekom jednog sata jest Poissonova slučajna varijabla s parametrom* $\lambda = 15$*, tj.* $X \sim \mathcal{P}(15)$*. Ona prima vrijednosti iz skupa* $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, \ldots\}$ *s vjerojatnostima*

$$p_i = \frac{15^i}{i!}\, e^{-15}, \quad i \in \mathcal{R}(X).$$

Na temelju navedenih informacija možemo odrediti sljedeće vjerojatnosti:

a) vjerojatnost da je kafić u toku jednog sata posjetilo točno 20 *ljudi:*

$$P\{X = 20\} = \frac{15^{20}}{20!}\, e^{-15} \approx 0.042,$$

b) vjerojatnost da je kafić u toku jednog sata posjetilo manje od 15 *ljudi:*

$$P\{X < 15\} = P\{X \leq 14\} = \sum_{i=0}^{14} \frac{15^i}{i!}\, e^{-15} \approx 0.466,$$

c) vjerojatnost da je kafić u toku jednog sata posjetilo više od 10 *ljudi:*

$$P\{X > 10\} = 1 - P\{X \leq 10\} = 1 - \sum_{i=0}^{10} \frac{15^i}{i!}\, e^{-15} \approx 0.882.$$

Poissonova distribucija može se dobiti i kao aproksimacija binomne ako je parametar n binomne distribucije jako velik, a vjerojatnost p realizacije uspjeha mala. Ilustracija te tvrdnje dana je primjerom 2.19.

Primjer 2.19. *Telefonska centrala u vremenskom periodu u trajanju od pola sata prima* 600 *poziva uglavnom ravnomjerno raspoređenih u spomenutom vremenu (tj. u prosjeku* 20 *u minuti). Broj poziva u prvoj minuti možemo modelirati binomnom distribucijom. Naime, vjerojatnost da se poziv dogodi u prvoj od tih* 30 *minuta jest* $p = 1/30$ *(jer su pozivi uglavnom jedoliko raspoređeni u vremenu). Međutim, broj je poziva u minuti slučajna varijabla pa, iako je prosječan broj poziva* *u minuti 20, u modelu moramo pretpostaviti da se u prvoj minuti može dogoditi od 0 do 600 poziva. Dakle, $n = 600$ za tu binomnu slučajnu varijablu. Uočimo da prosječan broj poziva po minuti iznosi np.*

Problem je s binomnom distribucijom u navedenom primjeru prvenstveno taj da moramo pretpostaviti maksimalan broj poziva u minuti, što u modelu telefonske centrale nije razumno. Međutim, tu je $n = 600$ velik, a $p = 1/30$ malen, pa vjerojatnosti zadane po binomnoj distribuciji možemo dobro aproksimirati vjerojatnostima po Poissonovoj distribuciji s parametrom koji odgovara prosječnom broju poziva po minuti, tj. $\lambda = np = 20$.

Označimo $np = \lambda$ i pokažimo da se, pod pretpostavkom da je n velik prirodan broj i da $\lambda > 0$ ne ovisi o n, vjerojatnosti po binomnoj distribuciji mogu dobro aproksimirati vjerojatnostima po Poissonovoj. Zaista, za binomnu slučajnu varijablu $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, te za $i \in \{0,\dots,n\}$ jest

$$p_i(n) = P\{X_n = i\} = \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!} p^i(1-p)^{n-i}.$$

Stavimo li $\lambda = np$, tj. $p = \lambda/n$, slijedi:

$$\begin{aligned} p_i(n) &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} = \\ &= \frac{1}{i!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\lambda^i\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-i}. \end{aligned}$$

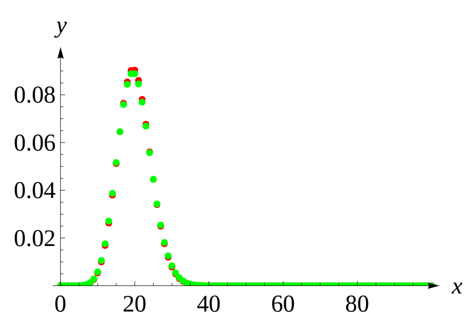
Da bismo odredili približnu vrijednost $p_i(n)$ za velike n, uočimo da vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} p_i(n) = \frac{1}{i!}\lambda^i e^{-\lambda}.$$

Dakle, za velike n jest

$$p_i(n) \approx \frac{1}{i!}\lambda^i e^{-\lambda}.$$

Slikom 2.14 prikazan je graf binomne distribucije s parametrima $p = 30$ i $n = 600$ i Poissonove s parametrom $\lambda = 20$ koji ilustrira kvalitetu aproksimacije.



Slika 2.14: Graf binomne ($\mathcal{B}(600, \frac{1}{30})$, crvene točkice) i Poissonove ($\mathcal{P}(20)$, zelene točkice) distribucije za $i = 0,\dots,100$.

2.4.5 Geometrijska distribucija

Geometrijska distribucija također je vezana uz nezavisno ponavljanje istog pokusa s ishodima "uspjeh" i "neuspjeh" kao i binomna. Međutim, ona se ne koristi za opisivanje broja uspjeha već za opisivanje broja ponavljanja pokusa do prvog uspjeha. Preciznije govoreći, neka je vjerojatnost pojavljivanja događaja A u svakom od nezavisnih ponavljanja istog pokusa $p \in \langle 0, 1\rangle$. Geometrijskom distribucijom opisana je slučajna varijabla koja daje broj potrebnih pokusa da bi se realizirao taj događaj. Budući da je, pod tim pretpostavkama, vjerojatnost pojavljivanja događaja A u k-tom pokusu

$$P\{X = k\} = P\left(\underbrace{A^c \bigcap A^c \bigcap \cdots \bigcap A^c}_{(k-1)\ puta} \bigcap A\right) = (1-p)^{k-1}p,$$

geometrijsku distribuciju možemo definirati na slijedeći način.

Definicija 2.6. *Slučajna varijabla X ima* **geometrijsku distribuciju s parametrom** $p \in \langle 0, 1\rangle$ *ako prima vrijednosti iz skupa* $\{1, 2, 3, \dots\}$ *s vjerojatnostima*

$$p_k = P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}.$$

Pokažimo da je na taj način dobro definirana distribucija, tj. da je $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Koristeći formulu za sumu geometrijskog reda slijedi:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

Primjer 2.20. *Tipkovnica na prijenosnom računalu nekog proizvođača sastoji se od 86 tipki. Pretpostavimo da zatvorenih očiju trebamo pritisnuti tipku za slovo A. Budući da je vjerojatnost pogotka bilo koje tipke jednaka 1/86 (pretpostavimo da pri svakom pokušaju pogodimo neku tipku, tj. da nikada ne promašimo tipkovnicu), zaključujemo da slučajna varijabla koja opisuje broj pritisnutih tipki do pogađanja tipke za slovo A ima geometrijsku distribuciju s parametrom* $p = 1/86$. *Tako definirana slučajna varijabla prima vrijednosti iz skupa* $\mathcal{R}(X) = \{1, 2, \dots\}$ *s vjerojatnostima*

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{1}{86}\left(1 - \frac{1}{86}\right)^{k-1}.$$

Sada možemo izračunati sljedeće i slične vjerojatnosti:

a) *vjerojatnost da je tipka za slovo A stisnuta u petnaestom pokušaju:*

$$P\{X = 15\} = \frac{1}{86}\left(1 - \frac{1}{86}\right)^{14} \approx 0.009,$$

b) *vjerojatnost da je tipka za slovo A stisnuta u manje od 5 pokušaja:*

$$P\{X < 5\} = P\{X \le 4\} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{86}\left(1 - \frac{1}{86}\right)^{k-1} \approx 0.046,$$

c) *vjerojatnost da niti nakon* 20 *pokušaja još nismo uspjeli stisnuti tipku za slovo* A*:*

$$P\{X > 20\} = 1 - P\{X \le 20\} = 1 - \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{86}\left(1 - \frac{1}{86}\right)^{k-1} \approx 0.791.$$

2.4.6 Hipergeometrijska distribucija

Neka je skup iz kojeg vršimo odabir elemenata konačan i neka se sastoji od točno N elemenata od kojih je M tipa 1, a $(N - M)$ tipa 2. Pretpostavimo da smo na slučajan način iz tog skupa odabrali $n < N$ elemenata, i to bez vraćanja prethodno izvučenih elemenata u skup. Tada broj izvučenih elemenata tipa 1 modeliramo **hipergeometrijskom distribucijom** s parametrima N, M i n.

Definicija 2.7. *Diskretna slučajna varijabla* X *ima* **hipergeometrijsku distribuciju** *s parametrima* N*,* M *i* n*,* $N, M, n \in \mathbb{N}$*, ako prima vrijednosti iz skupa* $\mathcal{R}(X) = \{k \in \mathbb{N} : \max(0, n - N + M) \le k \le \min(n, M)\}$ *s vjerojatnostima*

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Pokažimo da je na taj način dobro definirana distribucija, tj. da je $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$. Primjenom Vandermondeove konvolucije slijedi:

$$\sum_{k=0}^{n} p_i = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} = \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1.$$

Primjer 2.21. *Na polici se nalazi* 10 *knjiga od kojih su* 4 *kriminalistički romani. Na slučajan način biramo* 5 *knjiga. Slučajna varijabla* X *koja modelira broj kriminalističkih romana od* 5 *odabranih knjiga ima hipergeometrijsku distribuciju s parametrima* $N = 10$*,* $M = 4$ *i* $n = 4$*. Slika slučajne varijable* X *jest skup* $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$*. Na temelju poznatih informacija možemo izračunati sljedeće i slične vjerojatnosti:*

a) *vjerojatnost da su odabrana točno* 3 *kriminalištička romana:*

$$P\{X = 3\} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{10-4}{5-3}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{21},$$

b) *vjerojatnost da su odabrana najviše* 3 *kriminalištička romana:*

$$P\{X \le 3\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = \frac{41}{42},$$

c) vjerojatnost da su odabrana najmanje 3 kriminalistička romana:

$$P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X < 3\} = 1 - (P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\}) = \frac{11}{42}.$$

Neka je X hipergeometrijska slučajna varijabla s parametrima N, M i n. Ako $N \to \infty$ i $M \to \infty$ tako da $M/N \to p$, gdje je p pozitivna konstanta, tada

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Navedena tvrdnja daje aproksimaciju hipergeometrijske distribucije binomnom distribucijom u slučaju kad je n malen u odnosu na N i M, a intuitivno se može opravdati time da se odabir n elemenata iz N-članog skupa bez vraćanja prethodno izvučenih elemenata (hipergeometrijska distribucija) može za velik N "aproksimirati" odabirom n elemenata s vraćanjem izvučenih elemenata u skup (binomna distribucija).

2.5 Primjeri parametarski zadanih neprekidnih distribucija

Slično kao u diskretnom slučaju, i među neprekidnim slučajnim varijablama postoje parametarski zadane familije slučajnih varijabli koje se često koriste. Ovdje ćemo uvesti samo četiri takve familije. Još neke od njih, koje ćemo koristiti u statistici, definirat ćemo naknadno.

2.5.1 Uniformna distribucija na intervalu $\langle a, b\rangle$

Neprekidna uniformna distribucija veže se uz pokuse za koje je poznato da mogu primiti vrijednost iz ograničenog intervala $\langle a, b\rangle$, ali pritom nema razloga preferirati neko područje, tj. vjerojatnost realizacije intervala $\langle x_1, x_2\rangle$ ovisit će samo o njegovoj duljini sve dok je sadržan u $\langle a, b\rangle$.

Definicija 2.8. *Za neprekidnu slučajnu varijablu X kažemo da ima* **uniformnu distribuciju na intervalu** $\langle a, b\rangle$, *$a < b$, ako joj je funkcija gustoće vjerojatnosti dana izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , x \in \langle a, b\rangle \\ 0 & , x \notin \langle a, b\rangle \end{cases}.$$

S obzirom da za svaku neprekidnu slučajnu varijablu X vrijedi $P\{X = x_0\} = 0$, vidimo da u vjerojatnosnom smislu ne treba praviti bitnom razliku između uniformne distribucije na $\langle a, b\rangle$ i uniformne distribucije na $[a, b]$, odnosno na nekom od intervala $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$.

Funkcija distribucije uniformne slučajne varijable na $\langle a, b\rangle$ definirana je pravilom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \langle -\infty, a\rangle \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , x \in [a, b\rangle \\ 1 & , x \in [b, \infty\rangle \end{cases} .$$

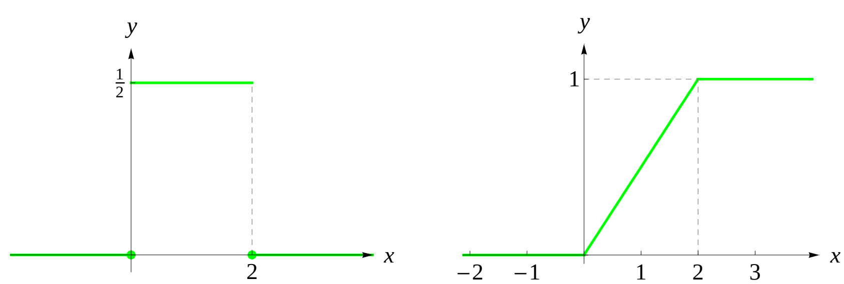
Primjer 2.22. *Pretpostavimo da imamo posudu u koju stane najviše 2 litre vode te da smo iz slavine u nju slučajno natočili nepoznatu količinu vode. Slučajna varijabla kojom opisujemo količinu vode natočenu u posudu može se modelirati kao uniformna slučajna varijabla na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Prema tome, njezina funkcija gustoće dana je izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in \langle 0, 2\rangle \\ 0 & , x \notin \langle 0, 2\rangle \end{cases} ,$$

a funkcija distribucije izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \langle -\infty, 0] \\ \frac{x}{2} & , x \in \langle 0, 2\rangle \\ 1 & , x \in [2, \infty\rangle \end{cases} .$$

Grafički prikazi funkcije gustoće i funkcije distribucije dani su slikom 2.15.



