Vjerojatnost

Dijelovi predavanja

Danijel Grahovac

Posljednja promjena: 17. siječnja 2023.

Sadržaj

I Uvod

I.1. O vjerojatnosti

Povijesno gledano, vjerojatnost ima svoje začetke u proučavanju igara na sreću. Matematički temelji teorije vjerojatnosti nastali su tek u tridesetim godinama dvadesetog stoljeća u monografiji A. N. Kolmogorova [7] kada je aksiomatski definiran pojam vjerojatnosti. Postavljanje vjerojatnosti u okvire teorije mjere omogućilo je snažni razvoj tijekom dvadesetog stoljeća.

I danas je česta zabluda da se u okviru vjerojatnosti bavimo samo igrama na sreću, bacanjem kockica, izvlačenjem karata i sl. Vjerojatnost i vjerojatnosni modeli prožimaju sve znanosti, a primjene postaju sve više rasprostranjene. Vjerojatnost je temelj za statistiku koja je ključna za razumijevanje gotovo svih empirijskih istraživanja. Koristiti statistiku bez razumijevanja vjerojatnosti moguće je tek na površnoj razini i ograničeno je na prikaze podataka bez izvođenja statističkih zaključaka.

I.1.1 Primjene vjerojatnosti

Primjene vjerojatnosti su brojne i obuhvaćaju mnoge aspekte. U nastavku ćemo navesti neke od njih. Jasno je da se i svaka primjena statistike može smatrati primjenom vjerojatnosti.

I.1.1.1 Financijska tržišta

U okviru matematičkih financija razvijaju se vjerojatnosni modeli financijskih tržišta. Pri tome ne treba misliti da vjerojatnost može dati odgovor na pitanje kolika će biti cijena neke dionice sutra, već je ključna korist vjerojatnosti upravljanje rizikom. Primjerice, ako novčić ima veću vjerojatnost pisma, pametno je kladiti se na pismo ako će to udvostručiti ulog. Iako nikad ne možemo znati hoće li pasti pismo ili glava, znamo da je dugoročno isplativo kladiti se na pismo. Sličan princip primjenjuje se i na druge vjerojatnosne modele pa tako i u financijama. Ne možemo znati kakva će cijena dionice biti sutra, ali modelom možemo računati vjerojatnost da njena cijena bude u nekom intervalu. Na taj način možemo procijeniti izloženost riziku.

Dionice su samo jedan element financijskog tržišta, a osim njih u velikom opsegu se trguje različitim izvedenicama na financijske intrumente. Primjerice, zamislimo ugovor kojim imamo pravo kupiti neku dionicu za godinu dana po nekoj određenoj cijeni. Koliko bi platili za takav ugovor? Procjene se mogu napraviti na osnovu vjerojatnosnih modela. Takav ugovor je primjer jedne izvedenice, a izvedenicama se može opet trgovati i njihova cijena se mijenja u vremenu. Tržište izvedenica je i više od 10 puta veće od tržišta dionica i procjenjuje se na više od 500 bilijuna dolara[1]. Loše upravljanje rizikom jedan je od osnovnih razloga gospodarske krize 2008. godine.

I.1.1.2 Osiguranje

Aktuarska matematika bavi se upravljanjem rizikom u osiguranju. Kako su događaji vezani uz osiguranja nepredvidivi (vrijeme nastanka štete, vrijeme smrti, iznos štete i sl.), ključnu ulogu imaju stohastički modeli. Primjerice, prilikom životnog osiguranja osobe, osiguravajuće društvo mora procijeniti rizik smrti osobe i na osnovu toga odrediti premiju. Posebnu ulogu u aktuarstvu ima kolektivna teorija rizika pomoću koje društvo upravlja svojim portfeljom polica na način da uvijek mora osigurati dovoljno sredstava u rezervi kako bi moglo pokriti sve nastale štete.

