# Poglavlje 3

# Slučajni vektor

Ukoliko u jednom istraživanju za dani slučajni pokus pratimo nekoliko različitih slučajnih varijabli, moguće veze među njima nećemo dokučiti ako ih proučavamo samo svaku za sebe. Međutim, vrlo su često veze između pojedinih slučajnih varijabli istog slučajnog pokusa od primarnog interesa.

**Primjer 3.1.** *Broj komaraca na području grada Osijeka tijekom lipnja ovog ljeta jest slučajna varijabla $X$. Količina je oborina u svibnju na istom području također slučajna varijabla $Y$. Teoretski je za očekivati da između tih dviju slučajnih varijabli postoji veza. Da bismo tu vezu opisali, moramo naučiti opisivati uređen par slučajnih varijabli $(X, Y)$.*

Od interesa je, dakle, izraditi matematički model koji omogućuje opisivanje nekoliko slučajnih varijabli danog slučajnog pokusa istovremeno. Radi ilustracije ideje modela proučimo jednostavan primjer slučajnog pokusa koji se sastoji od izvlačenja dvije kuglice iz iste kutije.

**Primjer 3.2.** *Iz kutije koja sadrži $n$ bijelih i $m$ crnih kuglica izvlačimo dvije kuglice bez vraćanja u kutiju. Neka slučajna varijabla $X$ prima vrijednost 1 ako je u prvom izvlačenju izvučena bijela kuglica, a 0 ako je u prvom izvlačenju izvučena crna kuglica. Analogno, neka slučajna varijabla $Y$ prima vrijednost 1 ako je u drugom izvlačenju izvučena bijela kuglica, a 0 ako je u drugom izvlačenju izvučena crna kuglica.*

*Rezultate tog slučajnog pokusa možemo opisati dvjema slučajnim varijablama: $X$ i $Y$. Ako od njih napravimo uređeni par slučajnih varijabli $(X, Y)$, onda je skup svih mogućih ishoda $\mathcal{R}(X, Y) = \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$. Ovdje je prvo mjesto u paru rezervirano za ishode prvog pokusa (odnosno slučajnu varijablu $X$), a drugo mjesto rezervirano je za ishode drugog pokusa (odnosno slučajnu varijablu $Y$).*

*Vjerojatnosna su svojstva tog uređenog para slučajnih varijabli potpuno su određena poznavanjem brojeva:*

$$p_{(1,1)} = P(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = P\{(X, Y) = (1,1)\} = \frac{n}{n+m}\,\frac{n-1}{n+m-1},$$

$$p_{(1,0)} = P(\{X=1\} \cap \{Y=0\}) = P\{(X,Y)=(1,0)\} = \frac{n}{n+m}\,\frac{m}{n+m-1},$$
$$p_{(0,1)} = P(\{X=0\} \cap \{Y=1\}) = P\{(X,Y)=(0,1)\} = \frac{m}{n+m}\,\frac{n}{n+m-1},$$
$$p_{(0,0)} = P(\{X=0\} \cap \{Y=0\}) = P\{(X,Y)=(0,0)\} = \frac{m}{n+m}\,\frac{m-1}{n+m-1},$$

*koje smo izračunali korištenjem poznate relacije*

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B),$$

*ako je* $P(B) > 0$ *(vidi poglavlje 1.9).*

U ovom poglavlju definirat ćemo **slučajni vektor** te opisati specijalno diskretan i neprekidan slučaj analogno kao diskretnu i neprekidnu slučajnu varijablu.

Primjer 3.2 i dosadašnja saznanja o slučajnim varijablama upućuju na to da je potrebno $n$-dimenzionalan, $n \in \mathbb{N}$, slučajni vektor definirati kao funkciju s prostora elementarnih događaja $\Omega$ u skup $\mathbb{R}^n$. Međutim, s obzirom da vjerojatnost općenito nije definirana na $\mathcal{P}(\Omega)$, ne možemo svaku takvu funkciju zvati slučajnim vektorom. Analogno kao u poglavlju 2.3, $n$-dimenzionalni slučajni vektor definiramo na sljedeći način.

**Definicija 3.1.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor pridružen slučajnom pokusu. Funkciju* $(X_1, \ldots, X_n)$ *koja svakom ishodu pokusa pridružuje uređenu* $n$*-torku realnih brojeva* $(x_1, \ldots, x_n)$ *zovemo* **$n$-dimenzionalan slučajni vektor** *ako vrijedi:*

$$\{X_1 \le x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \le x_n\} \in \mathcal{F}$$

*za svaki* $x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Zbog jednostavnosti uvest ćemo sljedeću oznaku:

$$\{X_1 \le x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \le x_n\} = \{X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\}.$$

Slično kao u jednodimenzionalnom slučaju (poglavlje 2.3), vjerojatnosna svojstva svakog slučajnog vektora opisujemo **funkcijom distribucije**. Funkcija distribucije slučajnog vektora dana je sljedećom definicijom.

**Definicija 3.2.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor pridružen slučajnom pokusu i* $(X_1, \ldots, X_n)$ *slučajni vektor. Funkciju*

$$\begin{gathered} F : \mathbb{R}^n \to [0,1], \\ F(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\} \end{gathered} \tag{3.1}$$

*zovemo* **funkcija distribucije slučajnog vektora** $(X_1, \ldots, X_n)$.

Neka svojstva funkcije distribucije slučajnog vektora izreći ćemo za dvodimenzionalan slučaj.[1]

### Svojstva funkcije distribucije dvodimenzionalnoga slučajnog vektora

Neka je zadan dvodimenzionalan slučajni vektor $(X,Y)$ svojom funkcijom distribucije $F(x,y)$. Tada vrijedi:

1. Za realne brojeve $x_1, x_2, y$, takve da je $x_1 < x_2$, vrijedi $F(x_1,y) \leq F(x_2,y)$.
2. Neka su $x, y_1, y_2$ realni brojevi. Ako je $y_1 < y_2$, onda je $F(x,y_1) \leq F(x,y_2)$.
3. $$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = F(-\infty,y) = 0,$$ $$\lim_{y\to-\infty} F(x,y) = F(x,-\infty) = 0,$$ $$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x,y) = F(\infty,\infty) = 1.$$
4. Neprekidnost zdesna u svakoj varijabli: $$\lim_{x\downarrow x_0} F(x,y_0) = \lim_{y\downarrow y_0} F(x_0,y) = F(x_0,y_0).$$
5. Za $x_1 < x_2$ i $y_1 < y_2$ jest $$F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) \geq 0.$$

**Zadatak 3.1.** Korištenjem svojstava vjerojatnosti dokažite navedena svojstva funkcije distribucije $F(x,y)$.

Kao i kod jednodimenzionalnih slučajnih varijabli razmatrat ćemo diskretan i neprekidan tip slučajnih vektora kod kojih se funkcija distribucije može računati korištenjem tablice distribucije (diskretan slučaj), odnosno funkcije gustoće (neprekidan slučaj). Također ćemo, zbog jednostavnosti zapisa i lakšeg razumijevanja dokaza, uglavnom razmatranja provoditi na dvodimenzionalnom slučaju, dok ćemo za višedimenzionalne slučajeve samo navesti analogne rezultate.

**Primjer 3.3.** *Igra se temelji na bacanju dvaju pravilno izrađenih novčića. U jednoj partiji igre igrač osvaja one novčiće na kojima se pri bacanju realizirala glava, dok novčiće na kojima se realiziralo pismo ne osvaja. Prema tome, ishod bacanja tih dvaju novčića možemo modelirati dvodimenzionalnim diskretnim slučajnim vektorom* $(X,Y)$*, gdje je*

[1] Poopćenje za $n$-dimenzionalan slučajni vektor čitatelj može naći u [26, str. 267].

*$X$ slučajna varijabla koja prima vrijednost 1 ako se pri bacanju prvog novčića realizirala glava, a vrijednost 0 ako se realiziralo pismo,*

*$Y$ slučajna varijabla koja prima vrijednost 1 ako se pri bacanju drugog novčića realizirala glava, a vrijednost 0 ako se realiziralo pismo.*

*Dakle, $(X,Y)$ je slučajni vektor koji prima vrijednosti iz skupa*

$$\mathcal{R}(X,Y) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

*s vjerojatnostima*

$$p(0,0) = P\{X=0, Y=0\} = \frac{1}{4}, \qquad p(0,1) = P\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{4},$$
$$p(1,0) = P\{X=1, Y=0\} = \frac{1}{4}, \qquad p(1,1) = P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{4}.$$

*Ako želimo odrediti funkciju distribucije $F\colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ tog slučajnog vektora, uočimo:*

*za $(x,y) \in (\langle -\infty, 0\rangle \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \langle -\infty, 0\rangle)$ je $P\{X \le x, Y \le y\} = 0$,*

*za $(x,y) \in [0,1\rangle \times [0,1\rangle$ je*

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X=0, Y=0\} = \frac{1}{4},$$

*za $(x,y) \in [0,1\rangle \times [1,\infty\rangle$ je*

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{2},$$

*za $(x,y) \in [1,\infty\rangle \times [0,1\rangle$ je*

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=0\} = \frac{1}{2},$$

*za $(x,y) \in [1,\infty\rangle \times [1,\infty\rangle$ je*

$$P\{X \le x, Y \le y\} =$$
$$= P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} + P\{X=1, Y=1\} = 1.$$

*Dakle, funkcija distribucije slučajnog vektora $(X,Y)$ definirana je pravilom*

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in (\langle -\infty, 0\rangle \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \langle -\infty, 0\rangle) \\ 1/4, & (x,y) \in [0,1\rangle \times [0,1\rangle \\ 1/2, & (x,y) \in [0,1\rangle \times [1,\infty\rangle \\ 1/2, & (x,y) \in [1,\infty\rangle \times [0,1\rangle \\ 1, & (x,y) \in [1,\infty\rangle \times [1,\infty\rangle. \end{cases}$$

## 3.1 Diskretan dvodimenzionalan slučajni vektor

Analogno kao kod diskretne slučajne varijable, diskretan slučajni vektor $(X,Y)$ prima vrijednosti iz konačnog ili prebrojivog skupa

$$\mathcal{R}(X,Y) = \{(x_i, y_j) : (i,j) \in I\}, \quad I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

a njegova je funkcija distribucije (tj. vjerojatnosna svojstva) potpuno određena poznavanjem brojeva

$$p(x_i, y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \quad (i,j) \in I \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Naime, za funkciju distribucije vrijedi:

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p(x_i, y_j).$$

Niz brojeva definiran izrazom (3.2) zvat ćemo **distribucija diskretnoga slučajnog vektora** $(X, Y)$. Da bismo pojednostavnili zapis distribucije slučajnog vektora, u nastavku ćemo teksta pisati $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, podrazumijevajući pod tim da je skup indeksa najviše $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a zapravo sadrži samo one indekse koji se pojavljuju u konkretnom slučaju.

**Primjer 3.4.** *Promatrajmo slučajni pokus koji se sastoji od jednog bacanja pravilno izrađene igraće kocke i jednog bacanja pravilno izrađenog novčića. Skup elementarnih događaja ovog pokusa jest skup*

$$\Omega = \{\{1,P\},\{2,P\},\{3,P\},\{4,P\},\{5,P\},\{6,P\},$$
$$\{1,G\},\{2,G\},\{3,G\},\{4,G\},\{5,G\},\{6,G\}\}.$$

*Neka slučajna varijabla $X$ daje broj koji se okrenuo na kocki, a slučajna varijabla $Y$ daje 1 ako je bacanjem novčića palo pismo i 0 ako je bacanjem novčića pala glava. U tom pokusu bacanje kocke i novčića ne ovise jedno o drugom pa vrijedi:*

$$p(1,1) = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12},$$
$$p(1,0) = P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

*Analogno dobijemo da je*

$$p(i,j) = P\{X = i, Y = j\} = \frac{1}{12}, \quad i \in \{1,2,3,4,5,6\}, \ \ j \in \{0,1\}.$$

**Primjer 3.5.** *Promatrajmo sljedeću igru: prvo bacamo pravilno izrađenu igraću kockicu. Ako se okrenuo broj 6, ostvarujemo pravo na bacanje pravilno izrađenog novčića, pri čemu osvajamo bod ako padne pismo, a u suprotnom gubimo igru.*

*Taj pokus možemo opisati skupom elementarnih događaja*

$$\Omega = \{(1,N),(2,N),(3,N),(4,N),(5,N),(6,I_p),(6,I_g)\},$$

*gdje $N$ znači da drugu igru ne igramo, $I_p$ da drugu igru igramo i da se u njoj dogodilo pismo, a $I_g$ da drugu igru igramo i da se u njoj nije dogodilo pismo.*

*Neka je $X$ slučajna varijabla koja prima vrijednost 1 ako se pri bacanju kockice realizirao broj 6, a u suprotnom prima vrijednost 0. Neka je $Y$ slučajna varijabla koja prima vrijednost 1 ako je igrač osvojio bod, a u suprotnom prima vrijednost 0. Osvajanje boda u igri opisano je realizacijom događaja $\{(X,Y) = (1,1)\}$. Distribucija je tog slučajnog vektora sljedeća:*

$$p(0,0) = P\{X = 0, Y = 0\} = P(\{Y = 0\} \mid \{X = 0\})\, P\{X = 0\} = 1 \cdot \frac{5}{6},$$
$$p(0,1) = P\{X = 0, Y = 1\} = P(\{Y = 1\} \mid \{X = 0\})\, P\{X = 0\} = 0,$$
$$p(1,0) = P\{X = 1, Y = 0)\} = P(\{Y = 0\} \mid \{X = 1\})\, P\{X = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12},$$
$$p(1,1) = P\{X = 1, Y = 1\} = P(\{Y = 1\} \mid \{X = 1\})\, P\{X = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Uočimo da za niz brojeva $(p(x_i, y_j), i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N})$ koji definira distribuciju diskretnog dvodimenzionalnog slučajnog vektora vrijedi:

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ za sve $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$,
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$.

Ukoliko je skup vrijednosti slučajnog vektora $(X, Y)$ konačan, tj. slučajni vektor prima vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X, Y) = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, njegova se distribucija pregledno može prikazati tablicom 3.1 koju zovemo **tablica distribucije dvodimenzionalnoga diskretnog slučajnog vektora**.[2]

| $X \diagdown Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $\cdots$ | $y_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p(x_1, y_1)$ | $p(x_1, y_2)$ | $p(x_1, y_3)$ | $\cdots$ | $p(x_1, y_n)$ |
| $x_2$ | $p(x_2, y_1)$ | $p(x_2, y_2)$ | $p(x_2, y_3)$ | $\cdots$ | $p(x_2, y_n)$ |
| $\vdots$ | | | | | |
| $x_m$ | $p(x_m, y_1)$ | $p(x_m, y_2)$ | $p(x_m, y_3)$ | $\cdots$ | $p(x_m, y_n)$ |

Tablica 3.1: Tablica distribucije diskretnog slučajnog vektora $(X, Y)$ sa skupom vrijednosti $\mathcal{R}(X, Y) = \{(x_i, y_j) : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$

Tako je, na primjer, sljedećom tablicom dana distribucija slučajnog vektora $(X, Y)$ iz primjera 3.5:

| $X \diagdown Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $5/6$ | 0 |
| 1 | $1/12$ | $1/12$ |

Ukoliko je na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ dan slučajni vektor $(X, Y)$, onda su komponente tog slučajnog vektora, tj. funkcije $X : \Omega \to \mathbb{R}$ i $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, slučajne varijable na tom istom vjerojatnosnom prostoru. Njihove distribucije nazivamo **marginalnim distribucijama** slučajnog vektora $(X, Y)$. U nastavku ćemo poglavlja pokazati kako iz distribucije slučajnog vektora možemo izračunati njegove marginalne distribucije.

**Primjer 3.6.** *Iz kutije koja sadrži tri kupona s oznakama 1, 2 i 3 izvlačimo dva kupona bez vraćanja u kutiju. Rezultat izvlačenja modeliramo slučajnim vektorom $(X, Y)$, gdje je $X$ slučajna varijabla kojom je modeliran rezultat prvog izvlačenja, a $Y$ slučajna varijabla kojom je modeliran rezultat drugog izvlačenja. Distribucija slučajnog vektora $(X, Y)$ dana je tablicom*

[2] Takav zapis distribucije slučajnog vektora možemo lako prilagoditi i za slučajni vektor s prebrojivim skupom vrijednosti analogno kao kod tablica distribucije slučajne varijable.