Slika 2.15: Graf funkcije gustoće i funkcije distribucije uniformne distribucije na intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

Npr. vjerojatnost da smo na slučajan način iz slavine u posudu natočili više od pola litre, ali najviše jednu litru vode, računamo na sljedeći način:

$$P\{0.5 < X \leq 1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X \leq 0.5\} = \frac{1}{2}\int_{0.5}^{1} dx = \frac{1}{4}.$$

2.5.2 Eksponencijalna distribucija

Eksponencijalna distribucija često se javlja kod slučajnih varijabli koje imaju značenje vremena čekanja do pojave nekog događaja ako se karakteristike ne mijenjaju tijekom vremena, npr. vrijeme do kvara (tj. vrijeme trajanja) jedne žarulje, vrijeme do pojave neke nesreće, itd.

Naime, analizirajmo slučajnu varijablu X koja modelira vrijeme potrebno do pojave danog događaja pod sljedećom pretpostavkom: *uvjetna vjerojatnost pojavljivanja događaja u nekom kratkom intervalu $\langle t, t+\Delta t\rangle$, uz uvjet da se nije dogodio prije t, proporcionalna je duljini tog intervala i ne ovisi o t, tj.*

$$P\left(\{X \leq t+\Delta t\}|\{X>t\}\right) = \lambda\Delta t, \quad \lambda > 0.$$

Vjerojatnost da je vrijeme do pojave događaja veća od $t+\Delta t$ jest

$$P\{X > t+\Delta t\} = P\left(\{X > t+\Delta t\}|\{X>t\}\right) P\{X>t\}.$$

Međutim, pod tom je pretpostavkom

$$P\left(\{X > t+\Delta t\}|\{X>t\}\right) = 1 - P\left(\{X \leq t+\Delta t\}|\{X>t\}\right) = 1-\lambda\Delta t,$$

pa vrijedi

$$P\{X > t+\Delta t\} = (1-\lambda\Delta t)P\{X>t\}.$$

Označimo funkciju $S(t) = P\{X>t\}$. Ta funkcija, za male Δt, treba zadovoljavati svojstvo

$$S(t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)S(t),$$

tj.

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = -\lambda S(t),$$

što u limesu, za $\Delta t \to 0$, znači da mora zadovoljavati diferencijalnu jednadžbu

$$S'(t) = -\lambda S(t).$$

Rješenje te diferencijalne jednadžbe jest $S(t) = Ce^{-\lambda t}$, a konstantu možemo odrediti iz prirodnog uvjeta $S(0) = P\{X>0\} = 1$. Dakle,

$$S(t) = P\{X>t\} = e^{-\lambda t},$$

što znači da funkcija distribucije slučajne varijable X ima oblik

$$F(t) = 1 - P\{X>t\} = 1-e^{-\lambda t}.$$

To je upravo funkcija distribucije slučajne varijable koju zovemo eksponencijalna s parametrom $\lambda > 0$.

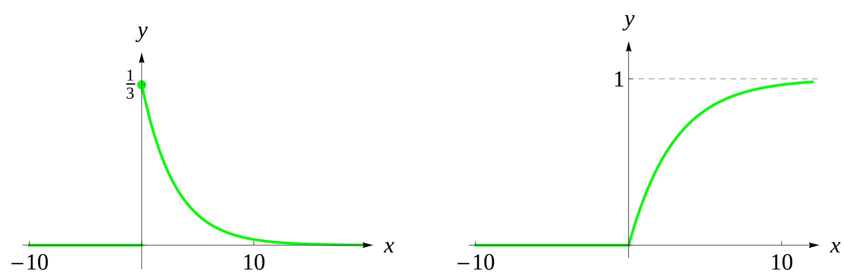
Definicija 2.9. *Neprekidna slučajna varijabla X ima* **eksponencijalnu distribuciju** *s parametrom $\lambda > 0$ ako je funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}.$$

Funkcija distribucije te slučajne varijable dana je izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}.$$

Primjer 2.23. *Vrijeme u sekundama koje protekne od servisa do prvog udara teniske loptice u tlo modelirano je eksponencijalnom slučajnom varijablom s parametrom $\lambda = 1/3$. Grafovi funkcije gustoće i funkcije distribucije te slučajne varijable dani su na slici 2.16*



Slika 2.16: Graf funkcije gustoće i funkcije distribucije eksponencijalne distribucije s parametrom $\lambda = 1/3$.

Vjerojatnost da će od servisa do prvog udara teniske loptice u tlo proći više od dvije, ali najviše četiri sekunde, računamo na sljedeći način:

$$P\{2 < X \leq 4\} = P\{X \leq 4\} - P\{X \leq 2\} = \frac{1}{3}\int_2^4 e^{-x/3}\,dx \approx 0.249.$$

2.5.3 Dvostrana eksponencijalna distribucija

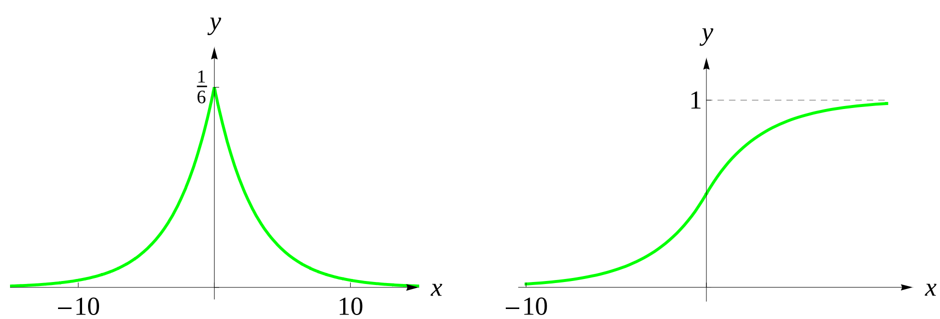
Definicija 2.10. *Neprekidna slučajna varijabla X ima* **dvostranu eksponencijalnu distribuciju** *s parametrom $\lambda > 0$ ako je funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija distribucije te slučajne varijable definirana je sljedećim izrazom:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x} & , x \leq 0 \\ & \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} & , x > 0 \end{cases} .$$

Primjer 2.24. *Grafovi funkcije gustoće i funkcije distribucije slučajne varijable X s dvostranom eksponencijalnom distribucijom s parametrom $\lambda = \frac{1}{3}$ prikazani su slikom 2.17.*



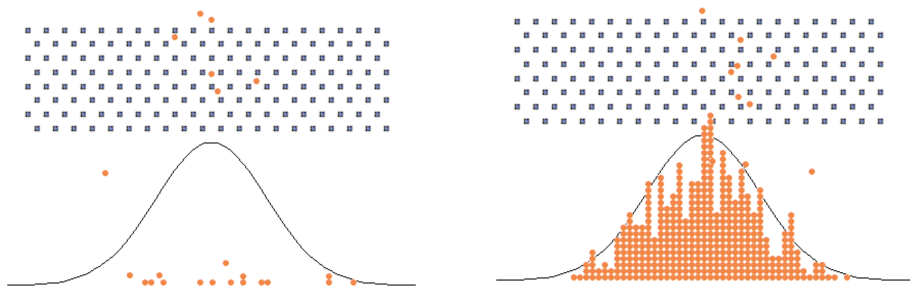
Slika 2.17: Graf funkcije gustoće i funkcije distribucije dvostrane eksponencijalne distribucije s parametrom $\lambda = 1/3$.

2.5.4 Normalna distribucija

Normalna distribucija najviše se koristi u statističkoj teoriji i primjeni. Teorija je pokazala da ona vrlo dobro opisuje pokuse čiji su ishodi posljedica sume mnogo međusobno nezavisnih i jednako distribuiranih utjecaja. Objasnimo tu činjenicu primjerom.

Primjer 2.25 (Galtonova daska[2]). *U dasku ubodemo pribadače kao što je prikazano na slici 2.18 i iz izvora pri vrhu konstrukcije pustimo da pada mnoštvo malih kuglica. U podnožju ih zaustavljamo podlogom i određujemo funkciju koja opisuje gustoću kuglica na toj podlozi. Jasno je da su kuglice mnogo puta udarile u pribadače prije negoli su pale i svaki su put promjenile smjer kretanja. Njihov pomak u stranu od mjesta s kojeg su bačene nastao je kao suma mnoštva malih jednako distribuiranih i nezavisnih pomaka uzrokovanih sudarima. Dobivena gustuća kuglica na dasci ima upravo zvonoliki oblik Gaussove krivulje koja je graf funkcije gustoće normalne distribucije.*

[2] Tim eksperimentom engleski znanstvenik Sir Francis Galton (1822-1911) demonstrirao je centralni granični teorem. Eksperiment je poznat i pod nazivima "bean machine", "quincunx" i "Galtonova kutija".



Slika 2.18: Galtonova daska.

Definicija 2.11. *Za neprekidnu slučajnu varijablu kažemo da ima* **Gaussovu** *ili* **normalnu** *distribuciju s parametrima μ i σ^2 ako je njezina funkcija gustoće dana izrazom*

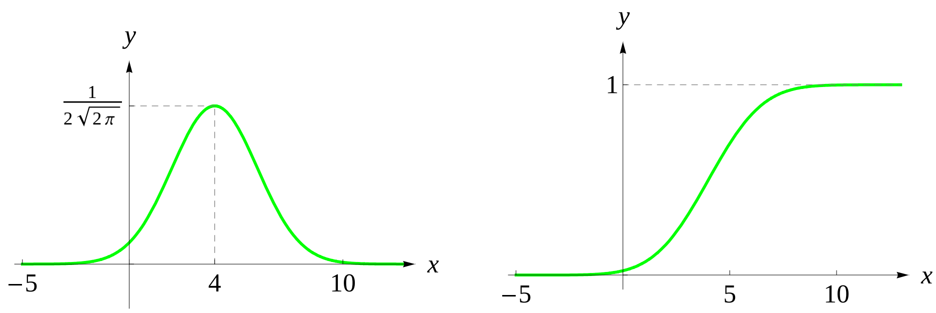
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje su μ i σ realni brojevi i $\sigma > 0$. Ako slučajna varijabla X ima normalnu distribuciju s parametrima μ i σ^2, koristimo oznaku $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Funkcija distribucije normalne slučajne varijable (slika 2.19) definirana je izrazom

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Slika 2.19 prikazuje graf funkcije gustoće i funkcije distribucije normalne distribucije s parametrima $\mu = 4$ i $\sigma^2 = 4$.

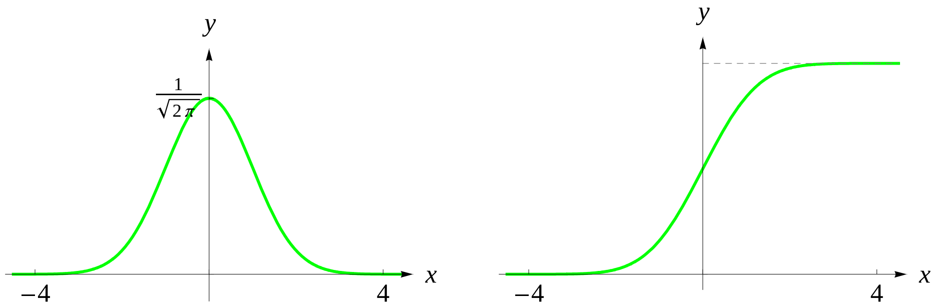


Slika 2.19: Graf funkcije gustoće i funkcije distribucije slučajne varijable $X \sim \mathcal{N}(4, 4)$.

Normalna distribucija s parametrima $\mu = 0$ i $\sigma^2 = 1$ zove se **jedinična** ili **standarna normalna distribucija**. Gustoća standardne normalne distribucije dana je izrazom

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Slika 2.20 prikazuje graf funkcije gustoće i funkcije distribucije standardne normalne distribucije.



Slika 2.20: Graf funkcije gustoće i funkcije distribucije standardne normalne distribucije.

Vrijednosti funkcije distribucije za takve slučajne varijable moraju se računati korištenjem metoda numeričkog integriranja s obzirom da se integrali uglavnom ne daju riješiti eksplicitno. U većini knjiga koje primjenjuju statistiku dane su tablice vrijednosti funkcije distribucije standardne normalne slučajne varijable koja je definirana sljedećim izrazom:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

U današnje se vrijeme za računanje vjerojatnosti po normalnoj distribuciji najčešće koriste naprednija džepna računala ili specijalizirani software na računalu.

Primjer 2.26. *Vrijeme (u satima) koje student treće godine studija matematike provede učeći u jednom danu može se opisati slučajnom varijablom X koja ima normalnu distribuciju s parametrima $\mu = 5.43$ i $\sigma = 0.7$. Korištenjem programskog paketa Mathematica i ugrađene funkcije $CDF[\ ]$ [3] slijedi:*

a) vjerojatnost da student učeći provede manje od 5 sati:

$$P\{X < 5\} = CDF[ndist, 5] \approx 0.269,$$

gdje je $ndist = NormalDistribution[5.43, 0.7]$.

[3]CDF = cumulative distribution function.

b) vjerojatnost da student učeći provede barem 3 sata:

$$P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X < 3\} = 1 - CDF[ndist, 3] \approx 0.999.$$

c) vjerojatnost da student učeći provede između 3 i 7 sati:

$$P\{3 < X < 7\} = CDF[ndist, 7] - CDF[ndist, 3] \approx 0.987.$$

2.6 Numeričke karakteristike slučajne varijable

Iz prethodnih razmatranja jasno je da za opisivanje neke jednodimenzionalne veličine, koja ima slučajan karakter kao model može poslužiti slučajna varijabla. Za njezino zadavanje potrebno je zadati distribuciju pa su tada u potpunosti određena vjerojatnosna svojstva. Distribucije mogu biti jednostavne, ali i vrlo složenog karaktera i nije uvijek jednostavno predočiti zakonitosti ponašanja slučajne karakteristike ispisivanjem njezine distribucije. Razvojem teorije vjerojatnosti postalo je jasno da je često za slučajnu varijablu moguće definirati nekoliko karakterističnih brojeva koji mogu, zbog svojih generalnih svojstava, dodatno pomoći u opisivanju slučajne varijable. Takve karakteristične brojeve zvat ćemo **numeričke karakteristike** slučajne varijable.

2.6.1 Očekivanje diskretne slučajne varijable

Osnovna je numerička karakteristika slučajne varijable matematičko očekivanje.