I.1.1.3 Bankarstvo

Najvažniji rizik u bankarskom poslovanju je kreditni rizik. Pojednostavljeno, banka mora odlučiti kome će dodijeliti kredit i pod kojim uvjetima. Ako bude previše stroga, neće imati dobre prihode od kamata. Ako bude previše popustljiva, izlaže se riziku da klijent neće moći vratiti kredit što je značajan gubitak. Banke stoga procjenjuju vjerojatnost da će klijent uredno vraćati kredit. Osim koristi koje imaju od toga, banke su na to i primorane zbog tzv. Baselske regulative.

I.1.1.4 Epidemiologija

U modeliranju širenja zaraznih bolesti često se koriste deterministički modeli opisani sustavom diferencijalnih jednadžbi (npr. SIR, SEIR). Deterministički modeli za iste ulazne parametre daju uvijek iste izlazne vrijednosti. To naravno puno manje odgovara stvarnosti od modela koji u sebi imaju stohastičke komponente. Iako mogu biti složeniji, takvi modeli omogućavaju bolje upravljanje rizikom.

Osim prethodno navedenih, postoje još brojne primjene vjerojatnosti u biologiji, genetici, teoriji pouzdanosti, računarstvu, kemiji i dr.

I.1.2 Slučajnost

Rasprava o tome što je slučajnost nadilazi okvire matematike i prelazi u filozofiju. Ipak, moglo bi se reći da postoje dva osnovna tipa slučajnosti: prividna slučajnost i fundamentalna slučajnost.

Prividna slučajnost povezana je s nedostatkom potpunih informacija o nekom fenomenu. Primjerice, promotrimo zrnce peludi u čaši vode (Brownov eksperiment). Na kretanje zrnca peludi utječu milijarde molekula vode koje se gibaju u čaši. Napraviti model koje bi u obzir uzeo gibanje svake pojedine molekule je praktično nemoguće. S druge strane gibanje zrnca peludi može se jako dobro opisati slučajnim procesom – Brownovim gibanjem. Takve stohastičke aproksimacije dio su statističke mehanike. Drugi tipičan primjer prividne slučajnosti su kaotični sustavi. Iako se radi o po prirodi determinističkim modelima, u kaotičnim sustavima male promjene početnih uvjeta mogu dovesti to potpuno različitih ishoda. Neizbježna nepreciznost u poznavanju početnih uvjeta dovodi do nemogućnosti predviđanja. Jedan takav primjer je i prognoza vremena (*butterfly effect*). Za drugi primjer možemo se pitati je li ishod bacanja novčića uistinu slučajan. Naime, ako bi poznavali točan položaj novčića,

[1] `https://www.bis.org/statistics/about_derivatives_stats.htm`

silu koju ćemo primijeniti, visinu i sve ostale bitne parametre, postavlja se pitanje bismo li mogli predvidjeti sa sigurnošću kako će novčić pasti. To je u nekoj mjeri i moguće, međutim, osjetljivost na poznavanje početnih uvjeta je vrlo velika. Samo mala nepreciznost u poznavanju, primjerice, smjera sile, dovoljna je da predviđanje bude potpuno pogrešno. To je karakteristika kaotičnog sustava.

Pogrešno bi bilo misliti da vjerojatnost koristimo samo zato što bi drugi modeli bili previše komplicirani da budu praktični. Naime, slučajnost je i fundamentalno svojstvo široko prihvaćenih fizikalnih teorija. U okviru kvantne mehanike, stanja fizikalnog sustava opisana su vektorima kompleksnog separabilnog Hilbertovog prostora dok fizikalne veličine odgovaraju određenim linearnim hermitskim operatorima na tom prostoru. Primjerice, ako imamo jednu česticu na realnoj osi, odgovarajući Hilbertov prostor je $L^2(\mathbb{R})$. Prema kopenhaškoj interpretaciji kvantne mehanike, ako je sustav u stanju $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, tada $|\psi(x)|^2$ predstavlja vjerojatnosnu gustoću položaja čestice. Ako operator A predstavlja neku fizikalnu veličinu, onda je $\langle \psi, A^m \psi \rangle$ m-ti moment te veličine. Osim toga, za položaj X i impuls P vrijedi Heisenbergova relacija neodređenosti