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/6 | 1/6 |
| 2 | 1/6 | 0 | 1/6 |
| 3 | 1/6 | 1/6 | 0 |

*Slučajne varijable $X$ i $Y$ imaju isti skup vrijednosti: $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y) = \{1, 2, 3\}$. Koristeći činjenicu da familija skupova $\{\{Y = 1\}, \{Y = 2\}, \{Y = 3\}\}$ čini particiju skupa $\Omega$, možemo izračunati $P\{X = i\}$ za $i = 1, 2, 3$ na sljedeći način:*

$$P\{X = i\} = P\{X = i, Y = 1\} + P\{X = i, Y = 2\} + P\{X = i, Y = 3\} = \frac{1}{3},$$

*i=1,2,3. Dakle, marginalna distribucija komponente $X$ slučajnog vektora $(X, Y)$ dana je tablicom*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

*Sličnim postupkom možemo izračunati i marginalnu distribuciju komponenate $Y$ slučajnog vektora $(X, Y)$:*

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

*Uočimo da su obje marginalne distribucije u tom primjeru jednake, međutim, slučajne varijable $X$ i $Y$ ni u kom slučaju nisu jednake slučajne varijable. Naime, slučajne varijable $X$ i $Y$ definirane na istom vjerojatnosnom prostoru jednake su ako je $X(\omega) = Y(\omega)$ za sve $\omega \in \Omega$. U našem je slučaju čak nemoguće da je $X(\omega) = Y(\omega)$ za bilo koji $\omega$ jer bi to značilo da je u oba izvlačenja izvučen isti kupon, što se u spomenutom pokusu ne može dogoditi. Za slučajne varijable koje imaju iste distribucije reći ćemo da su* **jednako distribuirane slučajne varijable**, *oznaka $X \stackrel{D}{=} Y$.*

U primjeru 3.6 pokazan je način koji je moguće primijeniti za računanje marginalnih distribucija općenito kod diskretnih dvodimenzionalnih slučajnih vektora. Opišimo sada općenito način kako se iz distribucije diskretnog slučajnog vektora mogu dobiti marginalne distribucije.

Neka je $(X, Y)$ dvodimenzionalan diskretan slučajni vektor sa skupom vrijednosti $\{(x_i, y_j) : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ i distribucijom

$$p(x_i, y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \quad i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da za sve $i \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$P\{X = x_i\} = P\{X = x_i, Y \in \mathbb{R}\} = \sum_{j \in \mathbb{N}} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j),$$

a ti brojevi određuju marginalnu distribuciju komponente $X$ slučajnog vektora $(X, Y)$. Analogno možemo izračunati i marginalnu distribuciju komponente $Y$. Dakle, ako definiramo:

$$\begin{aligned} p_X(x_i) &= \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j), \quad i \in \mathbb{N}, \\ p_Y(y_j) &= \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j), \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

tada skup vrijednosti $\mathcal{R}(X) = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ i niz $(p_X(x_i),\ i \in \mathbb{N})$ određuju **marginalnu distribuciju komponente** $X$ slučajnog vektora $(X, Y)$, a skup vrijednosti $\mathcal{R}(Y) = \{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ i niz $(p_Y(y_j),\ j \in \mathbb{N})$ određuju **marginalnu distribuciju komponente** $Y$ toga slučajnog vektora.

Marginalne se distribucije lako računaju u slučaju konačnog skupa vrijednosti slučajnog vektora koristeći tablični zapis distribucije. Naime, ako je distribucija dana tablicom 3.1, onda sumiranjem vrijednosti u istom stupcu dobijemo vjerojatnost $P\{Y = y_j\} = p_Y(y_j)$, a sumiranjem vrijednosti u istom retku vjerojatnosti $P\{X = x_i\} = p_X(x_i)$, pa tablicu 3.1 možemo proširiti kao što je prikazano tablicom 3.2.

| $X \diagdown Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $\cdots$ | $y_n$ | $p_X(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p(x_1, y_1)$ | $p(x_1, y_2)$ | $p(x_1, y_3)$ | $\cdots$ | $p(x_1, y_n)$ | $p_X(x_1)$ |
| $x_2$ | $p(x_2, y_1)$ | $p(x_2, y_2)$ | $p(x_2, y_3)$ | $\cdots$ | $p(x_2, y_n)$ | $p_X(x_2)$ |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $x_m$ | $p(x_m, y_1)$ | $p(x_m, y_2)$ | $p(x_m, y_3)$ | $\cdots$ | $p(x_m, y_n)$ | $p_X(x_m)$ |
| $p_Y(y_j)$ | $p_Y(y_1)$ | $p_Y(y_2)$ | $p_Y(y_3)$ | $\cdots$ | $p_Y(y_n)$ | 1 |

Tablica 3.2: Proširena tablica distribucije diskretnog slučajnog vektora s konačnim skupom stanja.

**Primjer 3.7.** *Slučajni pokus sastoji se od bacanja dviju pravilno izrađenih igraćih kockica. Otprije znamo da je skup elementarnih događaja tog slučajnog pokusa*

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \quad k(\Omega) = 36.$$

*Neka su $X$ i $Y$ diskretne slučajne varijable na $\mathcal{P}(\Omega)$ čije su realizacije određene na sljedeći način:*

- *ako se pri bacanju na kockicama okrenu različiti brojevi, $X$ se realizira manjim, a $Y$ većim brojem (npr. ako se na prvoj kockici okrene 3, a na drugoj kockici 6, tada uzimamo da je 3 realizacija slučajne varijable $X$, a 6 realizacija slučajne varijable $Y$),*
- *ako se pri bacanju na kockicama okrenu isti brojevi, tada se i $X$ i $Y$ realiziraju tim brojem.*

*Očito je*

$$\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

*Želimo odrediti marginalne distribucije slučajnog vektora $(X, Y)$.*

*Slika slučajnog vektora $(X, Y)$ jest skup*

$$\mathcal{R}(X, Y) = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

*Vjerojatnosti realizacija slučajnog vektora $(X, Y)$ dane su na sljedeći način:*

- *ako je $x > y$, tada je $P\{X = x, Y = y\} = 0$,*
- *ako je $x = y$, tada je $P\{X = x, Y = y\} = 1/36$,*

- *ako je* $x < y$, *tada je* $P\{X = x, Y = y\} = 1/18$.

*Marginalne distribucije tog slučajnog vektora računamo na sljedeći način:*

- *za fiksni je* $x \in \mathcal{R}(X)$

$$p_X(x) = P\{X = x\} = \sum_{y \in \mathcal{R}(Y)} P\{X = x, Y = y\},$$

- *za fiksni je* $y \in \mathcal{R}(Y)$

$$p_Y(y) = P\{Y = y\} = \sum_{x \in \mathcal{R}(X)} P\{X = x, Y = y\}.$$

*Međutim, distribuciju slučajnog vektora* $(X, Y)$ *i njegove marginalne distribucije pregledno možemo prikazati sljedećom tablicom (proširenom tablicom distribucije):*

| X \ Y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $p_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 11/36 |
| 2 | 0 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 9/36 |
| 3 | 0 | 0 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 7/36 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 1/18 | 1/18 | 5/36 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 1/18 | 3/36 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/36 | 1/36 |
| $p_Y(y)$ | 1/36 | 3/36 | 5/36 | 7/36 | 9/36 | 11/36 | 1 |

*Iz prethodne tablice očitavamo marginalne distribucije:*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 11/36 & 9/36 & 7/36 & 5/36 & 3/36 & 1/36 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/36 & 3/36 & 5/36 & 7/36 & 9/36 & 11/36 \end{pmatrix}.$$

**Primjer 3.8.** *Na analogan način možemo odrediti marginalne distribucije diskretnog slučajnog vektora koji nema konačnu sliku. Neka je* $(X, Y)$ *diskretan slučajni vektor čija je distribucije dana na sljedeći način:*

$$\mathcal{R}(X, Y) = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,$$
$$P\{X = x, Y = y\} = \frac{2^x 2^y}{x! y!} e^{-4}, \quad (x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0.$$

*Odredimo marginalne distribucije tog slučajnog vektora. Slika slučajne varijable* $X$ *jest skup* $\mathcal{R}(X) = \mathbb{N}_0$, *a*

$$P\{X = x\} = \sum_{y \in \mathbb{N}_0} P\{X = x, Y = y\} = \frac{2^x}{x!} e^{-4} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{2^y}{y!} = \frac{2^x}{x!} e^{-2},$$

*tj.* $X \sim \mathcal{P}(2)$. *Analognim postupkom slijedi da je* $Y \sim \mathcal{P}(2)$. *Dakle,* $X$ *i* $Y$ *jednako su distribuirane slučajne varijable.*

**Primjer 3.9.** *Promotrimo igraću kockicu sa svojstvom da se pri jednom njezinom bacanju broj* $i \in \{1, \dots 6\}$ *okrene s vjerojatnošću* $p_i$ *te pretpostavimo da brojevi* $p_i$ *imaju sljedeća svojstva:*

1. $p_i > 0$ *za sve* $i \in \{1, \dots 6\}$,

*2.* $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1.$

*Uočimo da ako je* $p_i = 1/6$ *za svaki* $i$*, tada se radi o pravilno izrađenoj igraćoj kockici, no općenito ne mora biti tako. Neka je ta kockica bačena* $n$ *puta zaredom. Realizacija je tog bacanja jedna uređena* $n$*-torka elemenata iz skupa* $\{1,\ldots,6\}$ *ili, preciznije, varijacija s ponavljanjem* $n$*-tog razreda skupa* $\{1,\ldots,6\}$*.*

*Pretpostavimo da želimo odrediti vjerojatnost da se u tih* $n$ *bacanja* $x$ *puta okrenula jedinica i da se* $y$ *puta okrenula šestica, pri čemu je* $x+y \leq n$*. U tu svrhu označimo* $X$ *slučajnu varijablu koja se realizira brojem jedinica, a* $Y$ *slučajnu varijablu koja se realizira brojem šestica koje su se okrenule u* $n$ *bacanja te kockice i odredimo vjerojatnost* $P\{X=x, Y=y\}$ *za* $x, y \in \{0,1,\ldots,n\}$ *takve da je* $x+y \leq n$*. Varijacija s ponavljanjem* $n$*-tog razreda skupa* $\{1,\ldots,6\}$ *u kojima su* $x$ *komponenti jedinice,* $y$ *komponenti šestice, a preostalih* $(n-x-y)$ *komponenti dvojke, trojke, četvorke ili petice ima*

$$\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}$$

*i svaka od njih realizira se s vjerojatnošću*

$$p_1^x p_6^y (p_2+p_3+p_4+p_5)^{n-x-y} = p_1^x p_6^y (1-p_1-p_6)^{n-x-y}.$$

*Primjenom principa sume slijedi da je*

$$P\{X=x, Y=y\} = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}\, p_1^x p_6^y (1-p_1-p_6)^{n-x-y}. \tag{3.4}$$

*Za slučajni vektor* $(X,Y)$ *s distribucijom 3.4 kažemo da ima multinomnu distribuciju s parametrima* $n$*,* $p_1$ *i* $p_6$ *i pišemo* $(X,Y) \sim MULT(n, p_1, p_6)$*. Za određivanje distribucije (tablice distribucije) slučajne varijable* $X$ *iz distribucije 3.4 važno je uočiti da je za realizacije* $x$ *i* $y$ *slučajnih varijabli* $X$ *i* $Y$ *sa svojstvom* $x+y \leq n$ $P\{X=x, Y=y\} > 0$*, dok je inače* $P\{X=x, Y=y\} = 0$*. Sada slijedi da je za* $x \in \{0,1,\ldots,n\}$

$$P\{X=x\} = \sum_{y \in \mathcal{R}(\mathcal{Y})} P\{X=x, Y=y\} =$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p_1^x \sum_{y=0}^{n-x} \frac{(n-x)!}{y!(n-x-y)!}\, p_6^y (1-p_1-p_6)^{n-x-y} =$$

$$= \binom{n}{x} p_1^x \sum_{y=0}^{n-x} \binom{n-x}{y} p_6^y (1-p_1-p_6)^{n-x-y} = \binom{n}{x} p_1^x (1-p_1)^{n-x},$$

*gdje je zadnja suma riješena primjenom binomnog teorema. Dakle, slijedi da je* $X$ *binomna slučajna varijabla s parametrima* $n \in \mathbb{N}$ *i* $p_1 \in \langle 0,1 \rangle$*. Analognim postupkom slijedi da je* $Y \sim \mathcal{B}(n, p_6)$*.*

Od velikog su praktičnog interesa slučajne varijable koje nastaju kao kompozicija realne funkcije dviju varijabli i dvodimenzionalnog slučajnog vektora. Preciznije, neka je $(X,Y)$ dvodimenzionalan diskretan slučajni vektor sa skupom vrijednosti $\mathcal{R}(X,Y) = \{(x_i, y_j) : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ i distribucijom

$$p(x_i, y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N},$$

i neka je $g$ neka funkcija koja uređenom paru realnih brojeva pridružuje realan broj, tj. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Tada $g(X,Y)$ definira slučajnu varijablu na $\Omega$. Na primjer,

$X+Y$, $XY$, $(X-\mu)(Y-\nu)$ ($\mu, \nu$ jesu neki realni brojevi) jednodimenzionalne su slučajne varijable na $\Omega$ koje nastaju na takav način. Distribuciju tako nastale slučajne varijable možemo lako izračunati iz tablice distribucije slučajnog vektora $(X,Y)$ i zadane funkcije $g$. Postupak je ilustriran primjerom 3.10.

**Primjer 3.10.** *Neka je dan pokus opisan u primjeru 3.6, tj. iz kutije koja sadrži tri kupona s oznakama 1, 2 i 3 izvlačimo dva kupona bez vraćanja u kutiju. Rezultat izvlačenja slučajan je vektor $(X,Y)$, gdje je $X$ rezultat prvog izvlačenja, a $Y$ rezultat drugog izvlačenja. Odredimo distribuciju sume tih dviju slučajnih varijabli: $Z = X+Y$.*

$$X+Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix},$$

*gdje je*

$$\begin{aligned}
&p_2 = P\{Z=2\} = P\{X=1, Y=1\} = 0,\\
&p_3 = P\{Z=3\} = P\{X=1, Y=2\} + P\{X=2, Y=1\} = 1/3,\\
&p_4 = P\{Z=4\} = P\{X=1, Y=3\} + P\{X=3, Y=1\} + P\{X=2, Y=2\} = 1/3,\\
&p_5 = P\{Z=5\} = P\{X=3, Y=2\} + P\{X=2, Y=3\} = 1/3,\\
&p_6 = P\{Z=6\} = P\{X=3, Y=3\} = 0.
\end{aligned}$$

*Dakle, tablica distribucije slučajne varijable jest*

$$X+Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

*Odredite tablice distribucija slučajnog vektora $(X,Y)$ i slučajne varijable $(X+Y)$ ako se izvlačenje vrši s vraćanjem.*

**Primjer 3.11.** *Iz skupa $\{1,2,\ldots,9\}$ na slučajan način izvlačimo tri broja jedan po jedan (s vraćanjem izvučenih brojeva u skup). Prvi izvučeni broj bit će znamenka stotica, drugi izvučeni broj znamenka desetica, a treći izvučeni broj znamenka jedinica troznamenkastog broja. Izvlačenje znamenke stotica modeliramo slučajnom varijablom $Z_1$, znamenke desetica slučajnom varijablom $Z_2$, a znamenke jedinica slučajnom varijablom $Z_3$. Slučajna je varijabla $Z_i$, $i \in \{1,2,3\}$, diskretna slučajna varijabla koja se brojem iz skupa $\{1,2,\ldots,9\}$ realizira s vjerojatnošću $1/9$. Dakle, $Z_1$, $Z_2$ i $Z_3$ jesu diskretne uniformne slučajne varijable na skupu $\{1,2,\ldots,9\}$ i zadane su tablicom distribucije*

$$Z_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{pmatrix}, \quad i \in \{1,2,3\}.$$

*Uočimo da ima smisla promatrati trodimenzionalan diskretan slučajni vektor $(Z_1,Z_2,Z_3)$ čija je slika $\mathcal{R}(Z_1,Z_2,Z_3) = \{(i,j,k),\, i,j,k \in \{1,2,\ldots,9\}\}$. Jedna realizacija slučajnog vektora $(Z_1,Z_2,Z_3)$ jest varijacija s ponavljanjem trećeg razreda skupa od devet elemenata, stoga skup $\mathcal{R}(Z_1,Z_2,Z_3)$ ima $9^3 = 729$ elemenata. Kako su događaji $\{Z_1 = i, Z_2 = j, Z_3 = k\}$ za sve $i,j,k \in \{1,2,\ldots,9\}$ jednako vjerojatni, slijedi da je*

$$P\{Z_1 = i, Z_2 = j, Z_3 = k\} = \frac{1}{729}, \quad (i,j,k) \in \mathcal{R}(Z_1,Z_2,Z_3).$$

*Time je u potpunosti zadana distribucija trodimenzionalnog diskretnog slučajnog vektora $(Z_1,Z_2,Z_3)$.*

*Nadalje, označimo s $X$ slučajnu varijablu koja se realizira najvećom znamenkom, a s $Y$ slučajnu varijablu koja se realizira najmanjom znamenkom u tako sastavljenom troznamenkastom broju:*

$$X = \max\{Z_1,Z_2,Z_3\}, \quad Y = \min\{Z_1,Z_2,Z_3\}.$$

*Budući da se izvlačenje brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, 9\}$ vrši s vraćanjem, slijedi da se i $X$ i $Y$ realiziraju brojevima iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, tj. $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y)$. Distribucija slučajne varijable $X$ dana je tablicom*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \frac{1}{729} & \frac{7}{729} & \frac{19}{729} & \frac{36}{729} & \frac{62}{729} & \frac{91}{729} & \frac{127}{729} & \frac{169}{729} & \frac{217}{729} \end{pmatrix},$$

*a distribucija slučajne varijable $Y$ tablicom*

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \frac{217}{729} & \frac{169}{729} & \frac{127}{729} & \frac{91}{729} & \frac{62}{729} & \frac{36}{729} & \frac{19}{729} & \frac{7}{729} & \frac{1}{729} \end{pmatrix}.$$