Definicija 2.12. *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Ako red $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\}$ apsolutno konvergira (tj. ako konvergira red $\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|P\{\omega\}$), onda kažemo da slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje i broj*

$$EX = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\}$$

zovemo **matematičko očekivanje (očekivanje)** *slučajne varijable X.*

Navedena definicija matematičkog očekivanja ne može se jednostavno primijeniti za njegovo računanje s obzirom da je dana zadavanjem slučajne varijable na temeljnom vjerojatnosnom prostoru. Za računanje je matematičkog očekivanja puno prikladnija formula koja se može dati na temelju tablice distribucije diskretne slučajne varijable, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 2.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor i*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu. Redovi $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\}$ *i* $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i$ *istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju. U slučaju apsolutne konvergencije sume su im jednake, tj. vrijedi*

$$EX = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i.$$

Dokaz. Koristeći činjenicu da familija skupova $\{\{X = x_i\}, i \in \mathbb{N}\}$ čini particiju skupa Ω (jer je s X zadana funkcija!), vidimo da se jedan red može dobiti iz drugog "preslagivanjem članova" u smislu teorije ponovljenih redova, tj.

$$\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P\{\omega\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{\{X(\omega)=x_i\}} X(\omega)P\{\omega\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{\{X(\omega)=x_i\}} x_i P\{\omega\} =$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \sum_{\{X(\omega)=x_i\}} P\{\omega\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p_i.$$

Korištenjem rezultata poglavlja 5.3 (Dodatak) zaključujemo da ti redovi istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju, a u slučaju apsolutne konvergencije sume su im jednake.

Primjer 2.27. *Neka slučajna varijabla* X *opisuje rezultate bacanja pravilno izrađene igraće kockice. Očekivanje je te slučajne varijable broj*

$$EX = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} i = \frac{21}{6}.$$

Ako je zadana slučajna varijabla X na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i funkcija $g : \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$, onda je kompozicijom $g(X)$ također dana slučajna varijabla na istom vjerojatnosnom prostoru. Npr. X^2, $2X + 3$, e^X,... su tako nastale slučajne varijable. Za računanje njihovih očekivanja (ako postoje) neće biti potrebno specificirati njihove distribucije, već se može iskoristiti distribucija slučajne varijable X. Naime, ako red $\sum_{\omega\in\Omega} g(X(\omega))P\{\omega\}$ apsolutno konvergira, onda postoji očekivanje $Eg(X)$. Međutim, uobičajenim "preslagivanjem" koristeći particiju $\{\{X = x_i\}, i \in \mathbb{N}\}$ od Ω i teoriju ponovljenih redova, vidimo da vrijedi:

$$\sum_{\omega\in\Omega} g(X(\omega))P\{\omega\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} g(x_i)p_i.$$

Time smo dokazali sljedeći koristan rezultat.

Teorem 2.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor,*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu i $g : \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$ *funkcija takva da postoji* $Eg(X)$*. Tada vrijedi:*

$$Eg(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} g(x_i) p_i.$$

Koristeći taj rezultat i definiciju očekivanja, možemo dokazati da vrijede sljedeća korisna svojstva očekivanja:

1. Neka su a i b realni brojevi, a X slučajna varijabla koja ima očekivanje. Tada i slučajna varijabla $aX + b$ ima očekivanje i vrijedi:

$$E(aX + b) = aEX + b.$$

2. Ako su X i Y dvije slučajne varijable koje imaju očekivanja i ako vrijedi $X(\omega) \leq Y(\omega)$ za sve $\omega \in \Omega$ onda je i $EX \leq EY$ (**monotonost očekivanja**).

3. Ako je X slučajna varijabla koja ima svojstvo $X(\omega) \geq 0$ i ako je red $\sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega) P\{\omega\}$ konvergentan, tada je $EX \geq 0$ (**pozitivnost očekivanja**).

Osim navedenih svojstava, očekivanje ima i svojstvo linearnosti. Naime, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.3. *Neka su* X *i* Y *dvije slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *koje imaju očekivanja* EX*, odnosno* EY*. Tada za proizvoljne* $a, b \in \mathbb{R}$*, slučajna varijabla* $aX + bY$ *također ima očekivanje i vrijedi:*

$$E(aX + bY) = aEX + bEY.$$

Dokaz. Iz apsolutne konvergencije redova $\sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega) P\{\omega\}$ i $\sum\limits_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P\{\omega\}$ slijedi apsolutna konvergencija reda $\sum\limits_{\omega \in \Omega} (aX(\omega) + bY(\omega)) P\{\omega\}$. Tvrdnja teorema slijedi iz poznatih rezultata o sumi konvergentnih redova (vidi npr. [13]).

Koristeći princip matematičke indukcije može se dokazati i generalizacija teorema 2.3 na linearnu kombinaciju konačno mnogo diskretnih slučajnih varijabli koje imaju očekivanje. Formulirajte tvrdnju i dokažite je!

Primjer 2.28. *Pretpostavimo da izvodimo slučajan pokus bacanja nepravilno izrađenog novčića kod kojega je relizacija pisma favorizirana i događa se s vjerojatnošću* 0.7 *(koristit ćemo oznaku* 1 *za realizaciju pisma i* 0 *za realizaciju glave). Tada slučajna varijabla* X *kojom modeliramo taj pokus ima Bernoullijevu distribuciju s parametrom* $p = 0.7$*, tj. zadana je tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Slučajna varijabla Y *koja opisuje broj realiziranih pisama nakon* 100 *nezavisnih bacanja toga novčića ima binomnu distribuciju s parametrima* $n = 100$ *i* $p = 0.7$*, tj.* $Y \sim \mathcal{B}(100, 0.7)$*. Kako binomnu slučajnu varijablu možemo predstaviti kao sumu* n *Bernoullijevih slučajnih varijabli, tj.*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \text{ jednako distribuirana kao } X, \quad \forall i,$$

računanje je matematičkog očekivanja od Y *znatno pojednostavljeno i svodi se na primjenu svojstva aditivnosti očekivanja:*

$$EX = \sum_{i=1}^{100} EX_i = \sum_{i=1}^{100} (0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.7) = \sum_{i=1}^{100} 0.7 = 100 \cdot 0.7 = 70.$$

Za očekivanje obično kažemo da je jedna mjera centralne tendencije slučajne varijable. Naime, ako se pitamo postoji li realan broj koji je na neki način "najbliži" slučajnoj varijabli, onda je to u jednom načinu mjerenja udaljenosti upravo očekivanje. Pritom udaljenost između slučajne varijable i broja mjerimo kao očekivano kvadratno odstupanje: $E(X-a)^2$.[4] Zaista, definiramo li funkciju $g(a) = E(X-a)^2 = EX^2 - 2aEX + a^2$ na $\mathbb{R}$, vidimo da ona postiže minimum upravo u vrijednosti $a = EX$.

Primjer 2.29. *Ilustrirajmo značenje očekivanog kvadratnog odstupanja slučajne varijable od konstante na primjerima.*

a) Neka je slučajna varijabla X *zadana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$E(X-a)^2 = (1-a)^2\frac{1}{4} + (2-a)^2\frac{1}{4} + (3-a)^2\frac{1}{4} + (4-a)^2\frac{1}{4}$$

funkcija varijable a*. Minimum ove funkcije je točno prosjek vrijednosti koje slučajna varijabla može postići, tj.* 2.5*. Uočimo da se ovdje sve vrijednosti reliziraju s istom vjerojatnošću (slika 2.21).*

b) Neka je slučajna varijabla X *zadana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

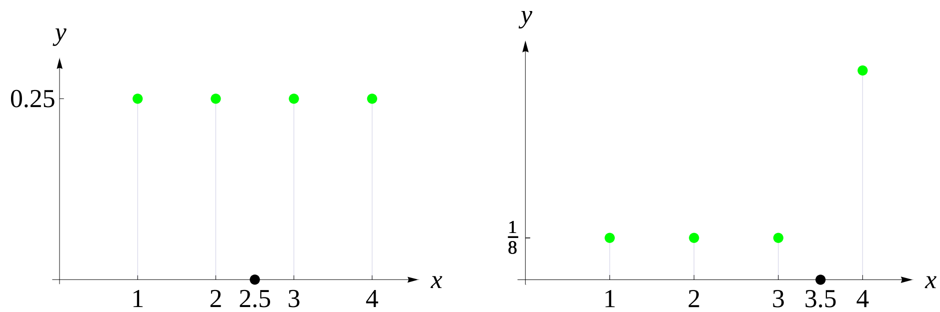
Tada

$$E(X-a)^2 = (1-a)^2\frac{1}{8} + (2-a)^2\frac{1}{8} + (3-a)^2\frac{1}{8} + (4-a)^2\frac{5}{8}$$

kao funkcija varijable a *postiže minimum koji nije jednak prosjek vrijednosti koje slučajna varijabla može primiti jer se vrijednost* 4 *realizira bitno većom vjerojatnošću nego ostale vrijednosti iz* $\mathcal{R}(X)$*. Ovdje je minimum za* $a = 3.5$*, tj. "povučen" je prema* 4 *(slika 2.21).*

---

[4] Vše o toj temi možete pogledati u [26].



Slika 2.21: Grafovi distribucija slučajnih varijabli iz primjera 2.29.

Minimalno očekivano kvadratno odstupanje slučajne varijable od konstante, koje se postiže u očekivanju, također ima svoje značenje. Zove se varijanca i tema je sljedećeg poglavlja.

2.6.2 Varijanca i ostali momenti. Važne nejednakosti

Koristeći definiciju očekivanja, za slučajnu varijablu definiramo momente i centralne momente.

Definicija 2.13. *Neka je X slučajna varijabla na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i $r > 0$.*

- *Ako postoji $E(X^r)$, onda broj $\mu_r = E(X^r)$ zovemo* **moment r-tog reda** *ili* **r-ti moment** *od X.*
- *Ako postoji $E(|X|^r)$, onda broj $E(|X|^r)$ zovemo* **apsolutni moment r-tog reda** *ili* **r-ti apsolutni moment** *od X.*
- *Ako postoji EX i $E(|X - EX|^r)$ onda broj $E(|X - EX|^r)$ zovemo* **r-ti centralni moment** *od X.*
- *Ako postoji $E(X - EX)^2$, onda taj nenegativan broj zovemo* **varijanca** *slučajne varijable X i označavamo* $\operatorname{Var} X$*, σ_X^2 ili σ^2.*

Uočimo:

- Očekivanje je slučajne varijable X njezin moment prvog reda. Očekivanje uobičajeno označavamo s μ umjesto μ_1.
- Varijanca je drugi centralni moment. Ona predstavlja očekivano kvadratno odstupanje slučajne varijable od njezinog očekivanja.

Primjer 2.30. *Neka je slučajna varijabla X zadana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} -a & a & a^2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo momente EX, EX^2, EX^3, $\operatorname{Var} X$, $E(X-E(X))^3$ te diskretne slučajne varijable:

$EX = -0.3a + 0.3a + 0.4a^2 = 0.4a^2$,

$EX^2 = 0.6a^2 + 0.4a^4 = 0.2a^2(2a^2+3)$,

$EX^3 = -0.3a^3 + 0.3a^3 + 0.4a^6 = 0.4a^6$,

$\operatorname{Var} X = E\left((X-EX)^2\right) = EX^2 - (EX)^2 = 0.24a^2(a^2+2.5)$,

$E(X-EX)^3 = E\left(X^3\right) - 3E\left(X^2\right) EX + 2\,(EX)^3 = 0.464a^6 - 0.6a^2(2a^2+3)$.

Propozicija 2.1. *Neka je $r > 0$ i $E(|X|^r)$ postoji. Tada postoji i $E(|X|^s)$ za svaki $0 < s < r$.*

Dokaz. *Za svaki realan broj x i $0 < s < r$ vrijedi nejednakost:*

$$|x|^s < 1 + |x|^r.$$

Odavde i iz monotonosti očekivanja vidimo da vrijedi:

$$|X|^s \leq 1 + |X|^r \implies E(|X|^s) \leq 1 + E(|X|^r) < \infty,$$

pa postoji očekivanje od X^s.

Kao ilustraciju mogućih interpretacija momenata navodimo tzv. Čebiševljevu nejednakost koja daje korisnu interpretaciju očekivanja i varijance svake slučajne varijable koja ima varijancu.

Propozicija 2.2 (Čebiševljeva nejednakost)**.** *Neka je X slučajna vrijabla koja ima varijancu σ^2 te neka je dan broj $k > 0$. Tada vrijedi:*

$$P\{|X-\mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2},$$

gdje je μ očekivanje slučajne varijable X.

U dokazu te propozicije iskoristit ćemo sljedeću nejednakost koja je općenito vrlo korisna u teoriji vjerojatnosti.

Teorem 2.4. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i g nenegativna funkcija definirana na $\mathcal{R}(X)$ takva da postoji $Eg(X)$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:*

$$P\{g(X) \geq \varepsilon\} \leq \frac{Eg(X)}{\varepsilon}.$$

Dokaz. *Prije svega, uočimo jednu općenito korisnu činjenicu: ako je* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ *neki skup, označimo li*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 \ , \ \omega \in A \\ 0 \ , \ \omega \notin A \end{cases},$$

I_A *je slučajna varijabla na* Ω *koju možemo iskoristiti za povezivanje vjerojatnosti skupa* A *i pojma očekivanja slučajne varijable. Naime, distribucija te slučajne varijable dana je tablicom*

$$I_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p = P\{I_A = 1\} = P\{A\}.$$

Dakle, vrijedi:

$$EI_A = P(A).$$

Korištenjem tog načina označavanja, monotonosti i linearnosti očekivanja te nenegativnosti funkcije g *vidimo da za svaki* $\varepsilon > 0$ *vrijedi:*

$$\begin{aligned} Eg(X) &= E(g(X)I_{\{g(X)\geq\varepsilon\}} + g(X)I_{\{g(X)<\varepsilon\}}) \\ &= E(g(X)I_{\{g(X)\geq\varepsilon\}}) + E(g(X)I_{\{g(X)<\varepsilon\}}) \\ &\geq E(g(X)I_{\{g(X)\geq\varepsilon\}}) \geq \varepsilon EI_{\{g(X)\geq\varepsilon\}} \\ &= \varepsilon P\{g(X) \geq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju.