$$\Big\langle \psi, (X - \langle \psi, X\psi \rangle)^2 \, \psi \Big\rangle \Big\langle \psi, (P - \langle \psi, P\psi \rangle)^2 \, \psi \Big\rangle \geq \frac{\hbar}{4},$$

gdje je $\hbar$ Planckova konstanta. Prethodno možemo intepretirati kao varijance položaja i impulsa. Posljedica toga je da ne možemo proizvoljno precizno znati obje veličine istodobno. To nije pogreška mjerenja, već intrinzično svojstvo kvante mehanike. Drugi primjer slučajnosti je radioaktivni raspad na razini atoma. Za konkretan atom prema kvantnoj mehanici nemoguće je znati kad će se raspasti što je popularno opisano misaonim eksperimentom sa Schrödingerovom mačkom. Međutim, znamo da je za raspad polovice uzorka atoma potrebno vrijeme poluraspada. Napomenut ćemo da prethodno navedena fundamentalnost slučajnosti ovisi o interpretaciji kvantne mehanike. Kopenhaška interpretacija je danas najšire prihvaćena iako je prošla kroz brojne kritike (poznata je Einsteinova rečenica „God does not play dice with the universe."). Stoga, uz svo najbolje znanje koje danas imamo, nije pogrešno vjerovati da je slučajnost fundamentalna karakteristika svijeta koji nas okružuje.

II

Osnove teorije mjere

II.1. Prostor mjere

Za početak, vrijedi citirati L. Breimana [1]: „Probability theory has a right and a left hand. On the right is the rigorous foundational work using the tools of measure theory. The left hand *thinks probabilistically*, reduces problems to gambling situations, coin-tossing, motions of a physical particle.”. Krenut ćemo s prvim, uvodom u teoriju mjere koja će nam pružiti temelj i alate za puno toga što slijedi kasnije.

U okviru teorije mjere, mjera na nekom skupu (prostoru) pridružuje pogodnim podskupovima tog skupa broj koji možemo interpretirati kao veličinu u nekom smislu. Tako su duljina, površina i obujam redom mjere na $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$. Vjerojatnosnim modelima modeliramo pojave koje imaju karakter slučajnosti i želimo *mjeriti* vjerojatnost događaja vezanih uz te pojave.

Priča o vjerojatnosti započinje s **vjerojatnosnim prostorom** $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ gdje je

- Ω neprazan skup,
- $\mathscr{F}$ σ-algebra na Ω,
- P vjerojatnost.

Ova struktura preuzeta je iz teorije mjere i u nastavku ćemo precizno definirati ove pojmove i objasniti ih u kontekstu teorije mjere.

II.1.1 σ-algebra

Definicija II.1.1 Familiju $\mathscr{F}$ podskupova nekog skupa Ω nazivamo **σ-algebra** na skupu Ω ako vrijedi

(i) $\Omega \in \mathscr{F}$,

(ii) ako je $A \in \mathscr{F}$, onda je i $A^c \in \mathscr{F}$,

(iii) ako su $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je i $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$.

Riječima, σ-algebra[1] je familija podskupova nekog skupa koja sadrži taj skup, zatvorena je na komplementiranje i prebrojive unije. Iz (i) i (ii) odmah slijedi da mora biti i $\emptyset \in \mathscr{F}$. Posebno, σ-algebra je zatvorena i na konačne unije (za A_i u (iii) možemo uzeti $\emptyset$). Nadalje, σ-algebra je zatvorena i na prebrojive presjeke jer je $(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$.

[1] σ se odnosi na zatvorenost na *prebrojive* unije.

Uređeni par $(\Omega, \mathscr{F})$ nazivamo **izmjeriv prostor**.