*Uočimo da događaji $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = \{X = x\}$, $x \in \mathcal{R}(X)$, i $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y\} = \{Y = y\}$, $y \in \mathcal{R}(Y)$, nisu nezavisni. Na primjer, u slučaju troznamenkastog broja 111 i slučajna varijabla $X$ i slučajna varijabla $Y$ realiziraju se s 1. Slijedi da se u tom slučaju presjek događaja $\{X = 1\}$ i $\{Y = 1\}$ realizira s vjerojatnošću*

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{729}.$$

*S druge strane, iz distribucija slučajnih varijabli $X$ i $Y$ znamo da je*

$$P\{X = 1\} = \frac{1}{729}, \quad P\{Y = 1\} = \frac{217}{729}.$$

*Dakle, ne vrijedi da je*

$$P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\}P\{Y = y\}, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}(X) \times \mathcal{R}(Y),$$

*pa događaji $\{X = x\}$ i $\{Y = y\}$ nisu nezavisni, što otežava određivanje distribucije slučajnog vektora $(X, Y)$.*

*Pretpostavimo da nas zanima razlika najveće i namanje znamenke takvog troznamenkastog broja. Ta je razlika modelirana slučajnom varijablom $(X - Y)$ koja prima vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X - Y) = \{0, 1, \ldots, 8\}$. Da bismo odredili vjerojatnosti pojedinih realizacija slučajne varijable $(X - Y)$, koristimo distribuciju slučajnog vektora $(X, Y)$:*

$$P\{X - Y = n\} = \sum_{k=n+1}^{9} P\{X = k, Y = k - n\}, \quad n \in \mathcal{R}(X - Y).$$

*Na primjer, iz gornje formule slijedi da je*

$$P\{X - Y = 0\} = \sum_{k=1}^{9} P\{X = k, Y = k\} = \frac{9}{729}.$$

Važno je napomenuti da se očekivanje slučajne varijable $g(X, Y)$, nastale na temelju kompozicije realne funkcije $g$ i diskretnog slučajnog vektora, može izračunati koristeći tablicu distribucije slučajnog vektora $(X, Y)$ i oblik funkcije $g$ bez računanja tablice distribucije slučajne varijable $g(X, Y)$ (naravno, ukoliko očekivanje postoji!). Ta tvrdnja može se lako provjeriti koristeći rezultate teorije ponovljenih redova (vidi poglavlje 5.3 u Dodatku) tj. činjenice da se kod apsolutno konvergentnih redova može mijenjati redoslijed sumacije bez utjecaja na konačan rezultat. Precizna formulacija te tvrdnje dana je teoremom 3.1.

**Teorem 3.1.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor, $(X, Y)$ slučajni vektor na njemu dan distribucijom 3.2 i $g : \mathcal{R}(X, Y) \to \mathbb{R}$ zadana funkcija. Tada redovi*

$$Eg(X, Y) = \sum_{\omega \in \Omega} g(X, Y)(\omega)$$

*i*

$$\sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p(x_i, y_j)$$

*istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju. U slučaju su im apsolutne konvergencije sume jednake.*

**Zadatak 3.2.** Dokažite taj teorem!

**Primjer 3.12.** *Standardan svežanj od 52 karte sastoji se od 26 crvenih karata (13 hercova i 13 karo karata) i 26 crnih karata (13 pikova i 13 trefova). Iz takvog se svežnja na slučajan način jedna za drugom (bez vraćanja) izvlače dvije karte. Označimo s $X$ slučajnu varijablu koja se realizira brojem izvučenih pikova, a s $Y$ slučajnu varijablu koja se realizira brojem izvučenih trefova. Zaključujemo da je distribucija slučajnog vektora $(X, Y)$ sljedeća:*

$$\mathcal{R}(X, Y) = \{(x, y) : x \in \{0, 1, 2\}, y \in \{0, 1, 2\}, x + y \leq 2\},$$

$$P\{X = x, Y = y\} = \frac{\binom{13}{x}\binom{13}{y}\binom{26}{2-x-y}}{\binom{52}{2}}.$$

*Distribuciju slučajnog vektora $(X, Y)$ i njegove marginalne distribucije pregledno prikazujemo sljedećom tablicom:*

| $X \setminus Y$ | 0 | 1 | 2 | $p_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 25/102 | 13/51 | 1/17 | 19/34 |
| 1 | 13/51 | 13/102 | 0 | 13/34 |
| 2 | 1/17 | 0 | 0 | 1/17 |
| $p_Y(y)$ | 19/34 | 13/34 | 1/17 | 1 |

Tablica 3.3: Tablica distribucije slučajnog vektora $(X, Y)$ iz primjera 3.12.

*Iz proširene tablice distribucije slučajnog vektora $(X, Y)$ vidimo da su $X$ i $Y$ jednako distribuirane slučajne varijable.*
*Broj izvučenih crnih karata modeliramo slučajnom varijablom $(X + Y)$ čija je slika $\mathcal{R}(X + Y) = \{0, 1, 2\}$. Ako želimo izračunati očekivani broj izvučenih crnih karata, tj. očekivanje slučajne varijable $(X + Y)$, to možemo učiniti pomoću tablice distribucije slučajnog vektora $(X, Y)$, dakle bez računanja distribucije slučajne varijable $(X + Y)$:*

$$E(X + Y) = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} (x + y) P\{X = x, Y = y\} =$$

$$= 1 \cdot \frac{13}{51} + 2 \cdot \frac{1}{17} + 1 \cdot \frac{13}{51} + 2 \cdot \frac{13}{102} + 2 \cdot \frac{1}{17} = 1.$$

*Radi provjere dobivenog rezultata odredimo ipak distribuciju slučajne varijable $(X+Y)$ i izračunajmo njezino očekivanje. Pomoću tablice distribucije slučajnog vektora $(X,Y)$ računamo:*

$$P\{X+Y=0\} = P\{X=0, Y=0\} = \frac{25}{102},$$

$$P\{X+Y=1\} = P\{X=1, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = \frac{26}{51},$$

$$P\{X+Y=2\} = P\{X=2, Y=0\} + P\{X=1, Y=1\} + P\{X=0, Y=2\} = \frac{25}{102}.$$

*Dakle, distribucija slučajne varijable $(X+Y)$ dana je tablicom*

$$X+Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 25/102 & 26/51 & 25/102 \end{pmatrix},$$

*a njezino je očekivanje broj*

$$E(X+Y) = 0 \cdot \frac{25}{102} + 1 \cdot \frac{26}{51} + 2 \cdot \frac{25}{102} = 1,$$

*čime smo se uvjerili u točnost prethodnog rezultata.*

### 3.1.1 Uvjetne distribucije

Ako želimo proučavati veze među komponentama slučajnog vektora, sama tablica distribucije nije praktična, a marginalne distribucije su nedovoljne. Bolji uvid dobije se analizom uvjetnih vjerojatnosti oblika $P(\{X \in A\}|\{Y=y\})$, gdje je $A$ podskup od $\mathcal{R}(X)$ ili $P(\{Y \in A\}|\{X=x\})$, gdje je $A$ podskup od $\mathcal{R}(Y)$. U tu svrhu definirat ćemo uvjetne distribucije slučajnog vektora. Radi jednostavnijeg zapisa koristit ćemo sljedeću oznaku:

$$P(\{X \in A\}|\{Y=y\}) = P\{X \in A | Y=y\}.$$

**Primjer 3.13.** *Tablicom distribucije 3.4 opisan je slučajni vektor $(T,Z)$ kojim je modeliran nivo uspjeha pri polaganju teorijskog dijela $(T)$ i zadataka $(Z)$ iz jednog ispita matematičkog sadržaja.*

| $T \setminus Z$ | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{66}{100}$ | $\frac{2}{100}$ | $\frac{2}{100}$ | $\frac{70}{100}$ |
| 2 | $\frac{5}{100}$ | $\frac{5}{100}$ | $\frac{2}{100}$ | $\frac{12}{100}$ |
| 3 | $\frac{2}{100}$ | $\frac{4}{100}$ | $\frac{12}{100}$ | $\frac{18}{100}$ |
| | $\frac{73}{100}$ | $\frac{11}{100}$ | $\frac{16}{100}$ | 1 |

Tablica 3.4: Tablica distribucije slučajnog vektora iz primjera 3.13.

*Koristeći pravila za računanje uvjetnih vjerojatnosti, lako možemo izračunati:*

$$P\{T=1|Z=1\} = \frac{P\{T=1, Z=1\}}{P\{Z=1\}} = \frac{66}{73},$$

$$P\{T=2|Z=1\} = \frac{P\{T=2, Z=1\}}{P\{Z=1\}} = \frac{5}{73},$$

$$P\{T=3|Z=1\}=\frac{P\{T=3,Z=1\}}{P\{Z=1\}}=\frac{2}{73}.$$

*Uočimo da je suma dobivenih triju brojeva jednaka 1 te da oni daju uvjetne vjerojatnosti da se postigne nivo uspjeha "i" iz teorije, $i \in \{1,2,3\}$, uz uvjet da je na zadacima postignut nivo 1. Na taj način određena je* **uvjetna distribucija** *od $T$, uz uvjet da je $Z=1$, koju možemo prikazati i tablično:*

$$T_{|Z=1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{66}{73} & \frac{5}{73} & \frac{2}{73} \end{pmatrix}.$$

*Analogno, možemo izračunati i prikazati uvjetnu distribuciju od $T$, uz uvjet da je $Z=2$, te uvjetnu distribuciju od $T$, uz uvjet da je $Z=3$, i komentirati sličnost, odnosno različitost tih distribucija:*

$$T_{|Z=2}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}, \qquad T_{|Z=3}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{12}{16} \end{pmatrix}.$$

*Iz navedenih uvjetnih distribucija može se vidjeti da je, uz uvjet $Z=1$, puno veća vjerojatnost da se na teoriji postigne nivo 1 nego da se postigne neki viši nivo uspjeha. Nasuprot tomu, uz uvjet da je $Z=3$ veća je vjerojatnost da se i na teoriji postigne nivo uspjeha 3 nego manji nivoi. Te činjenice daju naslutiti da se uvjetna distribucija od $T$ mijenja s različitim vrijednostima od $Z$, tj. da između nivoa uspjeha postignutog na zadacima i teoriji postoji neka veza.*

*Opisujući numeričke karakteristike dobivenih uvjetnih distribucija, ta činjenica postaje još slikovitija. Tako za očekivanja vrijedi:*

$$E(T|Z=1)=1.12, \quad E(T|Z=2)=2.18, \quad E(T|Z=3)=2.63,$$

*pa možemo reći da očekivanje nivoa uspjeha iz teorije raste s porastom nivoa uspjeha iz zadataka.*

U općenitom slučaju pretpostavimo da je tablicom 3.5 dana distribucija dvodimenzionalnog slučajnog vektora $(X,Y)$.

| $X \setminus Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $\cdots$ | $p_X$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p(x_1,y_1)$ | $p(x_1,y_2)$ | $p(x_1 y_3)$ | $\cdots$ | $p_X(x_1)$ |
| $x_2$ | $p(x_2,y_1)$ | $p(x_2,y_2)$ | $p(x_2,y_3)$ | $\cdots$ | $p_X(x_2)$ |
| $\vdots$ | | | | | |
| $p_Y$ | $p_Y(y_1)$ | $p_Y(y_2)$ | $p_Y(y_3)$ | $\cdots$ | 1 |

Tablica 3.5: Proširena tablica distribucije dvodimenzionalnog slučajnog vektora.

Tada je tablicom

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_{X|Y=y_j}(x_1) & p_{X|Y=y_j}(x_2) & \ldots \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$p_{X|Y=y_j}(x_i)=\frac{p(x_i,y_j)}{p_Y(y_j)}, \; i \in \{1,2,\ldots\}$$

dana **uvjetna distribucija komponente** $X$, uz uvjet da je $Y=y_j$.

**Zadatak 3.3.** Dokažite da je tablicom 3.5 dobro definirana tablica distribucije, tj. da vrijedi

$$p_{X|Y=y_j}(x_i) \geq 0, \ \forall i, \ \sum_i p_{X|Y=y_j}(x_i) = 1.$$

Na analogan način možemo definirati i komentirati uvjetne distribucije komponente $Y$, uz uvjet da je $X = x_i$ za svaki $i$.

**Primjer 3.14.** *Neka je $(X, Y)$ slučajni vektor koji se realizira uređenim parom brojeva u kojemu je prva komponenta broj pikova, a druga komponenta broj trefova izvučenih pri slučajnom odabiru (bez vraćanja) dviju karata iz standardnog svežnja od 52 karte. Distribucija slučajnog vektora $(X, Y)$ dana je tablicom 3.3 u primjeru 3.12. Odredimo sada uvjetne distribucije i uvjetna očekivanja komponente $X$, uz uvjet $Y = y$ za sve $y \in \{0, 1, 2\}$, te komponente $Y$, uz uvjet $X = x$ za sve $x \in \{0, 1, 2\}$. Usmjerimo se prvo na uvjetnu distribuciju od $X$, uz uvjet da je $Y = y$.*

*Za $y = 0$ je*

$$P\{X = 0|Y = 0\} = \frac{P\{X = 0, Y = 0\}}{P\{Y = 0\}} = \frac{25}{57},$$
$$P\{X = 1|Y = 0\} = \frac{P\{X = 1, Y = 0\}}{P\{Y = 0\}} = \frac{26}{57},$$
$$P\{X = 2|Y = 0\} = \frac{P\{X = 2, Y = 0\}}{P\{Y = 0\}} = \frac{2}{19}.$$

*Za $y = 1$ je $P\{X = 0|Y = 1\} = \frac{2}{3}$, $P\{X = 1|Y = 1\} = \frac{1}{3}$ i $P\{X = 2|Y = 1\} = 0$.*

*Za $y = 2$ je $P\{X = 0|Y = 2\} = 1$, $P\{X = 1|Y = 2\} = 0$ i $P\{X = 2|Y = 2\} = 0$.*

*Slijedi da su uvjetne distribucije redom dane tablicama*

$$X_{|Y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 25/57 & 26/57 & 2/19 \end{pmatrix}, \qquad X_{|Y=1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

*dok je vjerojatnost da se $X$ realizira nulom, uz uvjet da je $Y = 2$, jednaka jedan. Očekivanja su tih uvjetnih distribucija sljedeća:*

$$E(X|Y = 0) = \frac{38}{57}, \qquad E(X|Y = 1) = \frac{1}{3}, \qquad E(X|Y = 2) = 1.$$

*Analognim postupkom dobivamo uvjetne distribucije i uvjetna očekivanja komponente $Y$, uz uvjet $X = x$ za sve $x \in \{0, 1, 2\}$. Uočimo da je u ovom primjeru uvjetna distribucija od $X$, uz uvjet $Y = i$, jednaka uvjetnoj distribuciji od $Y$, uz uvjet da je $X = i$, za sve $i \in \{0, 1, 2\}$.*

**Primjer 3.15.** *U primjeru 3.9 pokazali smo da su marginalne distribucije slučajnog vektora $(X, Y) \sim MULT(n, p_1, p_6)$ binomne, tj. da je $X \sim \mathcal{B}(n, p_1)$, a $Y \sim \mathcal{B}(n, p_6)$. Odredimo sada uvjetne distribucije tih komponenti tog slučajnog vektora. Za $x \in \mathcal{R}(X)$ je*

$$P\{Y = y|X = x\} = \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{X = x\}} = \binom{n-x}{y} \left(\frac{p_6}{1 - p_1}\right)^y \left(1 - \frac{p_6}{1 - p_1}\right)^{n-x-y}.$$

*Slijedi da je uvjetna distribucija od $Y$, uz uvjet $X = x$, binomna s parametrima $(n-x)$ i $p_6/(1-p_1)$. Analogno slijedi da je uvjetna distribucija od $X$, uz uvjet $Y = y$, binomna s parametrima $(n - y)$ i $p_1/(1 - p_6)$. Budući da je matematičko očekivanje binomne slučajne varijable jednako umnošku njezinih parametara, slijedi da je*

$$E(Y|X = x) = \frac{p_6(n - x)}{1 - p_1}, \quad x \in \mathcal{R}(X),$$
$$E(X|Y = y) = \frac{p_1(n - y)}{1 - p_6}, \quad y \in \mathcal{R}(Y).$$

### 3.1.2 Nezavisnost

Ukoliko za dani diskretan slučajni vektor $(X, Y)$ uvjetne distribucije komponente $Y$, uz uvjet $X = x_i$, ostaju stalno iste pri promjeni $x_i$, $i \in \mathbb{N}$, to daje naslutiti da su komponente tog slučajnog vektora nezavisne. Međutim, nezavisnost slučajnih varijabli definirat ćemo koristeći definiciju nezavisnosti događaja. Također ćemo pokazati da je navedena intuitivna činjenica o nezavisnosti komponenti danog slučajnog vektora u suglasnosti s definicijom nezavisnosti slučajnih varijabli.

Za događaje $A$ i $B$ danog vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ rekli smo da su nezavisni ako vrijedi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (vidi poglavlje 1.9). Ako pretpostavimo da takav tip jednakosti vrijedi za sve događaje inducirane diskretnim slučajnim varijablama $X$ i $Y$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, tj. ako je

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}$$

za sve $A \subseteq \mathcal{R}(X)$, $B \subseteq \mathcal{R}(Y)$, onda ćemo reći da su slučajne varijable $X$ i $Y$ nezavisne.