Dokaz (Čebiševljeva nejednakost)**.** *Iz prethodnog teorema slijedi:*

$$\begin{aligned} P\{|X - EX| \geq k\sigma\} &= P\{|X - EX|^2 \geq k^2\sigma^2\} \\ &\leq \frac{E|X - EX|^2}{k^2\sigma^2} = \frac{\operatorname{Var} X}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Interpretacija se varijance i očekivanja korištenjem Čebiševljeve nejednakosti zapravo temelji na drugom korijenu iz varijance. Tu veličinu, tj. $\sqrt{\operatorname{Var} X}$ zovemo **standardna devijacija** slučajne varijable i označavamo sa σ_X ili σ.

Dakle, vidimo da Čebiševljeva nejednakost tvrdi: **vjerojatnost da odstupanje slučajne varijable X od njezinog očekivanja bude po apsolutnoj vrijednosti veće ili jednako k standardnih devijacija, manja je ili jednaka od $1/k^2$.**

Na primjer, vjerojatnost je manja ili jednaka $1/9 \approx 11.1\%$ da slučajna varijabla odstupa od svog očekivanja za više od 3 standardne devijacije. Korištenjem statističke interpretacije vjerojatnosti možemo tada zaključiti da će se, prilikom puno nezavisnih realizacija slučajne varijable X, u ne više od 11.1% slučajeva realizirati vrijednosti izvan intervala $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, a u barem 88.9% slučajeva vrijednosti unutar tog intervala. Kao što se može vidjeti iz navedenih objašnjenja, ima smisla standardnu devijaciju smatrati jednom od mjera koja govori o raspršenosti realizacija slučajne varijable oko očekivanja, tj. mjerom raspršenja.

Primjer 2.31. *Neka je X diskretna slučajna varijabla kojom je modeliran broj kišnih dana u Osijeku tijekom jedne godine. Poznato je da je očekivani broj kišnih dana 128, a standardna devijacija 4. Ako želimo ocijeniti $P\{|X - EX| < 5\}$, tj. vjerojatnost da broj kišnih dana u Osijeku tijekom jedne godine odstupa od očekivanog broja za manje od pet dana, koristimo Čebiševljevu nejednakost. Iz Čebiševljeve nejednakosti dane u propoziciji 2.2 primjenom svojstva vjerojatnosti suprotnog događaja slijedi da je*

$$P\{|X - EX| < k\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Budući da je u tom primjeru $EX = 128$, $\sigma = 4$ i $k\sigma = 5$, tj. $k = 5/4$, slijedi da je

$$P\{|X - 128| < 5\} \geq 0.36.$$

Primjer 2.32. *Neka je X diskretna slučajna varijabla kojom je modeliran broj komaraca uhvaćen u danu klopku u jednom satu tijekom lipnja u Osijeku. Pretpostavimo da je poznato da je u opisanim uvjetima očekivani broj komaraca uhvaćenih u tu klopku po satu jednak 50, a varijanca 64 te da je*

$$P\{|X - 50| < 8k\} \geq 0.5$$

za neki neki $k \in \langle 0, 5\rangle$. Pomoću zadanih veličina možemo odrediti granice intervala $\langle 50 - 8k, 50 + 8k\rangle$ čijim se cjelobrojnim elementima, prema Čebiševljevoj nejednakosti, X realizira vjerojatnošću većom ili jednakom 0.5. Rješavanjem jednadžbe

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0.5$$

slijedi da je parametar k iz Čebiševljeve nejednakosti jednak $\sqrt{2}$. Prema tome je

$$P\left\{50 - 8\sqrt{2} < X < 50 + 8\sqrt{2}\right\} \geq 0.5.$$

Budući da je $(50 - 8\sqrt{2}) \approx 38.686$, a $(50 + 8\sqrt{2}) \approx 61.314$, slijedi da je vjerojatnost da se X realizira brojem iz skupa $\{39, 40, \ldots, 61\}$ veća ili jednaka 0.5. U kontekstu našeg promatranja to znači da je vjerojatnost da u opisanu klopku bude ulovljeno n, $n \in \{39, 40, \ldots, 61\}$, komaraca veća ili jednaka 0.5.

Primjer 2.33. *Neka je dana slučajna varijabla X koja ima očekivanje 0.7 i standardnu devijaciju 0.458. Tada Čebiševljeva nejednakost garantira: vjerojatnost odstupanja te slučajne varijable od 0.7 za više od dvije standardne devijacije iznosi najviše 0.25. Naime*

$$P\{|X - 0.7| \geq 2\sigma\} \leq \frac{1}{4}.$$

Korištenjem statističke interpretacije vjerojatnosti možemo zaključiti da će se, prilikom puno nezavisnih realizacija te slučajne varijable, najviše u 25% slučjeva realizirati vrijednosti izvan intervala $[0.7 - 2 \cdot 0.458, 0.7 + 2 \cdot 0.458] = [0.2417, 1.1583]$, a u barem 75% slučajeva vrijednosti unutar tog intervala. (Odredite što kraći interval koji će sadržavati barem 88% realizacija!)

Dakako, ta ocjena nije precizna s obzirom da se odnosi na sve slučajne varijable sa zadanim iznosom očekivanja i standardne devijacije bez obzira na tip distribucije. Ukoliko je točno poznata distribucija slučajne varijable, takve se vjerojatnosti se mogu izračunati i puno preciznije, što će biti ilustrirano u narednim poglavljima.

S obzirom da je varijanca moment koji ćemo često koristiti, dokažimo nekoliko korisnih svojstava.

1. Neka je X slučajna varijabla koja ima varijancu te a i b proizvoljni realni brojevi. Tada vrijedi
$$\mathrm{Var}\,(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}\, X.$$

   Dokaz.
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(aX+b) &= E\left((aX+b)-(aEX+b)\right)^2 = \\ &= E\left(aX-aEX\right)^2 = a^2E(X-EX)^2 = a^2\mathrm{Var}\,X.\end{aligned}$$

2. Ako za slučajnu varijablu X vrijedi $\mathrm{Var}\,X = 0$, onda ona zapravo nema karakter slučajnosti, tj. $P\{X = konst.\} = 1$. Očigledno je da vrijedi i drugi smjer te tvrdnje, tj. ako za slučajnu varijablu X vrijedi $P\{X = konst.\} = 1$, onda je $\mathrm{Var}\,X = 0$.

   Dokaz. *Neka je* $\mathrm{Var}\,X = 0$. *Tada vrijedi:* $E(X-\mu)^2 = 0$. *S obzirom da je* $(X-\mu)^2 \geq 0$, *na skupu na kojemu je* $(X-\mu)^2 > 0$ *mora biti pripadna vjerojatnost* 0, *tj.* $P\{(X-\mu)^2 > 0\} = 0$. *Odavde slijedi da je* $P\{(X-\mu)^2 = 0\} = 1$, *tj.* $P\{X = \mu\} = 1$, *što dokazuje prvu tvrdnju. Za dokaz druge tvrdnje*

   pretpostavimo $P\{X = c\} = 1$. *Tada je* $EX = c$, *a* $\mathrm{Var}\,X = E(X-c)^2 = 0$.

3. Varijancu možemo računati također primjenom formule
$$\mathrm{Var}\,X = EX^2 - (EX)^2.$$

   Dokaz. *Neka je* $EX = \mu$. *Tada zbog linearnosti očekivanja vrijedi:*
$$\mathrm{Var}\,X = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu EX + \mu^2) = EX^2 - \mu^2.$$

2.6.3 Očekivanje i varijanca nekih parametarskih diskretnih distribucija

Parametarski se zadane familije distribucija često koriste u praksi, a njihovi se parametri nerijetko mogu iskazati u terminima momenata. U ovom poglavlju izračunat ćemo očekivanje i varijancu za diskretne parametarske familije definirane u poglavlju 2.4.

Diskretna uniformna distribucija

Za slučajnu varijablu X rekli smo da ima diskretnu uniformnu distribuciju ako je njezin skup vrijednosti konačan podskup skupa realnih brojava , tj. $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, a pripadni niz vjerojatnosti definiran je na sljedeći način:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Očekivanje je te slučajne varijable aritmetička sredina elemenata skupa $\mathcal{R}(X)$, tj.

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}_n.$$

Za varijancu tada vrijedi:

$$\operatorname{Var} X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_n)^2.$$

Specijalno, ako je skup vrijednosti $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, tada je:

$$EX = \frac{n+1}{2}, \quad \operatorname{Var} X = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Bernoullijeva distribucija

Za slučajnu varijablu rekli smo da ima Bernoullijevu distribuciju ako je zadana tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Očekivanje i varijanca te distribucije dani su sljedećim izrazima:

$$EX = p, \ \operatorname{Var} X = p(1-p).$$

Uočimo da je slučajna varijabla I_A iz dokaza teorema 2.4 Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $p = P(A)$.

Binomna distribucija

Binomna slučajna varijabla $\mathcal{B}(n,p)$ s parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0,1\rangle$ definirana je skupom vrijednosti $\{0,1,2,...,n\}$ s pripadnim vjerojatnostima

$$p_i = P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Označimo $q = 1 - p$.

Prije negoli izračunamo očekivanje i varijancu binomne slučajne varijable uočimo da za fiksne realne brojeva a i b vrijedi sljedeće:

$$g(t) = (at+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i t^i b^{n-i}$$

$$g'(t) = n(at+b)^{n-1}a = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} a^i t^{i-1} b^{n-i}$$

$$g'(1) = n(a+b)^{n-1}a = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \tag{2.3}$$

$$g''(t) = n(n-1)(at+b)^{n-2}a^2 = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \binom{n}{i} a^i t^{i-2} b^{n-i}$$

$$g''(1) = n(n-1)(a+b)^{n-2}a^2 = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \tag{2.4}$$

Primjenom izraza (2.3) dobivamo da je

$$EX = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = np(p+1-p)^{n-1} = np.$$

Primjenom izaza (2.3) i (2.4) dobivamo da je

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} X &= EX^2 - (EX)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} - (np)^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq. \end{aligned}$$

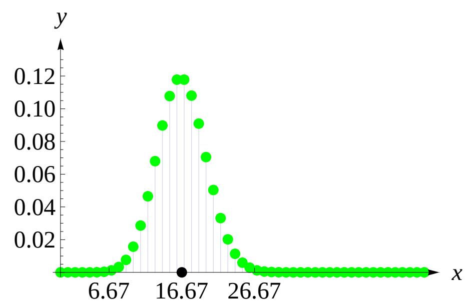
Dakle, očekivanje i varijanca binomne slučajne varijable dani su sljedećim izrazima:

$$E(X) = np, \quad \operatorname{Var} X = npq.$$

Primjer 2.34. *Očekivanje i varijanca binomne slučajne varijable X s parametrima $n = 50$ i $p = \frac{1}{3}$ jesu*

$$\mu = np = \frac{50}{3} \approx 16.67, \quad \sigma^2 = np(1-p) = \frac{100}{9} \approx 11.11,$$

dok je standardna devijacija $\sigma = 10/3 \approx 3.33$. Slikom 2.22 prikazana je distribucija te slučajne varijable s označenim očekivanjem i granicama intervala $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma] = [6.67, 26.67]$.



Slika 2.22: Distribucija slučajne varijable $X \sim \mathcal{B}(50, \frac{1}{3})$.

Odredimo vjerojatnost realizacije te slučajne varijable unutar intervala $\langle 6.67, 26.67\rangle$, tj. vjerojatnost realizacije slučajne varijable udaljene od očekivanja za manje od tri standardne devijacije:

$$P\{X \in \langle 6.67, 26.67\rangle\} = \sum_{i=7}^{26} \binom{50}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{50-i} \approx 0.997.$$

Dakle, ta će se slučajna varijabla s vjerojatnošću približno 0.997 realizirati unutar intervala $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$. Korištenjem statističke interpretacije vjerojatnosti možemo zaključiti da će, prilikom puno nezavisnih realizacija te slučajne varijable, njih oko 99.7% pasti unutar tog intervala.

Korištenjem računala odredite najkraći simetričan interval oko očekivanja za koji možemo tvrditi da će sadržati barem 95% realizacije ove slučajne varijable prilikom puno nezavisnih ponavljanja pokusa.

Poissonova distribucija

Slučajna varijabla X ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, \dots\}$ s vjerojatnostima

$$p_i = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}.$$

Izračunajmo očekivanje i varijancu Poissonove slučajne varijable:

$$EX = \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} i\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

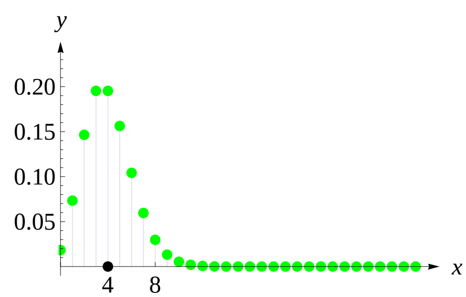
$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} (i-1+1) \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \right) = \\
&= \lambda e^{-\lambda} [\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}] = \lambda(\lambda+1),
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.
$$

Dakle, očekivanje i varijanca Poissonove slučajne varijable dani su sljedećim izrazom:

$$
EX = \operatorname{Var} X = \lambda.
$$

Primjer 2.35. *Očekivanje i varijanca Poissonove slučajne varijable X s parametrom $\lambda = 4$ jednaki su vrijednosti parametra λ, tj. 4, dok je standardna devijacija $\sigma = 2$. Slikom 2.23 prikazana je distribucija te slučajne varijable s označenim očekivanjem i granicama intervala $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] = [0, 8]$.*



Slika 2.23: Distribucija slučajne varijable $X \sim \mathcal{P}(4)$.

Odredimo vjerojatnost realizacije te slučajne varijable unutar intervala $[0, 8]$, tj. vjerojatnost realizacije slučajne varijable udaljene od očekivanja za manje ili točno dvije standardne devijacije:

$$
P\{X \in [0, 8]\} = \sum_{i=0}^{8} e^{-4} \frac{4^i}{i!} \approx 0.979.
$$

Dakle, ta će se slučajna varijabla s vjerojatnošću približno 0.979 realizirati unutar intervala $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$. Korištenjem statističke interpretacije vjerojatnosti možemo zaključiti da će, prilikom puno nezavisnih realizacija te slučajne varijable, njih oko 97.8% pasti unutar tog intervala.

Odredite najkraći simetričan interval oko očekivanja za koji možemo tvrditi da će sadržati barem 95% realizacija te slučajne varijable prilikom puno nezavisnih ponavljanja pokusa. (Iskoristite računalo!)