■ **Primjer II.1.1** Neka je Ω bilo koji skup.

(a) $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ je najmanja σ-algebra na Ω.

(b) Partitivni skup od Ω, u oznaci $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, je najveća σ-algebra na Ω.

Zadatak II.1.1 Pokažite da je

(a) $\mathscr{F} = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2,3\}\}$ σ-algebra na $\Omega = \{1,2,3\}$.

(b) $\mathscr{F} = \{\emptyset, [0,1], [0,1/2], (1/2,1]\}$ σ-algebra na $\Omega = [0,1]$.

■

Iz definicije lako slijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija II.1.1 Neka je $\{\mathscr{F}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ bilo koja familija σ-algebri na Ω. Tada je $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{F}_\lambda$ σ-algebra na Ω.

Kao posljedica toga, za bilo koju familiju $\mathscr{A}$ podskupova od Ω familija

$$\sigma(\mathscr{A}) = \bigcap \{\mathscr{G} : \mathscr{A} \subseteq \mathscr{G} \text{ i } \mathscr{G} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\}$$

je σ-algebra. To je najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathscr{A}$ i nazivamo je **σ-algebra generirana s $\mathscr{A}$**.

Zadatak II.1.2 Ako je $\Omega = [0,1]$, odredite σ-algebre generirane familijama

(a) $\{(0,1/2)\}$,

(b) $\{[0,1/4), (3/4,1]\}$.

■

Skup na kojem razmatratmo σ-algebru često posjeduje i neku dodatnu strukturu. Osim toga, vjerojatnost, odnosno mjeru, definirat ćemo na σ-algebri. Iz tog razloga moramo se pobrinuti da σ-algebra sadrži neke uobičajene skupove. Primjerice, ako želimo nešto *mjeriti* na $\mathbb{R}$, onda će to svakako biti i intervali oblika (a,b). Neka je

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a,b) : a,b,\in \mathbb{R}\})$$

najmanja σ-algebra koja sadrži sve otvorene intervale. Možemo se pitati hoćemo li dobiti istu σ-algebru ako zahtijevamo da su sadržani svi intervali oblika, primjerice, $(a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$. Odgovor je da, zapravo, vrijedi sljedeće.

Propozicija II.1.2 Sljedeće familije generiraju istu σ-algebru

(i) $\mathscr{G}_1 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$,

(ii) $\mathscr{G}_2 = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$,

(iii) $\mathscr{G}_3 = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$,

(iv) $\mathscr{G}_4 = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$,

(v) $\mathscr{G}_5 = \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\}$,

(vi) $\mathscr{G}_6 = \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\}$,

(vii) $\mathscr{G}_7 = \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$,

(viii) $\mathscr{G}_8 = \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$,

(ix) $\mathscr{G}_9 = \{F : F \subseteq \mathbb{R} \text{ zatvoren }\}$,

(x) $\mathscr{G}_{10} = \{U : U \subseteq \mathbb{R} \text{ otvoren }\}$.

Dokaz. Svaki otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}$ može se prikazati kao prebrojiva unija disjunktnih intervala oblika (a,b) (vidi [2, Prop. C.4]). Zbog toga je $\mathscr{G}_{10} \subseteq \sigma(\mathscr{G}_1)$, a onda i $\sigma(\mathscr{G}_{10}) \subseteq \sigma(\mathscr{G}_1)$.

Preostaje pokazati niz inkluzija $\sigma(\mathscr{G}_1) \subseteq \cdots \subseteq \sigma(\mathscr{G}_{10})$. Kako je $(a,b) = \cup_{n=n_0}^{\infty}(a, b-\frac{1}{n}]$ za n_0 dovoljno velik, slijedi da je $\mathscr{G}_1 \subseteq \sigma(\mathscr{G}_2)$ pa je i $\sigma(\mathscr{G}_1) \subseteq \sigma(\mathscr{G}_2)$. Slično se pokažu i ostale inkluzije (vidi Problem II.1). Primjerice, kako je komplement otvorenog skupa zatvoren i σ-algebra je zatvorena na komplementiranje, slijedi da je $\mathscr{G}_9 \subseteq \sigma(\mathscr{G}_{10})$ pa i $\sigma(\mathscr{G}_9) \subseteq \sigma(\mathscr{G}_{10})$. ■