**Definicija 3.3.** *Za diskretne slučajne varijable $X$ i $Y$ definirane na istom diskretnom vjerojatnosno prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ kažemo da su* **nezavisne** *ako za sve skupove $A \subseteq \mathbb{R}$ i $B \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi*

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}.$$

**Teorem 3.2.** *Neka je $(X, Y)$ diskretan slučajni vektor na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ čija je distribucija dana tablicom 3.5, tj.*

| $X \setminus Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $\cdots$ | $p_X$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p(x_1, y_1)$ | $p(x_1, y_2)$ | $p(x_1 y_3)$ | $\cdots$ | $p_X(x_1)$ |
| $x_2$ | $p(x_2, y_1)$ | $p(x_2, y_2)$ | $p(x_2, y_3)$ | $\cdots$ | $p_X(x_2)$ |
| $\vdots$ | | | | | |
| $p_Y$ | $p_Y(y_1)$ | $p_Y(y_2)$ | $p_Y(y_3)$ | $\cdots$ | *1* |

*Slučajne varijable $X$ i $Y$ jesu nezavisne onda i samo onda ako vrijedi*

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

*za sve $x_i \in \mathcal{R}(X)$, $y_j \in \mathcal{R}(Y)$.*

**Dokaz.** Pretpostavimo da su $X$ i $Y$ nezavisne slučajne varijable. Za proizvoljne $x_i \in \mathcal{R}(X)$, $y_j \in \mathcal{R}(Y)$ je $\{x_i\} \subseteq \mathbb{R}$, $\{y_j\} \subseteq \mathbb{R}$, pa je

$$p(x_i, y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = p_X(x_i)p_Y(y_j),$$

tj. vrijedi tvrdnja teorema.

Obratno, pretpostavimo da je $p(x_i, y_j) = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$ za sve $x_i \in \mathcal{R}(X)$, $y_j \in \mathcal{R}(Y)$ i neka su $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ proizvolji skupovi. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} P\{X \in A, Y \in B\} &= \sum_{\{X(\omega)\in A, Y(\omega)\in B\}} P\{\omega\} = \\ &= \sum_{x_i\in A}\sum_{y_j\in B} p(x_i, y_j) = \sum_{x_i\in A}\sum_{y_j\in B} P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} = \\ &= \sum_{x_i\in A} P\{X = x_i\} \sum_{y_j\in B} P\{Y = y_j\} = \\ &= P\{X \in A\}P\{Y \in B\}. \end{aligned}$$

**Primjer 3.16.** *Iz kutije koja sadrži tri kupona s oznakama 1, 2 i 3 izvlačimo dva kupona tako da prvi izvučeni kupon vratimo u kutiju prije izvlačenja drugog kupona (izvlačenje s vraćanjem). Rezultat izvlačenja modeliran je slučajnim vektorom $(X, Y)$, gdje je $X$ rezultat prvog izvlačenja, a $Y$ razultat drugog izvlačenja. Distribucija tog slučajnog vektora dana je sljedećom tablicom:*

| $X \diagdown Y$ | 1 | 2 | 3 | $p_X$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/3 |
| 2 | 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/3 |
| 3 | 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/3 |
| $p_Y$ | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1 |

*Koristeći teorem 3.2 vidimo da su $X$ i $Y$ nezavisne. Također možemo uočiti da su uvjetne distribucije komponente $X$, uz dano $Y = i$, jednake za sve $i \in \{1, 2, 3\}$ i da su jednake marginalnim distribucijama komponente $X$. Analogna tvrdnja vrijedi i za uvjetne distribucije komponente $Y$, uz dano $X = i$, $i \in \{1, 2, 3\}$.*

*Promotrimo sada izvlačenje dvaju kupona, ali bez vraćanja prvog izvučenog kupona u kutiju. Rezultat izvlačenja modeliran je slučajnim vektorom $(U, V)$, gdje je $U$ rezultat prvog izvlačenja, a $V$ razultat drugog izvlačenja. Distribucija slučajnog vektora $(U, V)$ dana je tablicom*

| $U \diagdown V$ | 1 | 2 | 3 | $p_X$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/6 | 1/6 | 1/3 |
| 2 | 1/6 | 0 | 1/6 | 1/3 |
| 3 | 1/6 | 1/6 | 0 | 1/3 |
| $p_Y$ | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1 |

*Koristeći teorem 3.2 vidimo da $U$ i $V$ nisu nezavisne. Također uočimo da se marginalne distribucije slučajnih vektora $(X, Y)$ i $(U, V)$ podudaraju.*

Općenito su kod nezavisnih komponenti diskretnog slučajnog vektora $(X, Y)$ uvjetne distribucije od $X$, uz dano $Y = y_j$, iste za sve $y_j \in \mathcal{R}(Y)$ i jednake marginalnoj distribuciji komponente $X$. Slično vrijedi i za uvjetne distribucije komponente $Y$, uz dano $X = x_i$, $x_i \in \mathcal{R}(X)$.

Zaista, neka je $(X, Y)$ slučajni vektor s tablicom distribucije 3.1 i nezavisnim komponentama $X$ i $Y$. Tada je

$$p_{X|Y=y_j}(x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)} = \frac{p_X(x_i)p_Y(y_j)}{p_Y(y_j)} = p_X(x_i), \quad i \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Sljedeći teorem daje vrlo važno svojstvo nezavisnih slučajnih varijabli.

**Teorem 3.3.** *Neka su $X$ i $Y$ nezavisne slučajne varijable takve da postoji $E(X)$ i $E(Y)$. Tada postoji $E(X \cdot Y)$ i vrijedi:*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

**Dokaz.** Koristeći poznate rezultate o sumi redova[3] kao i rezultate teorije ponovljenih redova (vidi poglavlje 5.3 u Dodatku), znamo da konvergencija redova

$$\sum_i |x_i| p_X(x_i), \quad \sum_j |y_j| p_Y(y_j)$$

povlači konvergenciju reda

$$\sum_i \sum_j |x_i y_j| p_X(x_i) p_Y(y_j).$$

Osim toga, vrijedi:

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_j x_i y_j p(x_i, y_j) &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_X(x_i) p_Y(y_j) = \\ &= \sum_i x_i p_X(x_i) \sum_j y_j p_Y(y_j) = \\ &= E(X)\, E(Y).\end{aligned}$$

Koristeći teorem 3.1 možemo zaključiti da $E(XY)$ postoji i da vrijedi tvrdnja teorema.

[3] Vidi npr. [13].

## 3.2 Neprekidan dvodimenzionalan slučajni vektor

U neprekidnom slučaju dvodimenzionalan slučajni vektor prima vrijednosti u skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ali, za razliku od diskretnog slučajnog vektora, njegov skup vrijednosti sadrži neko područje iz $\mathbb{R}^2$.

**Definicija 3.4.** *Reći ćemo da je $(X, Y)$ dvodimenzionalan neprekidan slučajni vektor ako postoji nenegativna realna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, takva da se funkcija distribucije od $(X, Y)$ može napisati u obliku*

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv. \tag{3.6}$$

*Takvu funkciju $f$ nazivamo* **funkcija gustoće** *neprekidnog slučajnog vektora.*

Vidimo da su, zbog jednakosti (3.6), vjerojatnosna svojstva neprekidnog slučajnog vektora u potpunosti određena njegovom funkcijom gustoće.

**Primjer 3.17.** *Slučajni vektor uniformne distribucije na krugu $\{(x, y) : x^2 + y^2 < r^2\}$ dan je funkcijom gustoće*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{r^2\pi} & , x^2 + y^2 < r^2 \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}.$$

**Primjer 3.18.** *Dvodimenzionalan normalan slučajni vektor dan je funkcijom gustoće $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koja je definirana pravilom*

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}, \tag{3.7}$$

*gdje su $\mu_1 \in \mathbb{R}, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \rho \in \langle -1, 1\rangle$. U tom slučaju koristimo oznaku $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.* [4]

Ako je $(X, Y)$ neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće $f(x, y)$ onda će njegove marginalne distribucije također biti neprekidnog tipa s gustoćama koje možemo izračunati iz $f(x, y)$.

Zaista, neka je $(X, Y)$ dvodimenzionalan slučajni vektor s gustoćom $f(x, y)$. Vrijedi:

$$P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)\, du\, dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)\, dv \right) du.$$

[4] Vidi Sarapa [26, str. 274].

Definiramo li

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)\, dv\,,$$

onda je $f_X$ realna funkcija realne varijable koja ima potrebna svojstva da bi bila gustoća slučajne varijable $X$, tj. ona je nenegativna i za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du.$$

Funkciju $f_X$ zovemo **marginalna funkcija gustoće** komponente $X$ slučajnog vektora $(X,Y)$. Analogno je

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)\, du\,,$$

**marginalna funkcija gustoće** komponente $Y$ slučajnog vektora $(X,Y)$.

**Primjer 3.19.** *Odredimo marginalne distribucije dvodimenzionalnog normalnog slučajnog vektora $(X,Y) \sim \mathcal{N}(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ zadanog funkcijom gustoće (3.7). Funkciju gustoće slučajne varijable $X$ računamo na sljedeći način:*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho)^2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho)^2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)} dy =$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} = z \;\Rightarrow\; \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} = z + 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \\ dy = \sigma_2\, dz \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\rho^2\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}}\, dz =$$

$$\left| \frac{z}{\sqrt{1-\rho^2}} = t,\; dz = \sqrt{1-\rho^2}\, dt \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1}\, e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{2\pi\sigma_1}\, e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.$$

*Uočimo da je*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

*funkcija gustoće normalne distribucije s parametrima $\mu_1 \in \mathbb{R}$ i $\sigma_1^2$, $\sigma_1 > 0$, tj. $X \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$. Analognim postupkom slijedi da je $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$. Dakle, marginalne distribucije dvodimenzionalnog normalnog slučajnog vektora su normalne.*

Neka je $(X,Y)$ neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće $f$ i neka je $g$ neka funkcija koja uređenom paru realnih brojeva pridružuje realan broj, tj. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Može se dokazati (vidi npr. [26]) da u mnogo zanimljivih slučajeva (npr. ako je $g$ neprekidna) $g(X,Y)$ definira slučajnu varijablu na $\Omega$.

Može se također pokazati da za računanje očekivanja tako nastalih slučajnih varijabli nije potrebno tražiti funkciju distribucije od $g(X,Y)$, već se može iskoristiti funkcija gustoće od $(X,Y)$ i oblik funkcije $g$ (ako očekivanje uopće postoji) na sljedeći način:

$$Eg(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,dx\,dy. \tag{3.9}$$

Na primjer, komponiranjem projekcije uređenog para $(x,y)$ na prvu koordinatnu os

$$\pi_1(x,y) = x$$

i slučajnog vektora $(X,Y)$ dobijemo komponentu $X$, pa očekivanje $EX$ (ako postoji) možemo izračunati pomoću $E(\pi_1(X,Y))$, tj.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx, \tag{3.10}$$

gdje je $f$ funkcija gustoće slučajnog vektora $(X,Y)$, a $f_X$ marginalna gustoća komponente X.

Analogno je

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy.$$

**Primjer 3.20.** *Neka je neprekidan dvodimenzionalan slučajni vektor $(X,Y)$ zadan funkcijom gustoće*

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y} & , \ (x,y) \in \langle 0,\infty\rangle \times \langle 0,\infty\rangle \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases},$$

*gdje su $\lambda_1$ i $\lambda_2$ pozitivni realni brojevi. Slučajna varijabla $XY$ nastaje kompozicijom slučajnog vektora $(X,Y)\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ i funkcije $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane pravilom $g(x,y) = xy$. Matematičko očekivanje slučajne varijable $XY$ računamo na sljedeći način:*

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy = \lambda_1\lambda_2 \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} xye^{-\lambda_1 x - \lambda_1 y}\,dx\,dy = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2\lambda_2^2} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}.$$

*Odredimo i marginalne distribucije te očekivanja marginalnih distribucija slučajnog vektora $(X,Y)$. Funkciju gustoće slučajne varijable $X$ računamo na sljedeći način:*

$$f_X(x) = \lambda_1\lambda_2 \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}\,dy = \ldots = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, \quad x > 0.$$

*Dakle, $X$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda_1 > 0$. Slijedi da je $EX = 1/\lambda_1$. Analognim postupkom slijedi da $Y$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda_2 > 0$, pa je $EY = 1/\lambda_2$.*

### 3.2.1 Uvjetne gustoće. Nezavisnost

U ovom ćemo poglavlju ćemo bez dokaza navesti nekoliko rezultata korisnih za statističke primjene po analogiji s diskretnim slučajem. Tu se pojavljuje funkcija gustoće slučajnog vektora kao nositelj vjerojatnosnih svojstava umjesto tablice distribucije diskretnoga slučajnog vektora.

Neka je $(X, Y)$ neprekidan slučajni vektor s gustoćom $f(x, y)$ i $y$ takav realan broj da je $f_Y(y) > 0$. Funkciju

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \tag{3.11}$$

zovemo **uvjetna gustoća** od $X$ uz uvjet $Y = y$. Analogno je

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \tag{3.12}$$

uvjetna gustoća od $Y$ uz uvjet $X = x$. Ovdje su $f_Y$ i $f_X$ pripadne marginalne gustoće.

Veličine definirane formulom

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y=y}(x)\, dx, \tag{3.13}$$

odnosno

$$E(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|X=x}(y)\, dy \tag{3.14}$$

zovemo **uvjetno očekivanje** komponente $X$, uz uvjet $Y = y$, odnosno uvjetno očekivanje komponente $Y$, uz uvjet $X = x$.

**Primjer 3.21.** *Odredimo uvjetne distribucije dvodimenzionalnoga normalnog slučajnog vektora $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ zadanog funkcijom gustoće (3.7). Odredimo prvo uvjetnu distribuciju komponente $X$, uz uvjet $Y = y$, $y \in \mathbb{R}$. Funkciju gustoće uvjetne distrbiucije od $X$, uz uvjet $Y = y$, računamo pomoću funkcije gustoće $f(x, y)$ slučajnog vektora $(X, Y)$ i funkcije gustoće $f_Y(y)$ komponenete $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$:*

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\, e^{-\frac{\left(x-\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)\right)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Uočimo da je $f_{X|Y=y}(x)$ funkcija gustoće normalne distribucije s parametrima*

$$\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2) \quad i \quad \sigma_1^2(1-\rho^2).$$

*Iz tog rezultata odmah slijedi da su uvjetno očekivanje i varijanca slučajne varijable $X$, uz uvjet $Y = y$, dani sljedećim izrazima:*

$$E(X|Y = y) = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \qquad Var(X|Y = y) = \sigma_1^2(1 - \rho^2).$$

*Analogan rezultat vrijedi za uvjetnu distribuciju komponente $Y$, uz uvjet $X = x$:*

$$Y_{|X=x} \sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right),$$

$$E(Y|X = x) = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \qquad Var(Y|X = x) = \sigma_2^2(1 - \rho^2).$$

*Dakle, i uvjetne distribucije normalnog slučajnog vektora su normalne.*

U poglavlju o nezavisnosti komponenata dvodimenzionalnog slučajnog vektora vidjeli smo da se nezavisnost može karakterizirati činjenicom da se distribucija slučajnog vektora može dobiti kao produkt marginalnih distribucija. Problemom nezavisnosti komponenti neprekidnog slučajnog vektora nećemo se baviti detaljno. Navodimo samo da je u tom slučaju nezavisnost ekvivalentna činjenici da se funkcija gustoće slučajnog vektora može prikazati kao produkt marginalnih gustoća kao i činjenici da se funkcija distribucije slučajnog vektora može prikazati kao produkt marginalnih funkcija distribucije:

**Neka je $(X, Y)$ neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće $f$ i funkcijom distribucije $F$. Neka su $f_X$ $(F_X)$ odnosno $f_Y$ $(F_Y)$ njegove marginalne gustoće (funkcije distribucije). Reći ćemo da su slučajne varijable $X$ i $Y$ nezavisne ako za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi**

$$F(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y).$$

**Tada je i**

$$f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

**za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.**

Obratno, ako prethodna jednakost za gustoće vrijedi za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ osim eventualno na skupu površine nula, tada su $X$ i $Y$ nezavisne slučajne varijable.

Sada je lako vidjeti da se i ovdje, u slučaju nezavisnih komponenti, uvjetne gustoće podudaraju s odgovarajućim marginalnim gustoćama.