Geometrijska distribucija

Slučajna varijabla X ima geometrijsku distribuciju s parametrom $p \in \langle 0, 1\rangle$ ako prima vrijednosti iz skupa $\{1, 2, 3, \dots\}$ s vjerojatnostima

$$p_k = P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}.$$

Izračunajmo očekivanje i varijancu te distribucije.

Deriviranjem jednakosti

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i, \quad |x| < 1, \tag{2.5}$$

po x i primjenom dobivenog izraza uz $x = 1 - p$ slijedi

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1} = \frac{1}{p}.$$

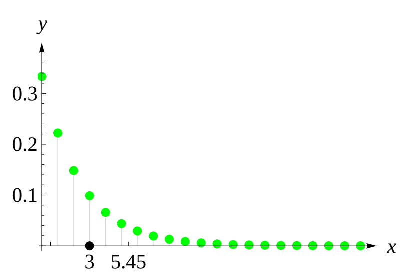
Primjenom druge derivacije izraza (2.5) uz $x = 1 - p$ dobivamo da je

$$\operatorname{Var} X = \frac{1-p}{p^2}.$$

Primjer 2.36. *Očekivanje i varijanca geometrijske slučajne varijable X s parametrom $p = 1/3$ jesu*

$$\mu = \frac{1}{p} = 3, \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} = 6,$$

dok je standardna devijacija $\sigma = \sqrt{6} \approx 2.45$. Slikom 2.24 prikazana je distribucija te slučajne varijable s označenim očekivanjem i granicama intervala $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [0.55, 5.45]$.



Slika 2.24: Distribucija geometrijske slučajne varijable s parametrom $p = \frac{1}{3}$.

Odredimo vjerojatnost realizacije te slučajne varijable unutar intervala $\langle 0.55, 5.45\rangle$*, tj. vjerojatnost realizacije slučajne varijable udaljene od očekivanja za manje od jedne standardne devijacije:*

$$P\{X \in \langle 0.55, 5.45\rangle\} = \sum_{i=1}^{5} ip(1-p)^{i-1} \approx 0.579.$$

Dakle, ta će se slučajna varijabla s vjerojatnošću približno 0.579 *realizirati unutar intervala* $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$*. Korištenjem statističke interpretacije vjerojatnosti možemo zaključiti da će, prilikom puno nezavisnih realizacija te slučajne varijable, njih oko* 57.8% *pasti unutar tog intervala.*

Korištenjem računala odredite najkraći simetričan interval oko očekivanja za koji možemo tvrditi da će sadržati barem 95% realizacije te slučajne varijable prilikom puno nezavisnih ponavljanja pokusa.

2.6.4 Očekivanje i momenti neprekidne slučajne varijable

Za neprekidne slučajne varijable očekivanje se definira korištenjem pripadne funkcije gustoće.

Definicija 2.14. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je konačan integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx,$$

onda kažemo da slučajna varijabla X ima očekivanje i broj

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

zovemo **matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable** X.

Valja naglasiti da sva spomenuta svojstva očekivanja (vidi poglavlje 2.29) koja vrijede za diskretne slučajne varijable vrijede i za neprekidne slučajne varijable. Također, ako je dana realna funkcija realne varijable g, onda očekivanje slučajne varijable[5] $g(X)$ možemo računati analogno diskretnom slučaju, ali koristeći funkciju gustoće i integral umjesto sume, tj.

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx.$$

[5] za uvjete na funkciju g koji osiguravaju da je $g(X)$ neprekidna slučajna vrijabla pogledati primjerice [26]

Definicija je momenata onda identična definiciji momenata u diskretnom slučaju, ali se momenti drugačije računaju s obzirom da se definicije očekivanja razlikuju. Tako je npr. drugi centralni moment, odnosno varijanca, definiran na sljedeći način:

$$Var\, X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)\, dx.$$

Također se može pokazati da pri toj definiciji ostaju sačuvana sva svojstva varijance dokazana u poglavlju 4.19 za diskretan slučaj, kao i navedene korisne nejednakosti (vidi npr. [26]).

Primjer 2.37. *Funkcija gustoće slučajne varijable definirana je pravilom*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \ x \in \langle 0, \pi/2] \\ 0 & , \ x \notin \langle 0, \pi/2] \end{cases}.$$

Izračunajmo momente EX, EX^2, EX^3, $\mathrm{Var}\, X$, $E[X - E(X)]^3$ te neprekidne slučajne varijable:

$$EX = \int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx = 1, \qquad EX^2 = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx = \pi - 2,$$

$$EX^3 = \int_0^{\pi/2} x^3 \sin x\, dx = \frac{3}{4}(\pi - 8), \qquad \mathrm{Var}\, X = EX^2 - (EX)^2 = \pi - 3,$$

$$E\,(X - EX)^3 = \int_0^{\pi/2} (x - EX)^3 \sin x\, dx = \frac{3\pi^2}{4} - 3\pi + 2.$$

2.6.5 Očekivanje i varijanca nekih parametarskih neprekidnih distribucija

Analogno parametarskim diskretnim distribucijama, za nastavak će kolegija biti korisno izračunati i zapamtiti izraze za očekivanje i varijancu nekih parametarskih neprekidnih distribucija koje se često koriste. U tu je svrhu samo potrebno riješiti zadane integrale. S obzirom da je normalna slučajna vrijabla najvažnija u klasi neprekidnih slučajnih varijabli, ovdje ćemo navesti samo izračun očekivanja i varijance te distribucije, a za ostale navodimo eksplicitne izraze u tablici 2.1.

Očekivanje i varijanca normalne distribucije

Neka je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, tj.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da bismo lakše riješili potrebne integrale, uočimo prvo da je funkcija

$$g(x) = x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

neparna, na $\mathbb{R}$ integrabilna funkcija, pa je

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 0.$$

Osim toga, zbog normiranosti funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable znamo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1.$$

Primjenom supstituciije $t = (x-\mu)/\sigma$ slijedi:

$$\begin{aligned}
EX &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \mu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \mu^2 = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \mu^2.
\end{aligned}$$

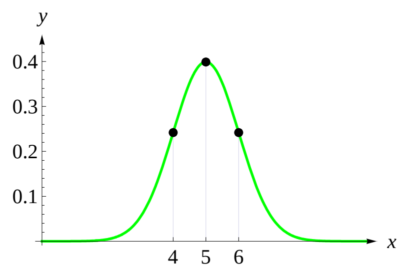
Gornji integral rješavamo parcijalnom integracijom. Slijedi da je

$$\sigma^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sigma^2.$$

Dakle, $\operatorname{Var} X = \sigma^2$.

Uočimo da su parametri μ i σ^2 normalne distribucije upravo njezino matematičko očekivanje i varijanca, redom.

Primjer 2.38. *Graf funkcije gustoće normalne slučajne varijable s očekivanjem $\mu = 5$ i varijancom $\sigma^2 = 1$ prikazan je slikom 2.25.*



Slika 2.25: Graf funkcije gustoće normalne distribucije $\mathcal{N}(5, 1)$.

Vidimo da funkcija gustoće ima maksimum u očekivanju, a za vrijednosti nezavisne varijable $x_1 = \mu - \sigma$ i $x_2 = \mu + \sigma$ ima točke infleksije. Odredimo vjerojatnost realizacije te slučajne varijable unutar intervala $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [4, 6]$, tj. vjerojatnost realizacije slučajne varijable udaljene od očekivanja za manje ili točno jednu standardnu devijaciju (koristite računalo!).

$$P\{X \in [4, 6]\} \approx 0.682.$$

Provjerite da je $P\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\} \approx 0.955$ i $P\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\} \approx 0.997$.

Kratak pregled obrađenih distribucija dan je u tablici 2.1.

Naziv distribucije	**Distribucija (gustoća)**	**Očekivanje**	**Varijanca**
Bernoullijeva, $p \in \langle 0, 1\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$	p	$p(1-p)$
Binomna $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 0, 1\rangle$	$\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ $p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Poissonova $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$	$\mathcal{R}(X) = \mathbb{N}_0$ $p_i = \frac{\lambda^1}{i!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Geometrijska $\mathcal{G}(p)$, $p \in \langle 0, 1\rangle$	$\mathcal{R}(X) = \mathbb{N}$ $p_i = p(1-p)^{i-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Naziv distribucije	Distribucija (gustoća)	Očekivanje	Varijanca
Uniformna na $\langle a, b\rangle$ $\mathcal{U}(a,b)$, $a<b$	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Eksponencijalna $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda>0$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Laplaceova, $\lambda > 0$	$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda\lvert x\rvert}$	0	$\frac{2}{\lambda^2}$
Normalna $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

Tablica 2.1: Tablica distribucija ili funkcija gustoća te očekivanja i varijanci važnijih parametarskih familija diskretnih i neprekidnih distribucija.

2.7 Transformacija slučajne varijable

2.7.1 Postupak standardizacije

Korištenjem svojstava očekivanja i varijance dokazat ćemo da svaku slučajnu varijablu koja ima varijancu možemo afino transformirati (dodavanjem konstante i množenjem s konstantom različitom od 0) tako da novonastala slučajna varijabla ima očekivanje 0 i varijancu 1. Takav se postupak transformiranja slučajne varijable u statistici naziva **postupak standardizacije**.

Propozicija 2.3. *Neka je X slučajna varijabla s očekivanjem $\mu\in\mathbb{R}$ i varijancom $\sigma^2>0$. Tada slučajna varijabla*

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}, \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

ima očekivanje 0 i varijancu 1.

Dokaz. *Korištenjem rezultata poglavlja 2.6 vidimo da vrijedi:*

$$EY = \frac{1}{\sigma}(EX-\mu) = 0,$$

$$\operatorname{Var} Y = \frac{1}{\sigma^2}\operatorname{Var} X = 1.$$

Vidimo da smo postupkom standardizacije lako promijenili varijancu i očekivanje slučajne varijable, ali je ovdje ostalo nejasno što se pri toj transformaciji dogodilo s njezinom funkcijom distribucije, tj. na koji je način ona promijenjena.

Propozicija 2.4. *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije $F_X(x)$, očekivanjem $\mu \in \mathbb{R}$ i varijancom $\sigma^2 > 0$. Tada slučajna varijabla*

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \ \ \sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

ima funkciju distribucije $F_Y(x) = F_X(\sigma x + \mu)$.

Dokaz. *S obzirom da je $\sigma > 0$, vrijedi:*

$$F_Y(x) = P\{Y \le x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \le x\right\} = P\left\{X \le \sigma x + \mu\right\} = F_X(\sigma x + \mu).$$

Primjer 2.39. *Neka je $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 0,1\rangle$. Postupkom standardizacije dobivamo slučajnu varijablu*

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Uočimo da Y više nema distribuciju u binomnoj familiji!

Primjer 2.40. *Neka je $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Postupkom standardizacije dobivamo slučajnu varijablu*

$$Y = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

Uočimo da Y više nema distribuciju u Poissonovoj familiji!

Primjer 2.41. *Neka je $X \sim \mathcal{U}(a,b)$. Funkcija distribucije slučajne varijable X dana je izrazom*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & , \ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \ a \le x < b \\ 1 & , \ x \ge b \end{cases}.$$

Postupkom standardizacije dobivamo slučajnu varijablu Y sa sljedećom funkcijom distribucije

$$F_Y(x) = F_X(\sigma x + \mu) = \begin{cases} 0 & , \ \sigma x + \mu < a \\ \dfrac{\sigma x + \mu - a}{b-a} & , \ a \le \sigma x + \mu < b \\ 1 & , \ \sigma x + \mu \ge b \end{cases},$$

tj.

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < \frac{a-\mu}{\sigma} \\ \dfrac{x - \frac{a-\mu}{\sigma}}{\frac{b-\mu}{\sigma} - \frac{a-\mu}{\sigma}} & , \ \frac{a-\mu}{\sigma} \le x < \frac{b-\mu}{\sigma} \\ 1 & , \ x \ge \dfrac{b-\mu}{\sigma} \end{cases}.$$

Odavde vidimo da je $Y \sim \mathcal{U}\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}, \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)$, tj. postupak standardizacije zadržao je slučajnu varijablu u istoj klasi, ali s drugim parametrima.

Primjer 2.42. *Neka je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Postupkom standardizacije dobivamo slučajnu varijablu*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Provjerite ovu tvrdnju!

2.7.2 Bijektivna transformacija slučajne varijable

Postupkom standardizacije transformiramo slučajnu varijablu afinom funkcijom s pozitivnim koeficijentom smjera. Naime, u postupku standardizacije novonastala slučajna varijabla Y kompozicija je afine funkcije $g(x) = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ i slučajne varijable X, tj. $Y = g(X)$. Pokazali smo da se, kod ovako jednostavne funkcije g, može lako odrediti funkcija distribucije novonastale slučajne varijable. Sličan postupak može se primijeniti kod svih transformacija bijektivnim funkcijama g. Ako je slučajna varijabla X diskretna, opisanim postupkom dobivamo slučajnu varijablu $Y = g(X)$ koja je također diskretnog tipa. Međutim, ako je X apsolutno neprekidna, $Y = g(X)$ će biti apsolutno neprekidna samo ako je moguće izraziti njezinu funkciju distribucije pomoću funkcije gustoće.

Primjer 2.43. *Neka je dana diskretna slučajna varijabla X tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_{i \in I} p_i = 1, \quad I \subseteq \mathbb{N},$$

i neka je $g : \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$ bijekcija. Tada je slučajna varijabla $Y = g(X)$ zadana tablicom distribucije

$$Y = \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \dots & g(x_n) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \quad p_i \geq 1, \quad \sum_{i \in I} p_i = 1 \quad I \subseteq \mathbb{N}.$$

Primjer 2.44. *Neka je dana neprekidna slučajna varijabla X funkcijom gustoće f i neka je bijekcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom $g(x) = e^x$. Tada je $Y = g(X) = e^X$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $h(x) = f(\ln x)\,\dfrac{1}{x}$ za $x > 0$ i $h(x) = 0$ za $x \leq 0$.*
Zaista,

$$F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{g(X) \leq x\} = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0 \\ P\{X \leq g^{-1}(x)\} & , \ x > 0 \end{cases}.$$

Nadalje, za $x > 0$ vrijedi:

$$P\{X \leq g^{-1}(x)\} = \int_{-\infty}^{g^{-1}(x)} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\ln x} f(t)\,dt.$$

Uz supstituciju $t = \ln u$ slijedi:

$$P\{X \leq g^{-1}(x)\} = \int_0^x f(\ln u)\frac{1}{u}\,du.$$

Definiranjem funkcije

$$h(u) = \begin{cases} 0 & , \ u \leq 0 \\ f(\ln u)\dfrac{1}{u} & , \ u > 0 \end{cases}$$

vidimo da je ona nenegativna i vrijedi

$$P\{Y \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} h(u)\,du,$$

pa je time pokazano da je $h(u)$ funkcija gustoće slučajne varijable Y.