σ-algebru $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ generiranu familijama iz Propozicije II.1.2 nazivamo **Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$**. Uočimo da Borelova σ-algebra sadrži sve otvorene skupove i sve zatvorene skupove iz $\mathbb{R}$. Posebno, sadrži jednočlane skupove i sve oblike intervala na $\mathbb{R}$. Zapravo, teško je i zamisliti skup koji ne bi bio u Borelovoj σ-algebri na $\mathbb{R}$.

Općenito, Borelovu σ-algebru možemo definirati na bilo kojem topološkom prostoru $(X, \mathscr{U})$ kao $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathscr{U})$. Sjetimo se da je topologija $\mathscr{U}$ familija svih otvorenih skupova na X, odnosno bilo koja familija podskupova od X koja sadrži $\emptyset$ i X, zatvorena je na proizvoljne unije i konačne presjeke. Tako primjerice dobijemo Borelovu σ-algebru $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ na $\mathbb{R}^d$.

Lako se može pokazati da za Borelovu σ-algebru $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ vrijedi tvrdnja analogna Propoziciji II.1.2. Pri tome umjesto intervala realnih brojeva imamo **d-intervale** različitih oblika. Primjerice, za $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ i $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_d)$, jedan oblik d-intervala je skup

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] = \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_i < x_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, d\right\}.$$

Slično se definiraju i drugi oblici d-intervala.

II.1.2 Mjera

Definicija II.1.2 Neka je $(\Omega, \mathscr{F})$ izmjeriv prostor. **Mjera** na $\mathscr{F}$ je svaka funkcija $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ za koju vrijedi

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) za svaki niz $(A_n, n \in \mathbb{N})$ disjunktnih skupova iz $\mathscr{F}$ vrijedi

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Svojstvo (i) još se naziva i **nenegativnost** mjere, a svojstvo (ii) **σ-aditivnost**. Riječima, mjera je σ-aditivna nenegativna funkcija na σ-algebri.

Kažemo da je mjera **konačna** ako je $\mu(\Omega) < \infty$. Mjera je **σ-konačna** ako postoji niz $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathscr{F}$ takav da je $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ i $\mu(A_n) < \infty$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Trojku $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ nazivamo **prostor mjere**. Često kažemo i da se radi o mjeri na $(\Omega, \mathscr{F})$ ili, ako je jasno o kojoj σ-algebri se radi, o mjeri na Ω.

■ **Primjer II.1.2** Neka je $(\Omega, \mathscr{F})$ izmjeriv prostor.

(a) Ako μ definiramo s $\mu(A) = n$ za konačan skup $A \in \mathscr{F}$ s n elemenata i $\mu(A) = \infty$ za beskonačan skup $A \in \mathscr{F}$, dobit ćemo mjeru koja se naziva **mjera prebrojavanja**.

(b) Funkcija $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ definirana za $A \in \mathscr{F}$ s

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \infty, & A \neq \emptyset, \end{cases}$$

je mjera na $\mathscr{F}$.

(c) Funkcija $\mu : \mathscr{F} \to [0,\infty]$ definirana za $A \in \mathscr{F}$ s

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \neq \emptyset, \end{cases}$$

nije mjera na $\mathscr{F}$.

(d) Za $x \in \Omega$, neka je $\delta_x : \mathscr{F} \to [0,\infty]$ definirana s

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

δ_x je mjera na $\mathscr{F}$ koju nazivamo Diracova mjera koncentrirana u točki x ili **Diracova delta mjera**.