**Primjer 3.22.** *Promotrimo ponovno slučajni vektor zadan funkcijom gustoće*

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y} & , \ (x, y) \in \langle 0, \infty\rangle \times \langle 0, \infty\rangle \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases},$$

*gdje su $\lambda_1$ i $\lambda_2$ pozitivni realni brojevi. U primjeru 3.20 pokazali smo da su njegove marginalne distribucije eksponencijalne, tj. da je $X$ eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda_1 > 0$, a $Y$ eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda_2 > 0$:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \le 0 \end{cases}, \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} & , \ y > 0 \\ 0 & , \ y \le 0 \end{cases}.$$

*Uočimo da je u tom slučaju*

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

*pa su slučajne varijable $X$ i $Y$ nezavisne. Zbog nezavisnosti slučajnih varijabli $X$ i $Y$ vrijede sljedeće tvrdnje.*

*Marginalna distribucija komponente $X$ i uvjetna distribucija komponente $X$, uz uvjet $Y = y$ (za bilo koji $y > 0$), jednake su - eksponencijalne s parametrom $\lambda_1$.*

*Marginalna distribucija komponente $Y$ i uvjetna distribucija komponente $Y$, uz uvjet $X = x$ (za bilo koji $x > 0$), jednake su - eksponencijalne s parametrom $\lambda_2$.*

**Primjer 3.23.** *Na temelju primjera 3.19 u kojemu su određene marginalne distribucije dvodimenzionalnoga normalnog slučajnog vektora $(X, Y)$ s funkcijom gustoće (3.7) i karakterizacije nezavisnosti slučajnih varijabli, slijedi da komponente $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ normalnog slučajnog vektora $(X, Y)$ općenito nisu nezavisne. Međutim, za $\rho = 0$ funkcija gustoće (3.7) dana je izrazom*

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Uočimo da je u tom slučaju $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, tj. ako je $\rho = 0$, komponente normalnoga slučajnog vektora $(X, Y)$ nezavisne su.*

Svojstvo nezavisnih slučajnih varijabli, da se očekivanje produkta može izračunati kao produkt očekivanja, vrijedi i ovdje. Naime imamo:

**Teorem 3.4.** *Neka je $(X, Y)$ neprekidan slučajni vektor takav da su $X$ i $Y$ nezavisne slučajne varijable za koje postoji $EX$ i $EY$. Tada postoji $E(X\,Y)$ i vrijedi:*[5]

$$E(X\,Y) = E(X)\,E(Y).$$

**Primjer 3.24.** *U primjeru 3.22 pokazali smo da su komponente $X$ i $Y$ slučajnog vektora $(X, Y)$ nezavisne i eksponencijalno distribuirane s parametrima $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$, redom. Budući da je $EX = 1/\lambda_1$, a $EY = 1/\lambda_2$, prema teoremu 3.4 slijedi da je*

$$E(XY) = EX\,EY = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}.$$

*Sjetimo se da smo $E(XY)$ u primjeru 3.20 izračunali pomoću funkcije gustoće slučajnog vektora $(X, Y)$.*

[5] Taj teorem nećemo dokazivati, a zainteresirani čitatelj dokaz može naći u [26, teorem 11.5]

## 3.3 Kovarijanca i koeficijent korelacije

U ovom poglavlju bavimo se definiranjem osnovnih numeričkih katakteristika slučajnog vektora - momentima. Rezultati se odnose na diskretan i neprekidan dvodimenzionalan slučajni vektor za kojega smo opisali način računanja očekivanja slučajne varijable $g(X, Y)$, gdje je $g$ realna funkcija dviju varijabli.

Momenti slučajnog vektora poslužit će za opisivanje nekih svojstava slučajnog vektora slično kao što momenti slučajne varijable opisuju slučajnu varijablu.

**Definicija 3.5.** *Neka je $(X, Y)$ diskretan ili neprekidan dvodimenzionalan slučajni vektor. Očekivanje*

$$E(X^k Y^l), \quad k, l \in \mathbb{N}_0$$

*slučajne varijable $X^k Y^l$ (ako postoji) nazivamo* **ishodišni moment reda** $(k, l)$ *slučajnog vektora $(X, Y)$ i pišemo*

$$\mu_{kl} = E(X^k Y^l). \tag{3.15}$$

*Očekivanje $E\left((X - EX)^k (Y - EY)^l\right)$ (ako postoji) nazivamo* **centralni moment reda** $(k, l)$ *slučajnog vektora $(X, Y)$ i pišemo*

$$m_{kl} = E\left((X - EX)^k (Y - EY)^l\right). \tag{3.16}$$

Uočimo da momenti reda $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ daju ustvari očekivanje i varijancu komponenata slučajnog vektora. Naime, vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\mu_{10} = EX, \\
&\mu_{01} = EY, \\
&m_{20} = E\,(X - EX)^2 = \operatorname{Var} X, \\
&m_{02} = E\,(Y - EY)^2 = \operatorname{Var} Y.
\end{aligned}$$

Od posebne je važnosti za izučavanje slučajnih vektora centralni moment reda $(1, 1)$ kojega nazivamo **korelacijski moment** ili **kovarijanca** dvodimenzionalnoga slučajnog vektora. Dakle, kovarijanca dvodimenzionalnog slučajnog vektora $(X, Y)$ definirana je izrazom

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E\left((X - EX)(Y - EY)\right). \tag{3.17}$$

Definicijski oblik kovarijance može se lako, korištenjem linearnosti očekivanja, transformirati u oblik koji je nekada prikladniji za računanje:

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E\,(XY - X\,EY) - Y\,EX + EX\,EY) = E(XY) - EX\,EY.$$

**Primjer 3.25.** *Prisjetimo se primjera 3.16 koji je govorio o izvlačnju dvaju kupona iz kutije koja sadrži ukupno tri kupona označena brojevima* 1, 2 *i* 3. *U tom smo primjeru promatrali izvlačenje dvaju od triju kupona na sljedeća dva načina:*

*prvi izvučeni kupon vraća se u kutiju prije izvlačenja drugog kupona; S $X$ smo označili slučajnu varijablu koja se realizira brojem kojim je označen prvi izvučeni kupon, a s $Y$ slučajnu varijablu koja se realizira brojem kojim je označen drugi izvučeni kupon,*

*prvi izvučeni kupon ne vraća se u kutiju prije izvlačenja drugog kupona; S $U$ smo označili slučajnu varijablu koja se realizira brojem kojim je označen prvi izvučeni kupon, a s $V$ slučajnu varijablu koja se realizira brojem kojim je označen drugi izvučeni kupon.*

*Sjetimo se da su slučajne varijable $X$ i $Y$ nezavisne, dok slučajne varijable $U$ i $V$ nisu nezavisne. Distribucije slučajnih vektora $(X, Y)$ i $(U, V)$ dane su tablicama u primjeru 3.16. $X$, $Y$, $U$ i $V$ sve su jednako distribuirane s matematičkim očekivanjem*

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

*Odredimo sada* $\operatorname{Cov}(X, Y)$ *i* $\operatorname{Cov}(U, V)$*:*

- *budući da su $X$ i $Y$ nezavisne, znamo da je $E(XY) = EX\,EY$ pa slijedi da je* $\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX\,EY = 0$.
- *kako $U$ i $V$ nisu nezavisne, problem izračunavanja njihove kovarijance svodi se na problem izračunavanja očekivanja $E(UV)$:*

$$\begin{aligned} E(UV) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} ijP\{X = i, Y = j\} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

*Sada slijedi da je*

$$\operatorname{Cov}(U, V) = E(UV) - EU\,EV = \frac{11}{3} - 4 = -\frac{1}{3}.$$

**Primjer 3.26.** *Odredimo kovarijancu komponenti dvodimenzionalnoga multinomnog slučajnog vektora $(X, Y) \sim MULT(n, p, q)$ čija je distribucija dana u primjeru 3.9. Budući da su marginalne distribicije toga slučajnog vektora binome, tj. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ i $Y \sim \mathcal{B}(n, q)$, zaključujemo da postoje $x \in \mathcal{R}(X)$ i $y \in \mathcal{R}(Y)$ takvi da je $P\{X = x, Y = y\} \neq P\{X = x\}P\{Y = y\}$, pa slučajne varijable $X$ i $Y$ nisu nezavisne. Također znamo da je $EX = np$ i $EY = nq$. Da bismo izračunali kovarijancu slučajnih varijabli $X$ i $Y$, preostaje još izračunati $E(XY)$:*

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{n} xyP\{X = x, Y = y\} = \sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{n-x} xyP\{X = x, Y = y\} = n(n-1)pq.$$

*Sada slijedi da je*

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX\,EY = n(n-1)pq - n^2pq = -npq.$$

Važnost tog momenta za opisivanje slučajnog vektora proizlazi iz činjenice da se kovarijanca, kao numerička karakteristika slučajnog vektora, može povezati s pojmom nezavisnosti slučajnih varijabli. Naime, vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 3.5.** *Neka je* $(X, Y)$ *neprekidan ili diskretan dvodimenzionalan slučajni vektor za koji postoje* $EX$ *i* $EY$*. Ako su slučajne varijable* $X$ *i* $Y$ *nezavisne, onda je* $\text{Cov}(X, Y) = 0$*.*

**Dokaz.** Neka su ispunjeni uvjeti teorema. Zbog nezavisnosti je

$$E(XY) = EX\,EY.$$

Dakle, vrijedi:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX\,EY = 0.$$

Posljedica je tog terema sljedeća: **ako dvodimenzionalan slučajni vektor ima kovarijancu različitu od nule, onda su njegove komponente nužno zavisne**.

Valja napomenuti da **općenito ne vrijedi obrat tog teorema**, tj. ako je kovarijanca od $(X, Y)$ jednaka nuli, to ne znači nužno da su slučajne varijable $X$ i $Y$ nezavisne, što je ilustrirano sljedećim primjerom.

**Primjer 3.27.** *Neka je* $U$ *diskretna slučajna vrijabla definirana tablicom distribucije*

$$U = \begin{pmatrix} -\pi/2 & 0 & \pi/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

*i neka je* $(X, Y)$ *slučajni vektor definiran kao* $X = \sin U$, $Y = \cos U$*. Distribucija je tog slučajnog vektora zadana sljedećom tablicom:*

| $X \setminus Y$ | 0 | 1 | $p_X$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | 1/3 | 0 | 1/3 |
| 0 | 0 | 1/3 | 1/3 |
| 1 | 1/3 | 0 | 1/3 |
| $p_Y$ | 2/3 | 1/3 | 1 |

*Kovarijanca je tog slučajnog vektora* 0*, a komponente očito nisu nezavisne (npr.* $p(1,1) \neq p_X(1)p_Y(1)$*).*

**Definicija 3.6.** *Neka je* $(X, Y)$ *slučajni vektor za koji je* $\text{Cov}(X, Y) = 0$*. Tada kažemo da su njegove komponente* $X$ *i* $Y$ **nekorelirane**.

Iz definicije kovarijance vidimo da važnu ulogu u njezinom iznosu ima odstupanje pojedine komponente slučajnog vektora od njezinog očekivanja (devijacija). Međutim, devijaciju smo slučajne varijable već opisali varijancom, odnosno standardnom devijacijom slučajne varijable. Da bismo smanjili utjecaj devijacije na numeričku karakteristiku kojom želimo dobiti nove informacije o slučajnom vektoru, od velikog je interesa proučavanje kovarijance standardiziranog oblika slučajnog vektora

$(X, Y)$. Naime, ukoliko $X$ i $Y$ imaju varijance $\sigma_X^2 \neq 0$ i $\sigma_Y^2 \neq 0$, možemo ih standardizirati (vidi poglavlje 2.7). Ako označimo $\mu_X = EX$, $\mu_Y = EY$, postupak standardizacije daje vektor

$$(X_s, Y_s) = \left( \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)$$

čija je kovarijanca

$$\operatorname{Cov}(X_s, Y_s) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Tako nastaje **koeficijent korelacije** slučajnog vektora $(X, Y)$ koji je definiran izrazom

$$\rho_{X,Y} = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \tag{3.18}$$

gdje su $\sigma_X$ i $\sigma_Y$ oznake za standardnu devijaciju odgovarajuće komponente slučajnog vektora.

**Primjer 3.28.** *Problem određivanja koeficijenta korelacije normalnog slučajnog vektora* $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ *(funkcija gustoće definirana je pravilom (3.7)), svodi se na izračunavanje njegove kovarijance. Za to nam treba* $E(XY)$*:*

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)\, dxdy = \rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2.$$

*Sada slijedi da je*

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX\,EY = \rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu 2 - \mu_1\mu_2 = \rho\sigma_1\sigma_2.$$

*Prema tome, koeficijent korelacije komponenti* $X$ *i* $Y$ *dvodimenzionalnoga normalnog slučajnog vektora jest*

$$\frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X \operatorname{Var} Y}} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma 2} = \rho.$$

*Dakle, parametar* $\rho$ *u distribuciji normalnoga slučajnog vektora* $(X, Y)$ *jest zapravo koeficijent korelacije njegovih komponenti. Sjetimo se da smo u primjeru 3.23 pokazali da su za* $\rho = 0$ *komponente normalnoga slučajnog vektora nezavisne. To znači da u tom slučaju nekoreliranost slučajnih varijabli* $X$ *i* $Y$ *povlači njihovu nezavisnost, tj. u slučaju kad je* $\rho = 0$ *komponente dvodimenzionalnoga normalnog slučajnog vektora nezavisne su onda i samo onda ako su nekorelirane.*

Sljedeći teorem daje dovoljne uvjete za postojanje kovarijance slučajnog vektora i jednu korisnu nejednakost.

**Teorem 3.6.** *Neka je* $(X, Y)$ *slučajni vektor za koji je* $0 < E\left(X^2\right) < \infty$ *i* $0 < E\left(Y^2\right) < \infty$. *Tada postoji kovarijanca i vrijede nejednakosti:*

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1,$$

$$(E(XY))^2 \leq E\left(X^2\right)\, E\left(Y^2\right).$$

**Dokaz.** Pretpostavimo da je $(X, Y)$ slučajni vektor takav da su $X$ i $Y$ slučajne varijable s $EX = EY = 0$ i $\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} Y = 1$. Ako postoji kovarijanca tog slučajnog vektora, onda je $\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY)$ s obzirom da je $EX\,EY = 0$. Također je, za takve slučajne varijable, $\operatorname{Var} X = E\left(X^2\right)$ i $\operatorname{Var} Y = E\left(Y^2\right)$. Dakle, kovarijanca postoji ako postoji $E|XY|$.

Korištenjem nejednakosti $2|xy| \leq x^2+y^2$ i monotonosti očekivanja vidimo da vrijedi:

$$E|XY| \leq \frac{1}{2}\left(E\left(X^2\right) + E\left(Y^2\right)\right) < \infty.$$

Dakle, kovarijanca postoji. Osim toga,

$$|E(XY)| \leq E|XY| \leq \frac{1}{2}\left(E\left(X^2\right) + E\left(Y^2\right)\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

S obzirom da je, za taj slučajni vektor, kovarijanca ujedno i koeficijent korelacije, vrijedi prva nejednakost teorema. Uočimo također da su za takve slučajne varijable prva i druga nejednakost u iskazu teorema ekvivalentne.

Pretpostavimo da je $(X, Y)$ bilo koji slučajni vektor kao u iskazu teorema. Tada možemo provesti postupak standardizacije, a standardizirani oblik $(X_s, Y_s)$ zadovoljava uvjete prvog dijela dokaza. Dakle, postoji kovarijanca od $(X_s, Y_s)$ i vrijedi $\left(E(X_s Y_s)\right)^2 \leq E\left(X_s^2\right) E\left(Y_s^2\right) = 1$. Osim toga vrijedi da je $X = \sigma_X X_s + \mu_X$, $Y = \sigma_Y Y_s + \mu_Y$, gdje su $\sigma_X, \mu_X, \sigma_Y, \mu_Y$ uobičajene oznake za standardne devijacije, odnosno očekivanja odgovarajućih slučajnih varijabli.

S obzirom da je

$$\begin{aligned} E|XY| &= E|(\sigma_X X_s + \mu_X)(\sigma_Y Y_s + \mu_Y)| \\ &\leq \sigma_X \sigma_Y E|X_s Y_s| + \sigma_X |\mu_Y| E|X_s| + \sigma_Y |\mu_X| E|Y_s| + |\mu_X \mu_Y| \end{aligned}$$

vidimo da kovarijanca postoji. Koeficijent korelacije varijabli $X$ i $Y$ isti je kao koeficijent korelacije njihovih standardiziranih oblika, pa je, po prvom dijelu dokaza, po apsolutnoj vrijednosti manji ili jednak 1.

Za dokaz druge nejednakosti uočimo da je

$$\begin{aligned} \left(E(XY)\right)^2 &= \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \left(E(X_s Y_s)\right)^2 + 2\sigma_X \sigma_y \mu_X \mu_Y E(X_s Y_s) + \mu_X^2 \mu_Y^2 \\ &\leq \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + 2\sigma_X \sigma_y |\mu_X \mu_Y| + \mu_X^2 \mu_Y^2 \\ &\leq (\sigma_X^2 + \mu_X^2)(\sigma_Y^2 + \mu_Y^2) \\ &= E\left(X^2\right) E\left(Y^2\right). \end{aligned}$$

Da je koeficijent korelacije korisna numerička karakteristika za opisivanje veze među komponentama slučajnog vektora, slijedi i iz sljedećeg teorema koji pokazuje da se linearna veza među komponentama može uočiti na osnovu vrijednosti koeficijenta korelacije.