Primjer 2.45. *Neka je neprekidna slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće f i neka je $g(x) = e^{-x}$. Tada se analognim postupkom kao u primjeru 2.44 vidi da je $Y = g(X) = e^{-X}$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $h(x) = f(-\ln(x))\frac{1}{x}$ za $x > 0$ i $h(x) = 0$ za $x \leq 0$.*

Za neprekidnu slučajnu varijablu X i bijekciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{R}(g) \subseteq \mathbb{R}$ može se odrediti općeniti izraz za funkciju gustoće slučajne varijable $Y = g(X)$ ako je ona neprekidna slučajna varijabla. O tome govori teorem 2.5.

Teorem 2.5. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla, f_X njezina funkcija gustoće, a F_X funkcija distribucije. Neka je, nadalje, $g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{R}(g) \subseteq \mathbb{R}$ bijekcija. Ako je funkcija g derivabilna na $\mathbb{R}$, onda je $Y = g(X)$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|[g^{-1}(y)]'| & , y \in \mathcal{R}(g) \\ 0 & , y \in (\mathcal{R}(g))^c \end{cases}.$$

Dokaz. Neka je X neprekidna slučajna varijabla i g bijekcija kao u iskazu teorema. Tražimo funkciju distribucije F_Y slučajne varijable $Y = g(X)$. Uočimo da vrijedi:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\}.$$

Da bismo izrazili $P\{g(X) \leq y\}$ u terminima $P\{X \in A\}$ za neki skup $A \subseteq \mathbb{R}$ (tj. u terminima funkcije distribucije slučajne varijable X), potrebno je riješiti nejednadžbu

$$g(x) \leq y.$$

S obzirom da je g bijekcija s $\mathbb{R}$ na $\mathcal{R}(g) \subseteq \mathbb{R}$, postupak rješavanja ovisi samo o tome da li je g monotono rastuća ili monotono padajuća funkcija.

- Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathcal{R}(g)$ monotono rastuća funkcija.

Tada za sve $y \in \mathcal{R}(g)$ vrijedi:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \leq g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y)).$$

Ako je funkcija g derivabilna na $\mathbb{R}$, onda je i funkcija $F_X(g^{-1}(y))$ derivabilna na $\mathcal{R}(g)$, pa možemo definirati funkciju

$$f_Y(y) = \frac{dF_X(g^{-1}(y))}{dy} = f_X(g^{-1}(y))[g^{-1}(y)]', \quad y \in \mathcal{R}(g).$$

Uočimo da je f_Y nenegativna funkcija s obzirom da su F_X i g monotono rastuće funkcije. Također vrijedi:

$$\int_{\mathcal{R}(g)} f_X(g^{-1}(y))[g^{-1}(y)]'\,dy = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1.$$

Sada možemo proširiti funkciju $f_Y(y)$ na cijeli $\mathbb{R}$ tako da definiramo:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))[g^{-1}(y)]' & , y \in \mathcal{R}(g) \\ 0 & , y \in (\mathcal{R}(g))^c \end{cases}.$$

- Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{R}(g)$ monotono padajuća funkcija.

Tada za sve $y \in \mathcal{R}(g)$ vrijedi:

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \geq g^{-1}(y)\} =$$

$$= 1 - P\{X < g^{-1}(y)\} = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

Ako je funkcija g derivabilna na $\mathbb{R}$ onda je i funkcija $(1 - F_X(g^{-1}(y)))$ derivabilna na $\mathcal{R}(g)$, pa možemo definirati funkciju

$$f_Y(y) = \frac{d(1 - F_X(g^{-1}(y)))}{dy} = -f_X(g^{-1}(y))[g^{-1}(y)]', \quad y \in \mathcal{R}(g).$$

Uočimo da je f_Y nenegativna funkcija jer je $f_X(g^{-1}(y)) \geq 0$ zbog nenegativnosti funkcije f_X, a $[g^{-1}(y)]' < 0$ s obzirom da je g monotono padajuća funkcija. Također vrijedi:

$$\int_{\mathcal{R}(g)} \left(-f_X(g^{-1}(y))[g^{-1}(y)]'\right) dy = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = 1.$$

Sada možemo proširiti funkciju $f_Y(y)$ na cijeli $\mathbb{R}$ tako da definiramo:

$$f_Y(y) = \begin{cases} -f_X(g^{-1}(y))[g^{-1}(y)]' & , y \in \mathcal{R}(g) \\ 0 & , y \in (\mathcal{R}(g))^c \end{cases}.$$

Prema prethodnim rezultatima slijedi da za derivabilnu bijekciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{R}(g)$ možemo definirati funkciju $f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izrazom:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left|[g^{-1}(y)]'\right| & , \quad y \in \mathcal{R}(g) \\ 0 & , y \in (\mathcal{R}(g))^c \end{cases}.$$

Ta je funkcija nenagativna i vrijedi:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt.$$

Dakle, Y je neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_Y.

2.7.3 Primjeri transformacija koje nisu bijektivne

Ako transformacija slučajne varijable nije bijekcija, također je moguće odrediti distribuciju novonastale slučajne varijable, ali je postupak tehnički zahtjevniji. Za ilustraciju ćemo se poslužiti primjerima.

Primjer 2.46. *Pretpostavimo da je diskretna slučajna varijabla X dana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \quad p_i \geq 1, \quad \sum_i p_i = 1.$$

Neka je $g : \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija te neka je slučajna varijabla Y definirana kao $Y = g(X)$. Označimo $\mathcal{R}(Y) = \{y_1, y_2, \dots, y_k, \dots\}$. Tada slučajna varijabla Y ima tablicu distribucije

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_k & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots \end{pmatrix}, \quad q_k \geq 1, \quad \sum_k q_k = 1,$$

gdje je

$$q_k = \sum_{\{\omega \in \Omega | g(X(\omega)) = y_k\}} P\{\omega\} = \sum_{\{i | g(x_i) = y_k\}} p_i.$$

Primjer 2.47. *Pretpostavimo da je slučajna varijabla X zadana tablicom distribucije*

$$X = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Tada slučajna varijabla $Y = X^2$, koja je dobivena kompozicijom slučajne varijable X i nebijektivne funkcije $g(t) = t^2$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ima distribuciju zadanu tablicom

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Primjer 2.48. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće f. Tada je $Y = X^2$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x}) \big) & , x \geq 0 \end{cases}.$$

Zaista, za $x < 0$ je $P\{Y \leq x\}$ očigledno jednako 0. Za $x \geq 0$ je

$$P\{Y \leq x\} = P\{X^2 \leq x\} = P\{-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\} = \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)\, dt = \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} \big(f(-t) + f(t)\big)\, dt.$$

Supstitucijom $t = \sqrt{u}$ u tom integralu vidimo da za $x \geq 0$ vrijedi:

$$P\{Y \leq x\} = \int\limits_0^x \frac{1}{2\sqrt{u}} \big(f(\sqrt{u}) + f(-\sqrt{u}) \big)\, du = \int\limits_0^x h(u)\, du.$$

Dakle, h je funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable $Y = X^2$.

Odredite funkciju gustoće neprekidne slučajne varijable $Y = X^2$ ako je X standardna normalna slučajna varijabla, tj. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2.8 Generiranje slučajnih varijabli

Važan je način ispitivanja istinitosti tvrdnji koje se odnose na slučajne varijable provjera tih tvrdnji na podacima. Međutim, podaci koji se u tu svrhu trebaju koristiti realizacije su slučajne varijable. Pitanje je kako prikupiti podatke iz slučajne varijable zadane distribucije. Radi ilustracije problema zamislimo da želimo dobiti 30 podataka koji su realizacije Bernoullijeve slučajne varijable s tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Za to postoji nekoliko jednostavnih načina. Primjerice, bacimo pravilno izrađen novčić 30 puta i pri tome bilježimo 0 ako je palo pismo, a 1 ako se okrenula glava. Ili uzmemo kutijicu s istim brojem bijelih i crnih kuglica pa iz nje na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu 30 puta, ali tako da svaki puta izvučenu kuglicu vratimo u kutijicu i promiješamo. Pritom bilježimo 0 ako je izvučena bijela kuglica, a 1 ako je izvučena crna kuglica.

Međutim, kako ćemo dobiti podatke iz, primjerice, normalne distribucije sa zadanim očekivanjem i varijancom?

Posebno koristan rezultat koji se koristi u tu svrhu odnosi se na distribuciju slučajne varijable F, gdje je F funkcija distribucije slučajne varijable X.

Naime, pretpostavimo da je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom distribucije F. S obzirom da je X neprekidna slučajna varijabla, njezina je funkcija distribucije na nosaču funkcije gustoće (tj. na skupu $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$) neprekidna rastuća bijekcija. Za funkciju distribucije F_U slučajne varijable $U = F(X)$ vrijedi:

$$F_U(u) = P\{U \leq u\} = P\{F(X) \leq u\} = \begin{cases} 0 & , u < 0 \\ P\{X \leq F^{-1}(u)\} & , u \in [0, 1) \\ 1 & , , u \geq 1 \end{cases}.$$

S obzirom da je $P\{X \leq F^{-1}(u)\} = F(F^{-1}(u)) = u$, vidimo da je $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, i to neovisno o funkciji distribucije F sve dok je ona funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable.

Pogledajmo i drugi smisao toga rezultata. Pođimo od slučajne varijable $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Odaberimo funkciju distribucije F neprekidne slučajne varijable X koju želimo modelirati. Očigledno je da se distribucija slučajne varijable X može dobiti kao distribucija kompozicije $F^{-1}(U)$. Naime, vrijedi:

$$P\{F^{-1}(U) \leq x\} = P\{U \leq F(x)\} = F(x).$$

Dakle, ako trebamo generirati n podataka iz neprekidne slučajne varijable s distribucijom F, dovoljno je da imamo niz podataka $(u_i, i = 1, \dots, n)$ iz $\mathcal{U}(0,1)$. Tražene podatke tada dobijemo kao $(F^{-1}(u_i), i = 1, \dots, n)$.

Za generiranje se realizacija uniformne distribucije na $\langle 0, 1\rangle$ danas koriste takozvani generatori slučajnih brojeva koji su ugrađeni u sve naprednije računalne programe.

Uniformna distribucija na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ može se također iskoristiti i za generiranje realizacija diskretnih distribucija. Zainteresirani čitatelj može više informacija o tome pronaći u [8].

2.9 Zadaci

Zadatak 2.1. Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja pravilno izrađenog novčića dva puta zaredom. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj realiziranih pisama. Odredite tablicu distribucije slučajne varijable X.

Rješenje:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Zadatak 2.2. Strijelac na raspolaganju ima tri metka i gađa metu dok je ne pogodi ili dok ne potroši sva tri metka. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj potrošenih metaka. Uz pretpostavku o nezavisnosti gađanja tablicu distribucije od X ako je poznato da je vjerojatnost pogotka mete pri svakom gađanju jednaka 0.8.

Rješenje:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.8 & 0.16 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Zadatak 2.3. Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja pravilno izrađene igraće kockice dva puta zaredom. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost zbroj realiziranih brojeva u oba bacanja. Odredite tablicu distribucije slučajne varijable X.

Rješenje:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

Zadatak 2.4. Iz kutije u kojoj se nalazi 7 kuglica numeriranih brojevima od 1 do 7 izvlače se istovremeno tri kuglice $\{i, j, k\}$. Odredite tablicu distribucije i funkciju distribucije slučajne varijable X definirane na sljedeći način:

$$X(\{i, j, k\}) = \max(i, j, k), \ \ i, j, k \in \{1, \dots, 7\}.$$

Rješenje:
Tablica distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{35} & \frac{3}{35} & \frac{6}{35} & \frac{10}{35} & \frac{15}{35} \end{pmatrix}$$

Funkcija distribucije:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 3) \\ 1/35 & , x \in [3, 4) \\ 4/35 & , x \in [4, 5) \\ 10/35 & , x \in [5, 6) \\ 20/35 & , x \in [6, 7) \\ 1 & , x \in [7, \infty) \end{cases}$$

Zadatak 2.5. Iz kutije u kojoj se nalazi 5 kuglica numeriranih brojevima od 1 do 5 izvlače se istovremeno tri kuglice (koje su numerirane brojevima i, j i k gdje su $i, j, k \in \{1, \dots, 5\}$). Odredite tablicu distribucije i funkciju distribucije slučajne varijable X definirane na sljedeći način:

$$X(\{i, j, k\}) = \min\{i, j, k\}, \ \ i, j, k \in \{1, \dots, 5\}.$$

Zadatak 2.6. U smjeru kretanja automobila nalaze se redom tri semafora koji rade nezavisno jedan od drugog. Na svakomu se s vjerojatnošću $p = 0.5$ pojavljuje crveno i s vjerojatnošću $q = 0.5$ zeleno svjetlo. Slučajna varijabla X predstavlja broj semafora pored kojih prolazi automobil do prvog zaustavljanja. Odredite tablicu distribucije i funkciju distribucije slučajne varijable X te nacrtajte graf funkcije distribucije.

Rješenje:
Tablica distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Funkcija distribucije:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ 1/2 & , x \in [0, 1) \\ 3/4 & , x \in [1, 2) \\ 7/8 & , x \in [2, 3) \\ 1 & , x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Zadatak 2.7. Odredite matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable zadane sljedećom tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

Rješenje:

$$E(X) = \frac{15}{16}, \quad \operatorname{Var} X = \frac{367}{256}.$$

Zadatak 2.8. Slučajna varijabla X zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ a & 1/8 & a-b^2 & b^2 & 1/4 & b \end{pmatrix},$$

gdje su a i b nepoznati parametri. Ako je očekivanje od X 25/8, odredite:

a) vrijednosti parametara a i b,

b) varijancu slučajne varijable X,

c) funkciju distribucije slučajne varijable X.