Propozicija II.1.3 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor mjere. Tada vrijedi

(i) **monotonost**: za $A, B \in \mathscr{F}$, $A \subseteq B$ vrijedi $\mu(A) \leq \mu(B)$, a ako je dodatno $\mu(A) < \infty$, onda $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(ii) **σ-subaditivnost**: za proizvoljne $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

(iii) **neprekidnost na rastući niz**: za $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$ takve da je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ vrijedi

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

(iv) **neprekidnost na padajući niz**: za $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$ takve da je $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ vrijedi

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

Za rastuće nizove skupova kao u (iii) kraće pišemo $A_n \uparrow A$, za $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, dok za padajuće nizove kao u (iv) pišemo $A_n \downarrow A$, za $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Dokaz. (i) Kako je $B = A \cup (B \setminus A)$, a A i $B \setminus A$ su disjunktni, slijedi $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

(ii) Definiramo familiju disjunktnih skupova $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i$ za koje vrijedi $B_n \subseteq A_n$ i $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Sada imamo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(iii) Za istu familiju $(B_n, n \in \mathbb{N})$ kao u (ii) sada dodatno vrijedi i $\cup_{i=1}^{n} B_i = A_n$ pa imamo

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(iv) Familija $B_n = A_1 \setminus A_n$, $n \in \mathbb{N}$, je rastuća i $B_n \uparrow A_1 \setminus \cap_{i=1}^{\infty} A_i$ pa zbog (iii)

$$\lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

■

Zadatak II.1.3 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor mjere i $B \in \mathscr{F}$. Ako je

$$\mu_{|B}(A) = \mu(A \cap B), \quad A \in \mathscr{F}_B = \{A \cap B : A \in \mathscr{F}\},$$

pokažite da je $(B, \mathscr{F}_B, \mu_{|B})$ prostor mjere. Kažemo da je mjera $\mu_{|B}$ **restrikcija mjere** μ na skup B. ■

Zadatak II.1.4 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor mjere takav da je $\{\omega\} \in \mathscr{F}$ za sve $\omega \in \Omega$. Kažemo da μ ima **atom** u ω ako je $\mu(\{\omega\}) > 0$. Ima li Diracova delta mjera atome? Navedite primjer mjere s dva atoma. ■

Za prostor mjere $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ skupove $A \in \mathscr{F}$ nazivamo **izmjerivim skupovima**. Tehnički se može pokazati korisnim zahtijevati da svi skupovi koji su u smislu mjere zanemarivi, budu i izmjerivi. Preciznije, kažemo da je skup $N \subseteq \Omega$ **zanemariv** (ili **nul skup**) ako postoji $A \in \mathscr{F}$ takav da je $N \subseteq A$ i $\mu(A) = 0$, odnosno, zanemarivi skupovi su podskupovi izmjerivih skupova mjere nula. Ako za svaki zanemariv skup N vrijedi $N \in \mathscr{F}$, onda kažemo da je prostor mjere **potpun** i μ **potpuna mjera**. Pozitivna je stvar da se svaki prostor mjere može upotpuniti do potpunog prostora mjere $(\Omega, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mu})$ tako da je $\mathscr{F} \subseteq \widetilde{\mathscr{F}}$ i $\widetilde{\mu}(A) = \mu(A)$ za sve $A \in \mathscr{F}$ (vidi [6]).

II.1.3 Mjere na $\mathbb{R}$

Za uobičajene prostore kao što su $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^d$ korisno je imati opću proceduru konstrukcije mjera na tim prostorima. Pokazuje se da se mjere na $\mathbb{R}$ i na $\mathbb{R}^d$ koje zadovoljavaju blage uvjete mogu jednostavno karakterizirati analitičkim objektima.

Za konačnu mjeru $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ definiramo funkciju $F : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ s

$$F(x) = \mu((-\infty, x]).$$

Uočimo da je onda

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a).$$

F se ponekad naziva funkcija distribucije, ali nećemo koristiti taj naziv kako ga ne bi miješali s vjerojatnosnim funkcijama distribucije.