**Teorem 3.7.** *Neka je $(X, Y)$ slučajni vektor za koji je $0 < \sigma_X < \infty$ i $0 < \sigma_Y < \infty$. Veza je među komponentama linearna, tj. postoje realni brojevi $a$ $(a \neq 0)$ i $b$ takvi da je*

$$Y = aX + b$$

*onda i samo onda ako je $|\rho_{X,Y}| = 1$. Pritom je koeficijent korelacije $1$ ako je $a > 0$, odnosno $-1$ ako je $a < 0$.*

**Dokaz.** Neka je slučajni vektor $(X, Y)$ takav da je $Y = aX + b$, $(a \neq 0)$. Po pretpostavkama teorema postoji kovarijanca pa vrijedi:

$$E(X - EX)(Y - EY) =$$

$$= E\left((X - EX)(aX + b) - E(aX + b)\right) = E\left((X - EX)\, a(X - EX)\right) =$$

$$= aE(X - EX)^2.$$

Dakle,

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = a\sigma_X^2.$$

No, $\mathrm{Var}\,Y = a^2 \mathrm{Var}\,X$, pa je

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}\,(X, Y)}{\sigma_Y \sigma_X} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X |a| \sigma_X} = \frac{a}{|a|}.$$

Ako je $a > 0$, onda je $\rho_{X,Y} = 1$. Ako je $a < 0$, $\rho_{X,Y} = -1$.

Dokažimo obratnu tvrdnju. Pretpostavimo da je $\rho_{X,Y} = 1$. Definirajmo slučajnu varijablu

$$Z = \frac{1}{\sigma_X} X - \frac{1}{\sigma_Y} Y.$$

Tada je $\mathrm{Var}\,Z = 0$. Zaista,

$$\mathrm{Var}\,Z = E\left(\frac{1}{\sigma_X} X - \frac{1}{\sigma_Y} Y\right)^2 - \left(E(\frac{1}{\sigma_X} X - \frac{1}{\sigma_Y} Y)\right)^2 = 1 - 2\rho_{X,Y} + 1 = 0.$$

Dakle, $Z$ je konstanta, označimo $Z = c$. Vrijedi:

$$c = \frac{1}{\sigma_X} X - \frac{1}{\sigma_Y} Y,$$

$$Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X - \sigma_Y c.$$

Za $\rho_{X,Y} = -1$ se tvrdnja može dokazati na isti način analiziranjem slučajne varijable

$$Z_1 = \frac{1}{\sigma_X} X + \frac{1}{\sigma_Y} Y.$$

Slično kao kod vektora realnih brojeva, često je korisno i slučajni vektor zapisivati u matričnom obliku, tj. slučajni vektor $(X, Y)$ zapisujemo kao $[X, Y]^\tau$. Tu oznaku koristit ćemo u nastavku za definiranje očekivanja slučajnog vektora.

Ako za slučajni vektor $\mathbf{Z} = [X, Y]^\tau$ postoje $EX$ i $EY$, zapisivat ćemo ih u vektorskom obliku kao $[EX, EY]^\tau$ i zvati **očekivanje** slučajnog vektora $\mathbf{Z} = [X, Y]^\tau$. Varijance i kovarijancu također zapisujemo matrično. Naime, označimo li $E\mathbf{Z} = [EX, EY]^\tau$, onda je

$$E(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^\tau = \begin{bmatrix} E(X - EX)^2 & E(X - EX)(Y - EZ) \\ E(X - EX)(Y - EZ) & E(Y - EY)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}\, X & \mathrm{Cov}\,(X, Y) \\ \mathrm{Cov}\,(X, Y) & \mathrm{Var}\, Y \end{bmatrix}.$$

Takvu matricu $\mathbf{Cov}\,(X, Y) = E(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})(\mathbf{Z} - E\mathbf{Z})^\tau$ zovemo **matrica kovarijanci** slučajnog vektora $(X, Y)$.
Uočimo:

- matrica kovarijanci jest simetrična,
- matrica kovarijanci jest pozitivno semidefinitna.[6]

Neka je $\mathbf{Z_s}$ standardizirana varijanta slučajnog vektora $\mathbf{Z}$, tj.

$$\mathbf{Z}_s = \left[ \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right]^\tau.$$

Njegovu matricu kovarijanci zovemo **korelacijska matrica** slučajnog vektora $\mathbf{Z} = [X, Y]^\tau$ i označavamo $\mathbf{Corr}\,(X, Y)$. Očigledno vrijedi

$$\mathbf{Corr}\,(X, Y) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{X,Y} \\ \rho_{X,Y} & 1 \end{bmatrix}.$$

[6]Dokažite ove tvrdnje.

**Primjer 3.29.** *Neka su* $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ *i* $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ *nezavisne normalne slučajne varijable. Njih možemo shvatiti kao komponente dvodimenzionalnoga normalnog slučajnog vektora s očekivanjem* $[\mu_1, \mu_2]^\tau$*, matricom kovarijanci*

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

*i korelacijskom matricom*

$$\mathbf{Corr}(X,Y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Očekivanje slučajnog vektora, matrica kovarijanci i korelacijska matrica mogu se na analogan način definirati za $n$-dimenzionalan slučajni vektor $\mathbf{Z} = [X_1, \ldots, X_n]^\tau$.

## 3.4 Općenito o nezavisnosti slučajnih varijabli

Iz definicije nezavisnosti diskretnih slučajnih varijabli (definicija 3.3), može se vidjeti da je jednakost

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)\, p_Y(y_j), \quad \text{za sve } x_i \in \mathcal{R}(X) \text{ i } y_j \in \mathcal{R}(Y),$$

ekvivalentna jednakosti

$$F(x,y) = F_X(x) F_Y(y), \quad \text{za sve } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.19}$$

gdje je $F$ funkcija distribucije diskretnoga slučajnog vektora $(X, Y)$, $F_X$ marginalna funkcija distribucije komponente $X$, a $F_Y$ marginalna funkcija distribucije komponente $Y$.

Budući da su vjerojatnosna svojstva slučajne varijable općenito definirana funkcijom distribucije, nezavisnost ćemo slučajnih varijabli općenito opisati upravo korištenjem jednakosti (3.19).

Neka su $X$ i $Y$ slučajne varijable s funkcijama distribucije $F_X$ i $F_Y$, redom, te neka je $F$ funkcija distribucije slučajnog vektora $(X, Y)$. Reći ćemo da su $X$ i $Y$ **nezavisne** slučajne varijable ako vrijedi

$$F(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y) \quad \text{za sve } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.20}$$

Takav je opis nezavisnih slučajnih varijabli lako poopćiti i na $n$-dimenzionalan slučajni vektor.

Neka su $X_1, \dots, X_n$ slučajne varijable na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s pripadnim funkcijama distribucije $F_1, \dots, F_n$ i neka je $F$ funkcija distribucije slučajnog vektora $(X_1, \dots, X_n)$, tj.

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n\}, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Reći ćemo da su slučajne varijable $X_1, \dots, X_n$ **nezavisne** ako vrijedi[7]

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n). \tag{3.21}$$

Posljedica je nezavisnosti skupa slučajnih varijabli $\{X_1, \dots, X_n\}$ da i svi podskupovi tog skupa sadrže međusobno nezavisne slučajne varijable. (Npr. $X_i$ i $X_j$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ jesu također nezavisne.)

Vezano uz pojam nezavisnosti važno je istaknuti da za nezavisne slučajne varijable koje imaju varijancu vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 3.8.** *Neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne varijable takve da postoji varijanca $\operatorname{Var} X_k$, $k = 1, \dots, n$ i neka su $a_1, \dots, a_n$ realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^n a_k^2 \operatorname{Var} X_k. \tag{3.22}$$

**Dokaz.** Promotrimo prvo $\operatorname{Var}\left(\sum\limits_{k=1}^n a_k X_k\right)$:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right) = E\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k - E\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right)\right)^2 =$$

$$= E\left(\sum_{k=1}^n (a_k X_k - a_k E X_k)\right)^2 = E\left(\sum_{k,j=1}^n (a_k X_k - a_k E X_k)(a_j X_j - a_j E X_j)\right).$$

Za $k \neq j$ jest zbog nezavisnosti

$$E(X_k - EX_k)(X_j - EX_j) = 0,$$

pa zbog linearnosti očekivanja vrijedi:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right) = E\left(\sum_{k=1}^n (a_k X_k - a_k E X_k)^2\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k^2 E(X_k - EX_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \operatorname{Var} X_k.$$

[7] Općenitu definiciju nezavisnosti slučajnih varijabli $X_1, \dots, X_n$ zainteresiran čitatelj može pronaći u [26].

**Primjer 3.30.** *Neka su* $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\ldots$, $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ *nezavisne normalne slučajne varijable. Njih možemo shvatiti kao komponente n-dimenzionalnoga normalnog slučajnog vektora s očekivanjem* $[\mu_1, \ldots, \mu_n]^\tau$, *matricom kovarijanci*

$$\mathbf{Cov}(X_1, \ldots, X_n) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

*i jediničnom korelacijskom matricom reda* $n$.
*Definirajmo slučajnu varijablu*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + \ldots + X_n$$

*i izračunajmo njezino matematičko očekivanje i varijancu. Zbog linearnosti očekivanja slijedi da je*

$$ES_n = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} EX_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k.$$

*Varijancu slučajne varijable* $S_n$, *zbog nezavisnosti slučajnih varijabli* $X_1, \ldots, X_n$, *računamo pomoću teorema 3.8. Dakle,*

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\, X_k = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

*Uočimo da ukoliko su slučajne varijable* $X_1, \ldots, X_n$ *i jednako distribuirane, tj. ako je* $X_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *za svaki* $k \in \{1, \ldots, n\}$, *tada je* $ES_n = n\mu$, *a* $\mathrm{Var}\, S_n = n\sigma^2$.

## 3.5 Neki rezultati o nizovima slučajnih varijabli

U poglavlju 1.3 o statističkom pristupu modeliranju vjerojatnosti naveli smo svojstvo statističke stabilnosti relativnih frekvencija koje kaže da se, kod **nezavisnog** ponavljanja istog pokusa puno puta, relativna frekvencija pojavljivanja odabranog događaja stabilizira u okolini nekog broja.

U poglavlju u kojemu je definirana normalna slučajna varijabla opisan je pokus nazvan "Galtonova daska" koji ilustrira činjenicu da normalna distribucija dobro modelira realizacije pokusa čiji su ishodi posljedica sume mnogo međusobno nezavisnih i jednako distribuiranih utjecaja.

U ovom poglavlju navodimo dva rezultata koji se odnose na granično ponašanje nizova slučajnih varijabli i dokazuju istinitost navedenih svojstava.

### 3.5.1 Slabi zakon velikih brojeva i Bernoullijeva shema

Korištenjem slabog zakona velikih brojeva možemo objasniti statističku stabilnost relativnih frekvencija u uvjetima navedenim u poglavlju 1.3.

**Definicija 3.7.** *Kažemo da niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots$ zadovoljava* **slabi zakon velikih brojeva** *ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}|S_n - ES_n| \geq \varepsilon\right\} = 0,$$

*gdje je*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Taj zakon možemo interpretirati na sljedeći način:

**Ako niz slučajnih varijabli zadovoljava slabi zakon velikih brojeva, onda vjerojatnost da se realizacija prosjeka slučajnih varijabli $X_1, \ldots, X_n$ razlikuje od očekivanja prosjeka za više od proizvoljno izabranog malog broja teži nuli s povećanjem broja slučajnih varijabli u izračunu prosjeka.**

Postoje mnogi rezultati koji daju dovoljne uvjete na niz slučajnih varijabli da bi on zadovoljavao slabi zakon velikih brojeva. Ovdje ćemo dokazati samo jedan koji će biti dovoljan za objašnjenje statističke stabilnosti relativnih frekvencija odabranog događaja kod nezavisnog ponavljanja istog pokusa.

**Teorem 3.9.** *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli takav da su, za svaki $n \in \mathbb{N}$, slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i neka su varijance tih slučajnih varijabli uniformno ograničene, tj. postoji $M > 0$ takav da je*

$$\max_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Var} X_k \leq M.$$

*Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}|S_n - ES_n| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

**Dokaz.** *U dokazu koristimo Čebiševljevu nejednakost, tj. za svaku je slučajnu varijablu $Y$ koja ima varijancu i za svaki $\varepsilon > 0$*

$$P\{|Y - EY| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\operatorname{Var} Y}{\varepsilon^2}.$$

*Neka je $n$ dan prirodan broj i $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$. Zbog nezavisnosti je*

$$\operatorname{Var} Y_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{Var} S_n$$

*pa vrijedi:*

$$P\left\{\frac{1}{n}|S_n - ES_n| \geq \varepsilon\right\} = P\{|Y_n - EY_n| \geq \varepsilon\} \leq$$
$$\leq \frac{\operatorname{Var} S_n}{n\varepsilon^2} \leq \frac{M}{n\varepsilon^2}.$$

*Dakle, slijedi da je*

$$0 \leq P\left\{\frac{1}{n}|S_n - ES_n| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{M}{n\varepsilon^2}.$$

*Stoga je*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}|S_n - ES_n| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

**Primjer 3.31.** *Neka je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli čije su distribucije zadane tablicama*

$$X_n = \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n \\ \frac{1}{2^{2n+1}} & 1 - \frac{1}{2^{2n}} & \frac{1}{2^{2n+1}} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Da bismo provjerili zadovoljava li taj niz slabi zakon velikih brojeva, izračunajmo očekivanja i varijance slučajnih varijabli $X_n$ i $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$:*

$$\begin{aligned}
EX_n &= -2^n \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},\\
\operatorname{Var} X_n &= EX_n^2 = 2^{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} + 2^{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\\
ES_n &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} EX_i = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},\\
\operatorname{Var} S_n &= \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.
\end{aligned}$$

*Budući da je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli čije su varijance jednake jedan, slijedi da niz $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva 3.9, tj. da je za svaki $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}\,|S_n| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

*Riječima rečeno, za svaki se $\varepsilon > 0$ vjerojatnost odstupanja prosjeka niza nezavisnih slučajnih varijabli iz primjera 3.31 od nule za $\varepsilon$ ili više može učiniti proizvoljno malom odabirom dovoljno velikog prirodnog broja $n$.*

Slabi zakon velikih brojeva specijalno vrijedi i za niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje imaju varijancu, a koji je opisan sljedećom definicijom.

**Definicija 3.8.** *Kažemo da je niz slučanih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$* **niz nezavisnih i jednako distribuiranih** *slučajnih varijabli ako vrijedi:*

- *sve slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots$ imaju istu distribuciju i*
- *za sve su $n \in \mathbb{N}$ slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne.*

*Za takav niz koristimo kraticu "n. j. d. niz".*

Pretpostavimo da je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n. j. d. niz i neka je varijanca $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2$, a $EX_1 = \mu$. Uočimo da svaka slučajna vrijabla iz tog niza ima isto očekivanje i varijancu kao $X_1$ zbog jednake distribuiranosti.

Neka je $\overline{X}_n$ aritmetička sredina (prosjek) slučajnih varijabli $X_1, \ldots X_n$, tj.

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

i $\left(\overline{X}_n,\, n \in \mathbb{N}\right)$ pripadni niz aritmetičkih sredina. Koristeći svojstva očekivanja i varijance vidimo da vrijedi:

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \mu,$$

$$\operatorname{Var} \overline{X}_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Osim toga,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n$$

pa se na taj niz aritmetičkih sredina može primijeniti slabi zakon velikih brojeva, tj. za svaki je $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Taj rezultat možemo tumačiti na sljedeći način:
**Vjerojatnost da se aritmetička sredina n. j. d. niza slučajnih varijabli razlikuje od njihovog očekivanja za $\varepsilon$ ili više možemo učiniti proizvoljno malom birajući $n$ dovoljno veliko.**

**Primjer 3.32.** *Neka je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih standardnih normalnih slučajnih varijabli, tj.*

$$X_n \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Sada znamo da je za svaki prirodan broj $n$ $EX_n = 0$ i $\operatorname{Var} X_n = 1$, pa stoga taj niz slučajnih varijabli zadovoljava slabi zakon velikih brojeva, tj. za svaki je $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|\overline{X}_n| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

*Riječima rečeno, za svaki se $\varepsilon > 0$ vjerojatnost da aritmetička sredina niza nezavisnih standardnih normalnih slučajnih varijabli odstupa od nule za barem $\varepsilon$ može učiniti proizvoljno malom odabirom dovoljno velikog prirodnog broja $n$.*

*Budući da je za jednako distribuirane slučajne varijable* $X_1, \dots, X_n$ $\operatorname{Var} \overline{X}_n = \sigma^2/n$, *iz Čebiševljeve nejednakosti slijedi da je*

$$P\{|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}.$$

*Uzmimo npr.* $\varepsilon = 0.01$. *Ako želimo postići vjerojatnost manju od* $0.05$ *da se aritmetička sredina niza* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *razlikuje od očekivanja* $\varepsilon = 0.01$ *ili više, tada* $n$ *ocjenjujemo na sljedeći način:*

$$n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 P\left\{\left|\overline{X}_n\right| \geq \varepsilon\right\}} = 200000.$$

### Statistička definicija vjerojatnosti

Korištenjem slabog zakona velikih brojeva primijenjenog na n. j. d. niz Bernoullijevih slučajnih varijabli možemo se uvjeriti da je opravdan statistički pristup modeliranju vjerojatnosti, pod pretpostavkom da modeliramo vjerojatnost pojavljivanja događaja na temalju nezavisnih ponavljanja istog pokusa (poglavlje 1.3).

Taj problem opisat ćemo koristeći tzv. Bernoullijevu shemu.