Rješenje: a) $a = \dfrac{3}{16}$, $b = \dfrac{1}{4}$ b) $\operatorname{Var} X = \dfrac{719}{64}$

c) Funkcija distribucije:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -1) \\ 3/16 & , x \in [-1, 0) \\ 5/16 & , x \in [0, 1) \\ 7/16 & , x \in [1, 3) \\ 1/2 & , x \in [3, 4) \\ 3/4 & , x \in [4, 8) \\ 1 & , x \in [8, \infty) \end{cases}$$

Zadatak 2.9. Ispitujemo ispravnost sustava koji se sastoji od tri komponente. Otkazivanje komponenti događa se nezavisno i vjerojatnost je otkazivanja n-te komponente

$$p_n = 0.2 + (n-1)\,0.1, \quad n \in \{1, 2, 3\}.$$

Odredite distribuciju, matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable kojom je modeliran broj komponenti koje su otkazale.

Rješenje:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.336 & 0.452 & 0.188 & 0.024 \end{pmatrix}, \quad EX = 0.9, \quad \operatorname{Var} \mathrm{X} = 0.61.$$

Zadatak 2.10. U spremniku se nalazi pet kutija: dvije su prazne, a u preostalim trima nalazi se po deset bombona. Izvlačimo jednu po jednu kutiju sve dok ne izvučemo praznu kutiju (izvlačenje se vrši bez vraćanja prethodno izvučenih kutija u spremnik). Kolika je vjerojatnost da izvučemo svih 30 bombona? Odredite distribuciju, matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable kojom je modeliran broj bombona koje smo izvukli.

Rješenje:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 \\ 2/5 & 3/10 & 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}, \quad EY = 10, \quad \operatorname{Var} \mathrm{Y} = 100.$$

Zadatak 2.11. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 & 1+\alpha \\ p & 2p & 3p \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

a) Odredite vrijednost parametra p.

b) Izračunajte matematičko očekivanje, drugi moment i treći apsolutni moment slučajne varijable X.

c) Izračunajte

$$P\left\{|X| \leq 1 + \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Rješenje:

a) $p = 1/6$,

b) $EX = \frac{\alpha+3}{3}$, $EX^2 = 1 + \frac{2}{3}\alpha(1+\alpha)$, $E|X|^3 = \begin{cases} (\alpha^3 + 6\alpha^2 + 3\alpha + 3)/3 & , \ 0 < \alpha \leq 1 \\ (2\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 2)/3 & , \ \alpha > 1 \end{cases}$,

c) $P\{|X| \leq 1 + \alpha/2\} = 1/3$.

Zadatak 2.12. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 3p & 1/8 & 1/8 & 2p & 1/8 & p \end{pmatrix}.$$

Izračunajte:

a) vrijednost parametra p,

b) matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = \min\{8, X\}$.

Rješenje:

a) $p = 5/48$,

b)

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 8 \\ 5/16 & 1/8 & 1/8 & 5/24 & 11/48 \end{pmatrix}, \quad EY = 221/48, \quad \operatorname{Var} Y = 18983/2304.$$

Zadatak 2.13. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 2p & 1/6 & 1/4 & 3p & 1/8 & p \end{pmatrix}.$$

Izračunajte:

a) vrijednost parametra p,

b) matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = \max\{5, X\} - 1$.

Zadatak 2.14. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Odredite distribuciju, funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = 3X^2 - 3$.

Zadatak 2.15. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & p & 0.3 & 3p & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Odredite vrijednost parametra p, distribuciju, funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = \left|X^3 - 1\right|$.

Zadatak 2.16. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & \pi/3 & \pi/2 & 2\pi/3 & 5\pi/6 \\ 0.25 & 0.2 & 0.3 & 0.15 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Odredite distribuciju, funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = 3 - 2\cos^2 X$.

Zadatak 2.17. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \pi/4 & \pi/2 & 3\pi/4 & \pi \\ p & 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Odredite vrijednost parametra p, distribuciju, funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = \sin X$ te izračunajte $P\{0 < Y \leq \sqrt{2}/2\}$.

Zadatak 2.18. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} -\pi/2 & -\pi/3 & 0 & \pi/3 & \pi/2 \\ 0.25 & 0.25 & p & 0.15 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

Odredite vrijednost parametra p, distribuciju, funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = \cos X$.

Zadatak 2.19. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} -\pi/2 & 0 & \pi/2 & \pi \\ p & p/2 & 2p & p/2 \end{pmatrix}.$$

Odredite vrijednost parametra p, distribuciju, funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = e^{|\sin X|}$.

Zadatak 2.20. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-1} & 1 & e & e^2 \\ 0.2 & 0.1 & p & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Odredite vrijednost parametra p, distribuciju, funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = (\ln X)^2$ te izračunajte $P\{Y \leq 1\}$.

Zadatak 2.21. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} e^{-3} & e^{-1} & 1 & e^3 & e^5 \\ p & 2p & 3p & 2p & 2p \end{pmatrix}.$$

Odredite vrijednost parametra p, distribuciju, funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = |\ln X|$.

Zadatak 2.22. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 3^{-3} & 3^{-1} & 1 & 3 & 3^3 \\ 0.3 & p & 2p & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Odredite vrijednost parametra p, distribuciju, funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = (\log_3 X)^2$.

Zadatak 2.23. Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \ln 2 & 2\ln 2 & 3\ln 2 & 4\ln 2 \\ 0.2 & p & 0.15 & 0.25 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

Odredite vrijednost parametra p, distribuciju, funkciju distribucije, očekivanje i varijancu slučajne varijable $Y = e^{-X}$.

Zadatak 2.24. Slučajna varijabla X zadana je distribucijom

$$P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Odredite distribuciju slučajne varijable $Y = \cos(\pi X)$.

Rješenje: $\mathcal{R}(Y) = \{-1, 1\}$, $P\{Y = -1\} = 2/3$, $P\{Y = 1\} = 1/3$.

Zadatak 2.25. Poznato je da je u velikom skladištu trgovine informatičkom opremom vjerojatnost pojavljivanja prijenosnog računala s greškom nastalom u proizvodnji jednaka 0.02. Pretpostavimo da iz tog skladišta biramo 10 prijenosnih računala. Odredite sljedeće vjerojatnosti:

a) vjerojatnost da je točno 5 prijenosnih računala s greškom,

b) vjerojatnost da su s greškom najviše 3 prijenosna računala;

c) vjerojatnost da je s greškom barem 6 prijenosnih računala.

Rješenje: a) $P\{X = 5\} = 0.000000728$.

Zadatak 2.26. U Bernoullijevoj shemi (n nezavisnih ponavljanja Bernoullijevog pokusa) zadana vjerojatnost uspjeha iznosi p, $p \in \langle 0, 1\rangle$. Odredite najmanji potreban broj pokusa koje treba provesti da bismo s vjerojatnošću r imali barem jedan uspjeh.

Rješenje: $n = \dfrac{\ln(1-r)}{\ln(1-p)}$.

Zadatak 2.27. Poznata osječka pizzeria primi u prosjeku 240 narudžbi tijekom jednog sata. Odredite vjerojatnost da u vremenskom periodu od jedne minute:

a) nije primljena niti jedna narudžba;

b) primljene su barem dvije narudžbe.

Rješenje: a) $P\{X=0\} = e^{-4}$, b) $P\{X \geq 2\} = 1 - 5e^{-4}$.

Zadatak 2.28. Neka telefonska centrala primi u prosjeku 120 poziva tijekom jednog sata. Zbog iznenadnog kvara na centrali tijekom jedne minute pozivi nisu primani. Kolika je vjerojatnost da u tom periodu centrali nije bilo upućeno više od 4 poziva?

Rješenje: $P\{X < 4\} = \dfrac{19e^{-2}}{3}$.

Zadatak 2.29. Proizvodi u tvornici, među kojima se neispravan proizvod nalazi s vjerojatnošću 0.007, pakuju se u kutije po 100 komada. Kolika je vjerojatnost da kutija ne sadrži niti jedan pokvaren proizvod, a kolika da sadrži dva ili više pokvarenih proizvoda?

Rješenje: $P\{X=0\} = 0.4954$, $P\{X \geq 2\} = 0.1554$.

Zadatak 2.30. Slučajnom pokusu bacanja nepravilno izrađenog novčića pripada dvočlani prostor elementarnih događaja $\{P, G\}$. Vjerojatnost realizacije pisma u jednom provođenju tog pokusa iznosi $p = 0.3$. Koliko je puta potrebno ponoviti taj slučajni pokus da bismo s vjerojatnošću 0.9 mogli tvrditi da se pismo realiziralo barem jednom?

Zadatak 2.31. Slučajan pokus sastoji se od bacanja pravilno izrađene igraće kockice četiri puta. Neka je broj pojavljivanja broja 5 vrijednost slučajne varijable X. Odredite zakon razdiobe slučajne varijable X, njezino očekivanje, varijancu te vjerojatnost da je broj 5 pao barem jednom.

Zadatak 2.32. Promotrimo sljedeću igru na sreću:

- u svakoj partiji igre jednom se bacaju četiri pravilno izrađene igraće kockice,
- igrač u svakoj partiji igre ulaže jednu kunu ("kladi" se na jednu kunu),
- u svakoj partiji igrač ili gubi ili nešto zarađuje. Ako se niti na jednoj kockici nije okrenula šestica, gubi uloženu kunu. Zarađuje prema sljedećoj shemi: dobiva jednu kunu za svaku šesticu koja se okrenula na bačenim kockicama i u tom slučaju zadržava i svoju uloženu kunu.

Izračunajte očekivani iznos igračevog dobitka (gubitka).

Rješenje: očekivanje je slučajne varijable kojom modeliramo igračev dobitak/gubitak -0.08 (ako igrač u svakoj partiji igre ulaže 1 kn za svakih sto odigranih partija, očekuje se gubitak od 8 kn).

Zadatak 2.33. Telefonist zaposlen u službi za korisnike nekog poduzeća zarađuje 10 kuna po primljenom pozivu klijenta. Poznato je da telefonist u tom poduzeću u danu primi u prosjeku 20 takvih poziva.

a) Odredite distribuciju slučajne varijable kojom modeliramo dnevnu zaradu telefonosta u tom poduzeću i odredite njegovu očekivanu dnevnu zaradu.

b) Izračunajte vjerojatnost da telefonist u jednom danu zaradi barem 180 kuna.

Rješenje:

a) $X \sim \mathcal{P}(20)$ - slučajna varijabla kojom se modelira broj poziva koje telefonist primi u jednom danu; $Y = 10\,X$ - slučajna varijabla kojom se modelira dnevna zarada telefonista; $EY = 200$.

b) $P\{Y \geq 180\} = 1 - \sum\limits_{k=0}^{17} \frac{20^k}{k!}\, e^{-20}$.

Zadatak 2.34. U pošiljci audio opreme nalazi se 100 mikrofona od kojih je 20 neispravno. Vlasnik trgovine audio opremom, koji ne zna broj neispravnih mikrofona u pošiljci, odlučuje da će za svoju trgovinu uzeti pošiljku ako među 10 slučajno odabranih mikrofona ne bude više od 3 neispravna.

a) Kolika je vjerojatnost da će trgovac prihvatiti pošiljku?

b) Što zaključujete o vjerojatnosti prihvaćanja pošiljke u slučaju da pošiljka sadrži jednak broj ispravnih i neispravnih mikrofona?

Rješenje:

a) $P\{X \leq 3\} = 0.89$,

b) pošiljka će s većim brojem neispravnih mikrofona biti prihvaćena s manjom vjerojatnošću.

Zadatak 2.35. Posuda sadrži 1000 lukovica tulipana, od kojih je 400 lukovica crvenih tulipana i 600 lukovica tulipana drugih boja. Iz te posude na slučajan način odaberemo 10 lukovica.

a) Kolika je vjerojatnost da smo odabrali točno pet lukovica crvenih tulipana?

b) Koliki je očekivani broj izvučenih lukovica crvenih tulipana?

Zadatke riješite pomoću hipergeometrijske i binomne distribucije.

Rješenje: primjenom hipergeometrijske distribucije dobivamo

a) $P\{X = 5\} = 0.201$,

b) $EX = 4$.

Zadatak 2.36. Student rješava pismeni ispit koji se sastoji od trideset pitanja od kojih svako nosi 5 bodova. Na svako pitanje ponuđena su tri odgovora od kojih je samo jedan točan. Pretpostavimo da odgovore na sva pitanja student odabire na slučajan način.

a) Odredite distribuciju slučajne varijable kojom modeliramo broj bodova koje student ostvaruje na tom ispitu te odredite očekivani broj ostvarenih bodova.

b) Izračunajte vjerojatnost da takvim rješavanjem ispita student ostvari barem 80 bodova.

Rješenje:

a) $X \sim \mathcal{B}(30, 1/3)$ - slučajna varijabla kojom se modelira broj točnih odgovora na ispitu; $Y = 5\,X$ - slučajna varijabla kojom se modelira broj bodova na ispitu; $E\,Y = 50$.

b) $P\{Y \geq 80\} = 1 - \sum\limits_{k=1}^{15} \binom{30}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{30-k}$.

Zadatak 2.37. U bubnju se nalazi sedam omotnica: tri su prazne, a u preostalim četirima nalazi se po 100 kuna. Igrač izvlači jednu po jednu omotnicu sve dok ne izvuče praznu (izvlačenje se vrši bez vraćanja prethodno izvučenih omotnica u bubanj).

a) Odredite distribuciju slučajne varijable X kojom je modeliran broj izvučenih omotnica.

b) Odredite transformaciju slučajne varijable X kojom je modeliran osvojeni iznos kuna te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu. Interpretirajte dobivene rezultate.

c) Kolika je vjerojatnost da igrač osvoji barem 200 kuna?

Rješenje:

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3/7 & 2/7 & 6/35 & 3/35 & 1/35 \end{pmatrix}$.

b) $Y = 100(X - 1)$ - slučajna varijabla kojom je modeliran osvojeni iznos kuna; $EY = 100$; $\operatorname{Var} Y = 100^2(51/35)$.

c) $P\{Y \geq 200\} = P\{X \geq 3\} = 2/7$.