**Bernoullijeva shema** jest slučajni pokus koji se sastoji od $n$ međusobno nezavisnih ponavljanja uvijek istog Bernoullijevog pokusa opisanog distribucijom

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Dakle, $(X_1, \dots X_n)$ je n. j. d. vektor s distribucijom svake komponente jednakom distribuciji od $X$.

**Primjer 3.33.** *Model Bernoullijeve sheme može se primijeniti kod nezavisnog bacanja istog novčića n puta zaredom, pri čemu je p vjerojatnost da se okrene npr. glava.*

Skup je svih mogućih realizacija tog slučajnog vektora

$$\mathcal{R}(X_1, \dots, X_n) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}\},$$

a distribucija je zadana s

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_n) &= P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, \ \ (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Tako je, npr.

$$p(1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) = p^3(1-p)^{n-3},$$
$$p(0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0) = p^2(1-p)^{n-2}.$$

U statističkoj definiciji vjerojatnosti koristili smo upravo takav model, tj. isti pokus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ponavljali smo $n$ puta nezavisno i definirali vjerojatnost događaja $A \in \mathcal{F}$ kao broj oko kojega se gomilaju relativne frekvencije događaja $A$ s povećavanjem broja ponavljanja pokusa, tj.

$$P(A) \approx \frac{f_A}{n},$$

gdje je $f_A$ frekvencija događaja $A$.
Neka je $X$ slučajna varijabla u tom pokusu definirana na sljedeći način:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 \ , \ \omega \in A \\ 0 \ , \ \omega \notin A \end{cases}.$$

Tada je

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad 0 \leq p \leq 1,$$

gdje je $p = P\{X = 1\}$ vjerojatnost da se dogodio događaj $A$.

Nezavisnim ponavljanjem našeg pokusa nastaje n. j. d. niz $(X_1, \ldots, X_n)$ Bernoullijevih slučajnih varijabli na koji možemo primijeniti slabi zakon velikih brojeva. Pri tome je:

$$EX = EX_i = p, \quad i \in \{1, \ldots n\},$$

$$f_A = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{f_A}{n},$$

pa je

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ \left| \frac{f_A}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

za sve $\varepsilon > 0$, što opravdava statistički pristup modeliranju vjerojatnosti pod navedenim uvjetima.

**Primjer 3.34.** *Isti model može se primijeniti i kod nezavisnog bacanja jedne pravilno izrađene igraće kockice $n$ puta zaredom. Označimo sa 1 realizaciju događaja "okrenula se šestica", a s 0 realizaciju događaja "nije se okrenula šestica". Ishod svakog od $n$ bacanja te kockice modeliramo Bernoullijevom slučajnom varijablom*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix},$$

*čiju distribuciju možemo, osim gornjom tablicom, zapisati i na sljedeći način:*

$$\mathcal{R}(X) = \{0, 1\},$$

$$P\{X = x\} = \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x} = \frac{5^{1-x}}{6}, \quad x \in \mathcal{R}(X).$$

*Dakle, $X$ je Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $p = 1/6$.*
*Ishode $n$ nezavisnih bacanja te kockice, pri čemu nas zanimaju događaji "okrenula se šestica" (1) i "nije se okrenula šestica" (0), modelirat ćemo nezavisnim slučajnim varijablama $X_1, \dots, X_n$ koje su jednako distribuirane kao slučajna varijabla $X$, tj. $n$-dimenzionalnim slučajnim vektorom $(X_1, \dots, X_n)$. Zbog nezavisnosti i jednake distribuiranosti slučajnih varijabli $X_1, \dots, X_n$, slijedi da je distribucija slučajnog vektora $(X_1, \dots, X_n)$ dana izrazom*

$$P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{5^{1-x_i}}{6}, \quad x_i \in \mathcal{R}(X_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

*Tako je, primjerice, vjerojatnost da se u $n$ nezavisnih bacanja jedne pravilno izrađene igraće kockice svaki put (tj. svih $n$ puta) okrene šestica*

$$P\{X_1 = 1, \dots, X_n = 1\} = \frac{1}{6^n}.$$

### 3.5.2 Centralni granični teorem

Centralni granični teoremi govore o uvjetima pod kojima niz funkcija distribucije standardiziranih suma slučajnih varijabli konvergira prema funkciji distribucije standardne normalne slučajne varijable.

**Definicija 3.9.** *Neka je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s pripadnim nizom funkcija distribucije $(F_n,\, n \in \mathbb{N})$. Ako postoji funkcija distribucije $F$ takva da $F_n(x) \to F(x)$ za svaki $x$ u kojemu je $F$ neprekidna, tada kažemo da niz $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli $X$ čija je funkcija distribucije $F$ i pišemo:*

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Konvergencija po distribuciji zapravo znači da, za dovoljno velike $n$, $P\{X_n \le x\}$ možemo aproksimirati s $F(x)$.

**Primjer 3.35.** *Neka je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli uniformno distribuiranih na intervalu $\langle 0, a\rangle$, $a > 0$, tj. za svaki $i \in \mathbb{N}$ jest*

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ x/a & , x \in [0, a\rangle \\ 1 & , x \in [a, \infty\rangle \end{cases}.$$

*Ako je $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, tada je zbog nezavisnosti i jednake distribuiranosti slučajnih varijabli iz niza $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz $(Y_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s funkcijama distribucije*

$$F_{Y_n}(y) = P\{Y_n \le y\} = P\{\max\{X_1, \dots, X_n\} \le y\} = P\{X_1 \le y, \dots, X_n \le y\} =$$

$$= P\{X_1 \le y\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n \le y\} = \left(F_{X_1}(y)\right)^n.$$

*Definirajmo sada novi niz slučajnih varijabli $(Z_n,\, n \in \mathbb{N})$, gdje je*

$$Z_n = n(a - Y_n), \quad a > 0.$$

*Budući da za svaki $n \in \mathbb{N}$ znamo funkciju distribucije slučajne varijable $Y_n$, slijedi da je funkcija distribucije slučajne varijable $Z_n$ dana izrazom*

$$F_{Z_n}(z) = P\{Z_n \leq z\} = P\{n(a - Y_n) \leq z\} = 1 - P\left\{Y_n < a - \frac{z}{n}\right\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , z \in \langle -\infty, 0\rangle \\ 1 - \left(1 - \frac{z}{an}\right)^n & , z \in [0, an\rangle \\ 1 & , z \in [an, \infty\rangle \end{cases}.$$

*Budući da je*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{z}{an}\right)^n\right) = 1 - e^{-\frac{z}{a}}, \quad z \geq 0,$$

*slijedi da je*

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & , z \in \langle -\infty, 0\rangle \\ 1 - e^{-\frac{z}{a}} & , z \in [0, \infty\rangle \end{cases}.$$

*Dakle, niz slučajnih varijabli $(Z_n,\, n \in \mathbb{N})$ po distribuciji konvergira prema eksponencijalnoj slučajnoj varijabli s parametrom $1/a$.*

**Primjer 3.36.** *Neka je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s funkcijama distribucija*

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ x^n & , x \in [0, 1\rangle \\ 1 & , x \in [1, \infty\rangle \end{cases}.$$

*Budući da je za $x \in [0, 1\rangle$*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

*slijedi da je*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \langle -\infty, 1\rangle \\ 1 & , x \in [1, \infty\rangle \end{cases},$$

*tj. niz slučajnih varijabli $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ konvergira po distribuciji prema degeneriranoj slučajnoj varijabli $X$ za koju je $P\{X = 1\} = 1$. Kažemo da niz slučajnih varijabli $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ konvergira po distribuciji prema jedinici.*

Sljedeći teorem govori o konvergenciji po distribuciji niza standardiziranih parcijalnih suma niza nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli prema standardnoj normalnoj slučajnoj varijabli.

**Teorem 3.10** (Lévy)**.** *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n. j. d. niz slučajnih varijabli s očekivanjem $\mu$ i varijancom $\sigma^2$ i neka je $S_n$ njegova $n$-ta parcijalna suma. Tada*[8]

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

**Primjer 3.37.** *Iznimno, ako je n. j. d. niz $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz Bernoullijevih slučajnih varijabli*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0, 1\rangle,$$

*(vidi Bernoullijenu shemu), tada je $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$, $ES_n = np$, $\operatorname{Var} S_n = np(1-p)$, pa možemo zaključiti da*

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

[8] Za dokaz pogledati [26].

*Dakle, za velike se $n$ vjerojatnosti po binomnoj distribuciji mogu približno računati koristeći normalnu distribuciju.*

**Primjer 3.38.** *Neka je $X \sim \mathcal{B}(500, 0.4)$. Tada znamo da je*

$$P\{X \leq 175\} = \sum_{i=0}^{175} \binom{500}{i} 0.4^i 0.6^{500-i}.$$

*Budući da je izračunavanje te sume komplicirano, a $n$ velik, za izračun vjerojatnosti $P\{X \leq 175\}$ možemo koristiti aproksimaciju binomne distribucije normalnom distribucijom. Uočimo da je $np = 200$ i $\sqrt{np(1-p)} = 10.95$, pa slijedi da je*

$$P\{X \leq 175\} = P\left\{\frac{X-200}{10.95} \leq \frac{175-200}{10.95}\right\} = P\left\{\frac{X-200}{10.95} \leq -2.28\right\} \approx P\{Z \leq -2.28\},$$

*gdje je $Z$ standardna normalna slučajna varijabla. Prethodnu vjerojatnost možemo izračunati korištenjem prikladnog matematičkog softvera:*

$$P\{X \leq 175\} \approx 0.0113.$$

*Analognim postupkom možemo aproksimirati i mnoge druge vjerojatnosti - tako je, npr. $P\{175 < X \leq 225\} \approx 0.98$.*

### Primjena na aritmetičku sredinu

Neka je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ n. j. d. niz slučajnih varijabli s očekivanjm $\mu$ i varijancom $\sigma^2$ i

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

S obzirom da je

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}S_n, \quad E\overline{X}_n = \mu, \quad \operatorname{Var}\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n},$$

očito je

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}.$$

Dakle, prema centralnom graničnom teoremu 3.5.2 slijedi da

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

pa kažemo da se $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$ asimptotski ponaša kao slučajna varijabla s distribucijom $\mathcal{N}(0,1)$, odnosno da $\overline{X}_n$ asimptotski ima $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ distribuciju.

**Primjer 3.39.** *Neka je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli s parametrom $\lambda = 1$. Tada iz tablice 2.6.5 znamo da je $\mu = EX_n = 1/\lambda = 1$ i $\sigma^2 = \operatorname{Var}X_n = 1/\lambda^2 = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema teoremu 3.5.2 slijedi da za veliki $n$ slučajna varijabla*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$$

*ima približno standardnu normalnu distribuciju ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$). Sada možemo aproksimirati npr. sljedeće vjerojatnosti:*

$$P\{S_{100} \geq 110\} = P\left\{\frac{S_{100}-100}{10} \geq 1\right\} \approx P\{Z \geq 1\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \approx 0.1587,$$

$$P\{1.1 < \overline{X}_{100} < 1.2\} = P\left\{1 < 10(\overline{X}_{100}-1) < 2\right\} \approx$$
$$\approx P\{1 < Z < 2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \approx 0.136.$$

**Primjer 3.40.** *Neka je ($X_n$, $n \in \mathbb{N}$) niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem $\mu = EX_n = 20$ i varijancom $\sigma^2 = \mathrm{Var}X_n = 4$. Pretpostavimo da nas zanima kolika je vjerojatnost da se aritmetička sredina $\overline{X}_n$ slučajnih varijabli $X_1, \dots X_n$ realizira brojem iz intervala $\langle 19.9, 20.1\rangle$. Budući da distribucija slučajnih varijabli iz tog niza nije zadana, traženu vjerojatnost ne možemo točno izračunati. No taj niz zadovoljava uvjete teorema 3.5.2 pa znamo da*

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma} = \frac{\overline{X}_n-20}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{D} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

*Traženu vjerojatnost možemo aproksimirati na sljedeći način:*

$$P\{19.9 < \overline{X}_n < 20.1\} = P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{20} < \frac{\overline{X}_n-20}{\frac{2}{\sqrt{n}}} < \frac{\sqrt{n}}{20}\right\} \approx$$

$$\approx P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{20} < Z < \frac{\sqrt{n}}{20}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{n}/20}^{\sqrt{n}/20} e^{-z^2/2}\,dz.$$

## 3.6 Zadaci

**Zadatak 3.4.** Dokažite svojstva 1 do 5 funkcije distribucije dvodimenzionalnog slučajnog vektora.

**Zadatak 3.5.** Dokažite da za slučajne varijable $X_1$ i $X_2$ koje imaju konačnu varijancu i koje su nezavisne vrijedi jednakost

$$\mathrm{Var}\,(aX_1 + bX_2 - c) = a^2\mathrm{Var}\,X_1 + b^2\mathrm{Var}\,X_2,$$

gdje su $a$, $b$ i $c$ proizvoljni realni brojevi.

**Zadatak 3.6.** Neka je $(X,Y)$ slučajni vektor s kovarijancom $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Dokažite da za proizvoljne realne brojeve $a_1, a_2, b_1, b_2$ vrijedi

$$\mathrm{Cov}(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = a_1a_2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

**Zadatak 3.7.** Neka je $X$ slučajna varijabla takva da je $EX = 6$, $\operatorname{Var}(X) = 1$ i neka je $Y = -2X + 5$. Odredite $EY$, $\operatorname{Var} Y$ i $\rho_{X,Y}$.
Rješenje: $EY = -7$, $\operatorname{Var} Y = 4$, $\rho_{X,Y} = 109/2$.

**Zadatak 3.8.** Neka su $X$ i $Y$ slučajne varijable za koje je $EX = 2$, $EY = -1$, $\operatorname{Var} X = 9$, $\operatorname{Var} Y = 4$, $\rho_{X,Y} = 0.5$. Neka je $Z = 2XY + 1$. Odredite $EZ$.
Rješenje: $EZ = 2\left(\rho(X,Y)\sqrt{\operatorname{Var} X \operatorname{Var} Y} + EX\,EY\right) + 1 = 3$.

**Zadatak 3.9.** Neka su $X_1$ i $X_2$ slučajne varijable s binomnim razdiobama: $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p_1)$ i $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p_2)$. Odredite $E(X_1 X_2)$ ako znamo da je $E(X_1 + X_2)^2 = 0.5$.
Rješenje: $E(X_1 X_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(n_1 p_1 (1 + p_1(n_1 - 1)) + n_2 p_2 (1 + p_2(n_2 - 1))\right)$.

**Zadatak 3.10.** Dvodimenzionalan slučajni vektor $(X, Y)$ ima distribuciju danu tablicom

| $X/Y$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/3 | 0 | 1/15 | 0 | 1/10 |
| 2 | 2/15 | 2/15 | 0 | 1/30 | 0 |
| 3 | 1/30 | 1/30 | 1/15 | 1/15 | 0 |

a) Odredite marginalne distribucije.
Rješenje:

hspace*1cm $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/6 & 2/15 & 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 3/10 & 1/5 \end{pmatrix}$$

b) Odredite $P\{X < 2, Y \geq 2\}$ i $P\{X > -1, Y > 3\}$.
Rješenje: $P\{X < 2, Y \geq 2\} = 1/2$, $P\{X > -1, Y > 3\} = 0$.

c) Odredite $P\{|X| < 1\}$.
Rješenje: $P\{|X| < 1\} = P\{X = 0\} = 2/15$.

d) Odredite $EX$, $EY$ i $E(3X + 5Y)$.
Rješenje: $EX = -13/15$, $EY = 17/10$, $E(3X + 5Y) = 59/10$.

**Zadatak 3.11.** Neka je $\mathbb{X} = (X, Y)$ diskretan slučajni vektor s distribucijom zadanom na sljedeći način:

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} c(x+y) & ,\ (x,y) \in \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \\ 0 & ,\ \text{inače} \end{cases}.$$

Izračunajte vrijednost konstante $c$.
Rješenje: $c = 1/18$.

**Zadatak 3.12.** Za slučajni vektor iz zadatka 3.10 odredite distribuciju od $X$, uz uvjet $Y=3$, i distribuciju od $Y$, uz uvjet $X=-2$, te izračunajte uvjetna očekivanja $E(X|Y=3)$ i $E(Y|X=-2)$.
Rješenje:

$$X|_{Y=3} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad E(X|Y=3) = -\frac{1}{6};$$

$$Y|_{X=-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2/3 & 1/15 & 1/15 \end{pmatrix}, \qquad E(Y|X=-2) = \frac{21}{15}.$$

**Zadatak 3.13.** Provjerite jesu li komponente slučajnog vektora iz zadatka 3.10 nezavisne te izračunajte njihovu kovarijancu i koeficijent korelacije.
Rješenje: *slučajne varijable $X$ i $Y$ nisu nezavisne,*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = -\frac{208}{75}, \quad \rho_{X,Y} = -\frac{416}{\sqrt{26291}}.$$

**Zadatak 3.14.** Dan je dvodimenzionalan slučajni vektor $(X,Y)$ tablicom distribucije

| $X/Y$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.05 | 0.05 | 0.1 | 0 | 0.05 | 0.05 |
| 1 | 0.1 | 0.05 | 0.05 | 0.1 | 0 | 0.05 |
| 2 | 0.03 | 0.12 | 0.07 | 0.06 | 0.03 | 0.04 |

a) Odredite marginalne distribucije tog slučajnog vektora.
Rješenje:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.18 & 0.22 & 0.22 & 0.16 & 0.08 & 0.14 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.35 & 0.35 \end{pmatrix}.$$

b) Odredite $EX$, $EY$, $\mathrm{Var}\,X$ i $\mathrm{Var}\,Y$.
Rješenje: $EX = 0.16$, $EY = 1.05$, $\mathrm{Var}\,X \approx 2.65$, $\mathrm{Var}\,Y \approx 0.65$.

c) Provjerite jesu li komponente tog slučajnog vektora nezavisne.
Rješenje: slučajne varijable $X$ i $Y$ nisu nezavisne.

**Zadatak 3.15.** Slučajni pokus sastoji se od dvaju uzastopnih bacanja pravilno izrađenog novčića. Neka je $(X,Y)$ slučajni vektor gdje slučajna varijabla $X$ označava broj glava, a slučajna varijabla $Y$ broj pisama koja se realiziraju u tim dvama bacanjima. Odredite distribuciju i marginalne distribucije slučajnog vektora $(X,Y)$, uvjetnu distribuciju slučajne varijable $X$, uz uvjet $\{Y=1\}$. te izračunajte koeficijent korelacije $\rho_{X,Y}$.

Rješenje:
Tablica distribucije:

| $X/Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| 2 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 |

Marginalne distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Uvjetna distribucija: $P\{X = 1|Y = 1\} = 1$.
Koeficijent korelacije: $\rho_{X,Y} = -1$.

**Zadatak 3.16.** Neka je $(X, Y)$ slučajni vektor kod kojeg slučajna varijabla $X$ predstavlja broj izlazaka trgovačkog putnika na teren, a slučajna varijabla $Y$ broj prodanih proizvoda. Distribucija slučajnog vektora zadana je sljedećom tablicom:

| $Y/X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | 0 | 0 |
| 3 | 0 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | 0 |
| 4 | 0 | $\frac{1}{128}$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{128}$ |

a) Odredite marginalne distribucije tog slučajnog vektora.
Rješenje:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{32} & \frac{33}{128} & \frac{15}{64} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{128} \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

b) Izračunajte $EX$, $EY$ i $\rho_{X,Y}$.
Rješenje: $EX = 327/128$, $EY = 21/8$, $\rho_{X,Y} = 0.579$.

c) Odredite vjerojatnost da je trgovački putnik prodao četiri knjige, ako je dva puta izašao na teren.
Rješenje: $P\{Y = 4|X = 2\} = 1/15$.

**Zadatak 3.17.** Promotrimo slučajni pokus koji se sastoji od nezavisnog bacanja dvaju novčića tri puta zaredom (misli se da su realizacije na novčićima pri jednom bacanju međusobno nezavisne). Novčić $A$ pravilno je izrađen, odnosno $P_A(G) = P_A(P) = 0.5$, ali nočić $B$ nije i vrijedi: $P_B(G) = 0.25$, $P_B(P) = 0.75$. Neka je $(X, Y)$ slučajni vektor u kojem $X$ predstavlja broj glava realiziranih bacanjem novčića $A$, a $Y$ broj glava realiziranih bacanjem novčića $B$. Odredite distribuciju i marginalne distribucije slučajnog vektora $(X, Y)$, uvjetnu distribuciju slučajne varijable $X$, uz uvjet $\{Y = 2\}$, te izračunajte koeficijent korelacije $\rho_{X,Y}$.

Rješenje: $X \sim \mathcal{B}(3, 0.5)$, $X \sim \mathcal{B}(3, 0.25)$

| $X/Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{27}{512}$ | $\frac{27}{512}$ | $\frac{9}{512}$ | $\frac{1}{512}$ |
| 1 | $\frac{81}{512}$ | $\frac{81}{512}$ | $\frac{27}{512}$ | $\frac{3}{512}$ |
| 2 | $\frac{81}{512}$ | $\frac{81}{512}$ | $\frac{27}{512}$ | $\frac{3}{512}$ |
| 3 | $\frac{27}{512}$ | $\frac{27}{512}$ | $\frac{9}{512}$ | $\frac{1}{512}$ |

**Zadatak 3.18.** Slučajni vektor $(X, Y)$ zadan je na sljedeći način:

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = \begin{cases} k(2x_i + y_j) & , \; x_i = 1, 2; \; y_j = 1, 2 \\ \quad 0 & , \; \text{inače} \end{cases}.$$

Odredite vrijednost konstante $k$, marginalne distribucije slučajnog vektora $(X, Y)$ te provjerite jesu li slučajne varijable $X$ i $Y$ nezavisne.

**Zadatak 3.19.** Za slučajni vektor iz prethodnog zadatka odredite sljedeće uvjetne vjerojatnosti:

a) $P\{Y = y_j \,|\, X = x_i\}$, $P\{X = x_i \,|\, Y = y_j\}$,

b) $P\{Y = y_2 \,|\, X = x_2\}$, $P\{X = 2 \,|\, Y = 2\}$.

**Zadatak 3.20.** Funkcija gustoće slučajnog vektora $(X, Y)$ dana je izrazom

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/4 \ , & (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \\ 0 \ , & \text{inače.} \end{cases}$$

a) Odredite marginalne gustoće $f_X(x)$ i $f_Y(y)$.
Rješenje: $f_X(x) = \begin{cases} 1/2 \ , & x \in [-1,1] \\ 0 \ , & \text{inače,} \end{cases}$ $\quad X \overset{D}{=} Y.$

b) Jesu li komponente tog slučajnog vektora nezavisne slučajne varijable?
Rješenje: $X$ i $Y$ nezavisne su.

c) Odredite $P\{0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{2}\}$.
Rješenje: $P\{0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{2}\} = 1/16$.

**Zadatak 3.21.** Slučajni vektor $\mathbb{X} = (X, Y)$ zadan je funkcijom gustoće

$$f_{\mathbb{X}}(x,y) = \begin{cases} k \ , & \text{za } x^2 + y^2 \le 4 \text{ i } y > 0 \\ 0 \ , & \text{za ostale } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

a) Odredite vrijednost konstante $k$.
Rješenje: $k = 1/2\pi$.

b) Odredite marginalne funkcije gustoća slučajnog vektora $\mathbb{X}$.
Rješenje:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2} \ , & x \in \langle -2, 2\rangle \\ 0 \ , & \text{inače,} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{4 - y^2} \ , & y \in [0, 2\rangle \\ 0 \ , & \text{inače,} \end{cases}$$

c) Pokažite da slučajne varijable $X$ i $Y$ nisu nezavisne, ali jesu nekorelirane.

**Zadatak 3.22.** Funkcija gustoće dvodimenzionalnoga slučajnog vektora $(X, Y)$ dana je izrazom

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi ab} \ , & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \\ 0 \ , & \text{inače,} \end{cases}$$

a) Odredite marginalne gustoće $f_X(x)$ i $f_Y(y)$.

b) Jesu li komponente tog slučajnog vektora nezavisne slučajne varijable?

c) Odredite kovarijancu slučajnih varijabli $X$ i $Y$.

**Zadatak 3.23.** Slučajni vektor $(X, Y)$ zadan je funkcijom gustoće

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y \ , \ (x,y) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \\ 0 \quad , \ \text{inače.} \end{cases} .$$

Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable $Z = X + Y$.
Rješenje:

$$f_Z(z) = \begin{cases} z \ , \ z \in \langle 0,1\rangle \\ 0 \ , \ \text{inače.} \end{cases} \qquad F_Z(z) = \begin{cases} 0 \quad , \ z \in \langle -\infty, 0\rangle \\ z^2/2 \ , \ z \in [0,1\rangle \\ 1 \quad , \ z \in [1,\infty\rangle. \end{cases} .$$

**Zadatak 3.24.** Neka je $X$ slučajna varijabla kojom je modelirana koncentracija peludi u zraku u jutarnjem mjerenju, a $Y$ slučajna varijabla kojom je modelirana koncentracija peludi u zraku u večernjem mjerenju. Pretpostavimo da je zajednička funkcija gustoće slučajnih varijabli $X$ i $Y$ (tj. funkcija gustoće slučajnog vektora $\mathbb{X} = (X, Y)$) definirana na sljedeći način:

$$f_{\mathbb{X}}(x,y) = \begin{cases} 4xy \ , \ (x,y) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \\ 0 \quad , \qquad \text{inače.} \end{cases}$$

a) Odredite funkciju distribucije slučajnog vektora $\mathbb{X}$.
Rješenje:

$$F_{\mathbb{X}}(x,y) = \begin{cases} 1 \quad , \ (x,y) \in [1,\infty\rangle \times [1,\infty\rangle \\ x^2 \quad , \ (x,y) \in \langle 0,1\rangle \times [1,\infty\rangle \\ y^2 \quad , \ (x,y) \in [1,\infty\rangle \times \langle 0,1\rangle \\ x^2y^2 \ , \ (x,y) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \\ 0 \quad , \qquad \text{inače.} \end{cases}$$

b) Odredite marginalne funkcije gustoća slučajnog vektora $\mathbb{X}$.
Rješenje: $X \stackrel{D}{=} Y$, $f_X(x) = \begin{cases} 2x \ , \ x \in \langle 0,1\rangle \\ 0 \ , \ \text{inače.} \end{cases}$

c) Odredite vjerojatnost da je prosječna koncentracija peludi u zraku (temeljena samo na jutarnjem i večernjem mjerenju) manja od 0.5.
Rješenje: $P\{(X+Y)/2 < 0.5\} = 1/6$.

**Zadatak 3.25.** Posjed na potpuno ravnom terenu ima oblik pravokutnog trokuta s južnom granicom duljine dva kilometra i istočnom granicom duljine jedan kilometar. Koordinate točke na koju pada sjemenka javora nošena vjetrom modelirane su slučajnim vektorom $\mathbb{X} = (X, Y)$. Poznato je da ako sjemenka padne unutar posjeda, slučajni vektor $\mathbb{X}$ ima uniformnu distribuciju nad posjedom.

a) Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora $\mathbb{X}$ te njegove marginalne funkcije gustoća. Jesu li slučajne varijable $X$ i $Y$ nezavisne ili ne? Obrazložite svoj odgovor.
Rješenje:

$$f_{\mathbb{X}}(x,y) = \begin{cases} 1 \ , \ (x,y) \in \{(x,y) \in \langle 0,2\rangle \times \langle 0,1\rangle : y < 0.5x\} \\ 0 \ , \qquad \text{inače.} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} x/2 \ , \ x \in \langle 0,2\rangle \\ 0 \quad , \ \text{inače,} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) \ , \ x \in \langle 0,1\rangle \\ 0 \quad , \ \text{inače.} \end{cases}$$

Slučajne varijable $X$ i $Y$ nisu nezavisne.

b) Odredite uvjetne funkcije gustoća $f_{X|Y=y}(x)$ i $f_{Y|X=x}(y)$ slučajnog vektora $(X, Y)$.
Rješenje:

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} 1/2(1-y) \ , \ x \in \langle 2y, 2\rangle \\ 0 \quad , \quad \text{inače}, \end{cases} \qquad f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} 2/x \ , \ y \in \langle 0, x/2\rangle \\ 0 \quad , \quad \text{inače}. \end{cases}$$

c) Odredite vjerojatnost $P\{0.1 < Y \leq 0.7|X = 0.5\}$.
Rješenje: $P\{0.1 < Y \leq 0.7|X = 0.5\} = 0.6$.

**Zadatak 3.26.** Neprekidan slučajni vektor $\mathbb{X} = (X, Y)$ zadan je funkcijom gustoće

$$f_{\mathbb{X}}(x, y) = \begin{cases} -\cos x \sin y \ , \ (x, y) \in [0, \pi/2] \times [-\pi/2, 0] \\ 0 \quad , \ \text{inače}. \end{cases}$$

a) Odredite funkciju distribucije slučajnog vektora $\mathbb{X}$.
Rješenje:

$$F_{\mathbb{X}}(x, y) = \begin{cases} 1 \ , \ (x, y) \in \langle \pi/2, \infty\rangle \times \langle 0, \infty\rangle \\ \sin(x)\cos(y) \ , \ (x, y) \in [0, \pi/2] \times [-\pi/2, 0] \\ \cos(y) \ , \ (x, y) \in \langle \pi/2, \infty\rangle \times [-\pi/2, 0] \\ \sin(x) \ , \ (x, y) \in [0, \pi/2] \times \langle 0, \infty\rangle \\ 0 \ , \ \text{inače}. \end{cases}$$

b) Odredite marginalne funkcije distribucija slučajnog vektora $\mathbb{X}$.
Rješenje:

$$f_X(x) = \begin{cases} \cos(x) \ , \ x \in [0, \pi/2] \\ 0 \quad , \quad \text{inače}, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} -\sin(y) \ , \ x \in [-\pi/2, 0] \\ 0 \quad , \quad \text{inače}. \end{cases}$$

c) Ispitajte nezavisnost slučajnih varijabli $X$ i $Y$ te odredite korelacijsku matricu slučajnog vektora $\mathbb{X}$.
Rješenje: $X$ i $Y$ nezavisne su slučajne varijable; korelacijska matrica jest jedinična matrica drugog reda.

d) Odredite uvjetne funkcije gustoća i uvjetne funkcije distribucija slučajnog vektora $\mathbb{X}$.
Rješenje: $f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$, $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$.

**Zadatak 3.27.** Funkcija distribucije slučajnog vektora $\mathbb{X} = (X, Y)$ jest

$$F_{\mathbb{X}}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)} \ , \ (x, y) \in \langle 0, \infty\rangle \times \langle 0, \infty\rangle \\ 0 \quad , \ \text{za ostale } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

a) Odredite marginalne funkcije distribucija toga slučajnog vektora te provjerite jesu li njegove komponente nezavisne slučajne varijable.
Rješenje: $X, Y \sim \mathcal{E}(1)$.

b) Odredite funkciju gustoće i marginalne funkcije gustoća slučajnog vektora $\mathbb{X}$.
Rješenje: $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} \ , \ (x, y) \in \langle 0, \infty\rangle \times \langle 0, \infty\rangle \\ 0 \quad , \ \text{inače}. \end{cases}$

c) Odredite uvjetne funkcije gustoća $f_{X|Y=y}(x)$ i $f_{Y|X=x}(y)$.
Rješenje: zbog nezavisnosti je slučajnih varijabli $X$ i $Y$ $f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$, $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$.

d) izračunajte $P\{0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1\}$.
Rješenje: $P\{0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1\} = 1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2}$.

**Zadatak 3.28.** Zadana je funkcija gustoće dvodimenzionalnog slučajnog vektora $(X, Y)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & , (x,y) \in \langle 0,\infty\rangle \times \langle 0,\infty\rangle \\ 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

a) Jesu li komponente toga slučajnog vektora nezavisne slučajne varijable?
Rješenje: $X$ i $Y$ nezavisne su eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 1$.

b) Odredite distribuciju slučajnog vektora $(X, 2Y)$.
Rješenje: $Y$ je eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda = 1/2$, pa zbog nezavisnosti $X$ i $2Y$ slijedi da je

$$f_{(X,2Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{-(x+\frac{1}{2}\, y)} & , (x,y) \in \langle 0,\infty\rangle \times \langle 0,\infty\rangle \\ 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

**Zadatak 3.29.** Neka je $\mathbb{X} = (X, Y)$ neprekidan slučajni vektor zadan funkcijom gustoće

$$f_{\mathbb{X}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}(6 - x - y) & , (x,y) \in \langle 0,2\rangle \times \langle 2,4\rangle \\ 0 & , \text{za ostale } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

a) Ispitajte nezavisnost komponenti $X$ i $Y$ toga slučajnog vektora.

b) Odredite uvjetne funkcije gustoća $f_{X|Y=y}(x)$ i $f_{Y|X=x}(y)$.

c) Odredite matricu kovarijanci i korelacijsku matricu toga slučajnog vektora.

**Zadatak 3.30.** Provjerite vrijedi li slabi zakon velikih brojeva za sljedeće nizove nezavisnih slučajnih varijabli $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$:

a) $X_n = \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ \dfrac{1}{n} & 1 - \dfrac{2}{n} & \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$

b) $X_n = \begin{pmatrix} -3^{-n} & 3^{-n} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Rješenje: slabi zakon velikih brojeva vrijedi za oba niza slučajnih varijabli.

**Zadatak 3.31.** Neka su $X_1, \ldots, X_{100}$ nezavisne eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\lambda = 1$ te neka je

$$Y = X_1 + \ldots + X_{100} = \sum_{k=1}^{100} X_k.$$

Korištenjem centralnoga graničnog teorema aproksimirajte sljedeće vjerojatnosti:

a) $P\{Y \geq 110\}$,

b) $P\{1.1 < \overline{X}_{100} < 1.2\}$, gdje je $\overline{X}_{100} = \frac{1}{100}\, Y$.

Rješenje:

a) $P\{Y \geq 110\} \approx 0.1587$,

b) $P\{1.1 < \overline{X}_{100} < 1.2\} \approx 0.136$.

**Zadatak 3.32.** Zadane su nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ s matematičkim očekivanjem $\mu$ i varijancom $\sigma^2$. Izračunajte

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2\right).$$