Zadatak 2.38. U šeširu se nalazi osam kutijica: četiri su prazne, a u preostalim četirima nalaze se ključevi četiriju sefova od kojih svaki sadrži po jedan dijamant. Igrač izvlači jednu po jednu kutijicu sve dok ne izvuče praznu (izvlačenje se vrši bez vraćanja prethodno izvučenih kutijica u šešir).

a) Odredite distribuciju slučajne varijable X kojom je modeliran broj izvučenih kutijica.

b) Odredite transformaciju slučajne varijable X kojom je modeliran broj osvojenih dijamanata te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu. Interpretirajte dobivene rezultate.

c) Kolika je vjerojatnost da igrač osvoji barem dva dijamanta?

Rješenje:

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/2 & 2/7 & 1/7 & 2/35 & 1/70 \end{pmatrix}$.

b) $Y = X - 1$ - slučajna varijabla kojom je modeliran broj osvojenih dijamanata; $EY = 4/5$; $\operatorname{Var} Y = 118/175$.

c) $P\{Y \geq 2\} = P\{X \geq 3\} = 4/7$.

Zadatak 2.39. Automat za igre na sreću u nekoj kockarnici programiran je tako da se prirodan broj n realizira s vjerojatnošću $2/3^n$, tj.

$$P\{X = n\} = \frac{2}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X te pomoću Čebiševljeve nejednakosti ocijenite vjerojatnost da realizacija slučajne varijable X od njezinog očekivanja odstupa za barem dvije standardne devijacije.

Rješenje: $EX = 3/2$, $\text{Var}\, X = 3/4$, $P\left\{\left|X - \frac{3}{4}\right| \geq \sqrt{3}\right\} \leq \frac{1}{4}$.

Zadatak 2.40. Slučajna varijabla X ima binomnu distribuciju s parametrima n i p, tj. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Odredite distribuciju slučajne varijable $Y = 3X + 1$ te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu.

Rješenje: $EY = 3np + 1$, $\text{Var}\, X = 9np(1 - p)$.

Zadatak 2.41. Za zadane realne funkcije realne varijable odredite vrijednost nepoznate konstante tako da svaka od njih bude funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable:

a) $f_X(x) = \begin{cases} ax & , 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$,

b $g_X(x) = \begin{cases} b \cos 2x & , x \in [-\pi/4, \pi/4\rangle \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$,

c) skicirajte grafove funkcija f i g.

Rješenje: a) $a = 2$, b) $b = 1$.

Zadatak 2.42. Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}.$$

a) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i skicirajte njezin graf.

b) Izračunajte $P\{0.25 < X \leq 2\}$.

Rješenje:

a) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^2 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$.

b) $P\{0.25 < X \leq 2\} = 15/16$.

Zadatak 2.43. Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} \cos 2x & , x \in [-\pi/4, \pi/4\rangle \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}.$$

a) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i skicirajte njezin graf.

b) Izračunajte $P\{0 < X \leq \pi/8\}$.

Rješenje:

a) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < -\pi/4 \\ \frac{1}{2} + \cos(x)\sin(x) & , \ -\pi/4 \leq x < \pi/4 \\ 1 & , \ x \geq \pi/4 \end{cases}$.

b) $P\{0.25 < X \leq 2\} = 15/16$.

Zadatak 2.44. Zadana je funkcija gustoće slučajne varijable X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \ 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & , \ 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}.$$

Izračunajte funkciju distribucije slučajne varijable X te skicirajte grafove funkcije gustoće i funkcije distribucije.

Rješenje: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{1}{3}x & , \ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}(2x-1) & , \ 1 \leq x < 2 \\ 1 & , \ x \geq 2 \end{cases}$.

Zadatak 2.45. Pretpostavimo da je vrijeme trajanja u godinama nekog elektroničkog uređaja modelirano slučajnom varijablom X s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & , \ x \geq 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases}.$$

a) Odredite vjerojatnost da će taj uređaj trajati barem tri godine.

b) Odredite očekivano vrijeme trajanja tog uređaja.

Rješenje:

a) $P\{X \geq 3\} = e^{-6} \approx 0.0025$.

b) $EX = 1/2$.

Zadatak 2.46. Vrijeme trajanja u mjesecima nekog elektroničkog uređaja modelirano je slučajnom varijablom X s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} kxe^{-x^2/9} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}.$$

a) Odredite vrijednost konstante k tako da f_X bude dobro definirana funkcija gustoće.

b) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X.

c) Što je vjerojatnije - da se uređaj pokvari tijekom prva tri mjeseca upotrebe ili da mu vrijeme trajanja bude dulje od mjesec dana? Ako uređaj ima jamstvo u trajanju od mjesec dana, kolika je vjerojatnosti da će uređaj trebati popravak za vrijeme trajanja jamstvenog roka?

Rješenje:

a) $k = 2/9$.

c) $P\{X \leq 3\} = (e-1)/e \approx 0.63$, $P\{X > 1\} = e^{-1/9} \approx 0.89$.

Zadatak 2.47. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} k \sin\left(\frac{x}{3}\right) & , x \in \langle 0, \pi \rangle \\ 0 & , x \text{ inače} \end{cases} .$$

a) Izračunajte vrijednost konstante k.

b) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i izračunajte $P\{\pi/2 \leq X < 2\pi\}$.

c) Izračunajte matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje:

a) $k = 2/3$.

b) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 2 - 2\cos(x/3) & , 0 \leq x < \pi \\ 1 & , x \geq \pi \end{cases}$,

$P\{\pi/2 \leq X < 2\pi\} = \sqrt{3} - 1$.

c) $EX = 3\sqrt{3} - \pi$, $\operatorname{Var} X = -2\pi^2 + 12\sqrt{3}\pi - 45$.

Zadatak 2.48. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cos\left(\frac{x}{3}\right) & , x \in \langle 0, \pi/2 \rangle \\ 0 & , x \text{ inače} \end{cases} .$$

a) Izračunajte vrijednost konstante k.

b) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i izračunajte $P\{\pi/4 \leq X < \pi\}$.

c) Izračunajte matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Rješenje:

a) $k = 2/3$.

b) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 2\sin(x/3) & , 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 & , x \geq \pi/2 \end{cases}$,

$P\{\pi/4 \leq X < \pi\} = (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})/\sqrt{2}$.

c) $EX = \frac{\pi}{2} + 3(\sqrt{3} - 2)$, $\operatorname{Var} X = 6\pi^2 + 36\sqrt{3} - 81$.

Zadatak 2.49. Svakog radnog dana osoba autobusom odlazi na posao. Autobusi na stanicu dolaze redovito svakih pet minuta. Trenutak dolaska osobe na stanicu smatramo slučajnim trenutkom između dolaska dvaju uzastopnih autobusa. Vrijeme koje protekne od dolaska osobe na stanicu do dolaska prvog sljedećeg autobusa (vrijeme čekanja) modeliramo slučajnom varijablom X za koju je poznato da je vjerojatnost da osoba autobus čeka najviše x vremena proporcionalna tom vremenu čekanja x.

a) Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable X.

b) Odredite vjerojatnost da osoba autobus čeka

- manje od dvije minute,
- više od tri minute,
- manje od dvije minute ili barem tri minute,
- barem dvije, ali manje od tri minute.

Rješenje: a) $X \sim \mathcal{U}(0,5)$.

Zadatak 2.50. Na stroju koji proizvodi bakrenu žicu povremeno dolazi do smetnji koje uzrokuju nepravilnost na dijelu žice proizvedenom u trenutku smetnje. Duljinu žice (u metrima) između dviju uzastopnih nepravilnosti možemo modelirati slučajnom varijablom s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} k(1+x)^{-3} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases}.$$

a) Odredite vrijednost konstante k.

b) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X.

c) Kolika je vjerojatnost da se nepravilnost na žici pojavi između 0.4 i 0.45 metara?

Rješenje:

a) $k = 2$,

b) $F_X(x) = \begin{cases} 1-(1+x)^{-2} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \leq 0 \end{cases},$

c) $P\{0.4 \leq X \leq 0.45\} = 0.0346$.

Zadatak 2.51. Unutar kruga radijusa R na slučajan način biramo točku. Nađite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable koja je definirana kao udaljenost odabrane točke od središta kruga.

Rješenje: $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x^2/R^2 & , \ 0 \leq x < R \\ 1 & , \quad x \geq R \end{cases}.$

Zadatak 2.52. Na slučajan način odabiremo točku T unutar kvadrata stranice 2. Neka je vrijednost neprekidne slučajne varijable X najmanja udaljenost te točke od stranice kvadrata.

a) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X.

b) Odredite matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X.

Zadatak 2.53. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće:

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1 & , \ -1 \leq x < 0 \\ 1-x & , \ 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \ \text{inače.} \end{cases}.$$

Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu.

Zadatak 2.54. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x} & , \ x \in \langle 0, \infty \rangle \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X te izračunajte njezino matematičko očekivanje.

Zadatak 2.55. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} k\dfrac{x}{a^2}\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & , \ x \in \langle 0, \infty \rangle \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X, odredite funkciju distribucije slučajne varijable X, njezino očekivanje i varijancu te izračunajte $P\{X \leq 2\}$.

Zadatak 2.56. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{kx}{1+x} & , \ x \in \langle 0, e-1 \rangle \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X, odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i izračunajte $P\{X \leq 3\}$.

Zadatak 2.57. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ke^{2x} & , \ x \in \langle -\infty, 0 \rangle \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X te izračunajte njezinu funkciju distribucije, matematičko očekivanje, varijancu i $P\{0 \leq X < 13579\}$.

Zadatak 2.58. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ka^{-2x} & , \ x \in \langle 0, +\infty \rangle \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases},$$

gdje je $a > 0$ i $a \neq 1$, bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X, izračunajte njezinu funkciju distribucije, očekivanje i varijancu te $P\{-2468 \leq X < 0\}$.

Zadatak 2.59. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f_X(x) = \begin{cases} k \ln \sqrt{x} & , \ x \in \langle 1, e \rangle \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X te odredite njenu funkciju distribucije F_X i vjerojatnost $P\{0 \leq X < e/2\}$.

Zadatak 2.60. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{x^2} & , \ x \in [0, e] \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X te odredite vrijednost njezine funkcije distribucije za $x = e - 1$.

Zadatak 2.61. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} kx^2e^{x^3-1} & , \ x \in [0, e] \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X te odredite vrijednost njezine funkcije distribucije za $x = 1$.

Zadatak 2.62. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ke^{2-x} & , \ x \in [0, +\infty\rangle \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X te izračunajte njezino matematičko očekivanje.

Zadatak 2.63. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} kx \sin x & , \ x \in [0, \pi] \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X te odredite njezino matematičko očekivanje.

Zadatak 2.64. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} k(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X te odredite njezino matematičko očekivanje, varijancu i $P\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{7}{4}\}$.

Zadatak 2.65. Odredite vrijednost konstante k tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} kx(x-1)^2, & x \in [0, 3] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

bude funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X te odredite njezino matematičko očekivanje, varijancu i $P\{2 < X \leq 4\}$.

Zadatak 2.66. Neka je F_X funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable X. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $Y = -X$.

Rješenje: $F_Y(y) = 1 - F_X(-y)$.

Zadatak 2.67. Slučajna varijabla X ima funkciju gustoće $f_X(x)$. Odredite funkcije gustoća sljedećih slučajnih varijabli:

a) $Y = e^X$, b) $Y = e^{-X}$,

c) $Y = \sqrt{X}$, $X > 0$, d) $Y = \mathrm{sh}X = \dfrac{e^X - e^{-X}}{2}$.

Rješenje:

a) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} f_X(\ln y) & , \ y > 0 \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$,

b) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} f_X(-\ln y) & , \ y > 0 \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$,

c) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y f_X(y^2) & , \ y \geq 0 \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$.

Zadatak 2.68. Neka je $f_X(x)$ funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X. Odredite funkcije gustoća slučajnih varijabli $X^3 + 1$, $X^5 + 15$, $X^7 - 7$, $X\sqrt{X}$, $-e^X$, $X - e^{-X}$, e^{X^2}.

Zadatak 2.69. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2/3 & , \ -1 < x < 2 \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases} .$$

Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = X^2$.

Rješenje: $f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y}/3 & , \ 0 < y < 1 \\ \sqrt{y}/6 & , \ 1 \leq y < 4 \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$.

Zadatak 2.70. Slučajna varijabla X ima Cauchyjevu distribuciju s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Odredite funkciju gustoće i funkciju distribucije slučajne varijable

a) $Y = X^2$,

b) $Z = 1/X$.

Rješenje:

a) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)} & , \ y > 0 \\ 0 & , \ y \leq 0 \end{cases},$

b) $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $y \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.71. Slučajna varijabla X ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, tj. $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Odredite funkciju gustoće i funkciju distribucije slučajne varijable

a) $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

b) $Z = -\ln X$.

Rješenje:

a) $a > 0: \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1/a & , \ b < y < b - a \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases},$

$a < 0: \quad f_Y(y) = \begin{cases} -1/a & , \ b < y < a + b \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases},$

b) $f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z} & , \ z > 0 \\ 0 & , \ z \leq 0 \end{cases}.$

Zadatak 2.72. Slučajna varijabla X ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable $Y = \cos X$.

Zadatak 2.73. Slučajna varijabla X ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle 0, 5\rangle$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $Y = e^{-X}$.

Zadatak 2.74. Slučajna varijabla X ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle 1, 2\rangle$, tj. $X \sim \mathcal{U}(1, 2)$. Odredite funkciju gustoće i funkciju distribucije slučajne varijable $Y = -2X + 1$.

Zadatak 2.75. Slučajna varijabla X ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle 2, 4\rangle$. Odredite funkciju gustoće i funkciju distribucije slučajne varijable $Y = e^X$.

Zadatak 2.76. Slučajna varijabla X ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle 1, 3\rangle$. Odredite funkciju gustoće i funkciju distribucije slučajne varijable $Y = \ln{(X)}$.

Zadatak 2.77. Slučajna varijabla X ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $Y = 1/X^2$.

Zadatak 2.78. Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda = 7$. Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = \ln X$.

Zadatak 2.79. Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $1/2$. Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti i funkciju distribucije vjerojatnosti slučajne varijable $Y = 1/X$.

Zadatak 2.80. Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda = 1$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $Y = (X-1)^2$.