Zadatak II.1.5 Pokažite da je F neopadajuća i neprekidna zdesna, $\lim_{y\downarrow x} F(y) = F(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. ■

Napomena II.1.4 U prethodnom smo pretpostavili da je μ konačna. Dovoljno je pretpostaviti da je μ konačna na ograničenim intervalima da bi funkcija

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} \mu((0,x]), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\mu((x,0]), & x < 0, \end{cases} \tag{II.1.1}$$

bila dobro definirana, neopadajuća i zdesna neprekidna. Ako je μ konačna, F i $\widetilde{F}$ se razlikuju za konstantu $\mu((-\infty,0])$.

Dakle, iz svake mjere možemo definirati neopadajuću zdesna neprekidnu funkciju, ali ključno je da vrijedi i obrat.

Teorem II.1.5 Ako je $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija, onda postoji jedinstvena mjera μ_F na $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ takva da je

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a),$$

za sve $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Ako je G druga takva funkcija, tada je $\mu_F=\mu_G$ ako i samo ako je $F-G$ konstanta.

Obratno, ako je μ mjera na $\mathbb{R}$ koja je konačna na ograničenim intervalima, onda $\mu=\mu_{\widetilde{F}}$ za $\widetilde{F}$ definiranu s (II.1.1).

Dokaz prethodnog teorema može se vidjeti u, primjerice, [5]. Konstrukcija mjere μ_F oslanja se na neke važne rezultate teorije mjere: konstrukciju vanjske mjere i Carathéodoryjev teorem o proširenju. Neki dijelovi dokaza ilustrirani su kroz Probleme II.9 i II.10.

Mjera μ_F iz Teorema II.1.5 naziva se **Lebesgue-Stieltjesova mjera**. Prema Teoremu II.1.5, za funkciju $F(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$, na $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ postoji jedinstvena mjera λ takva da je

$$\lambda((a,b]) = b-a.$$

Mjera λ naziva se **Lebesgueova mjera** na $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Može se pokazati da prostor mjere $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ nije potpun. Njegovim upotpunjenjem dolazimo do σ-algebre Lebesgue izmjerivih skupova koja je pravi nadskup Borelove σ-algebre.

Slično se definira i Lebesgueova mjera na $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ koja svakom d-intervalu $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ pridružuje njegov volumen.

Zadatak II.1.6 Izračunajte Lebesgueovu mjeru sljedećih skupova: $\{2,3\}$, $[4,5]$, $(1,2]\cap\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$, $(10,\infty)$, $\cup_{n=1}^{\infty}[2^n,2^n+10^{-n}]$, $[0,1]^2$, $[0,1]\times[0,2]\times[1,2]$. ■

Jedno od pitanja koje se može postaviti jest zašto ne bismo mjere uvijek definirali na cijelom partitivnom skupu $\mathscr{P}(\Omega)$, posebno Lebesgueovu mjeru. Razlog je taj što $\mathbb{R}^d$ sadrži skupove koji su mogu vrlo neobično posložiti tako da ruše razumnu geometrijsku intuiciju mjere. Jedan takav primjer je i Banach-Tarski paradoks prema kojem se svaka dva ograničena otvorena skupa U i V iz $\mathbb{R}^d$, $d\geq 3$, mogu rastaviti na konačan broj disjunktnih dijelova koji se jedni iz drugih mogu dobiti translacijama i rotacijama. Ako bi svi ti dijelovi bili izmjerivi, to bi vodilo paradoksalnom svojstvu mjere, što se često iskazuje kao *zrno graška se može rastaviti i ponovno sastaviti u Sunce*.

II.2. Izmjerive funkcije

Izmjerivi prostori postaju zanimljiviji kada na njima definiramo funkcije. U okviru strukture izmjerivih prostora središnji koncept su izmjerive funkcije slično kao što su u topološkim prostorima središnji koncept neprekidne funkcije.

II.2.1 Izmjerive funkcije

Prije definicije, napomenimo da ćemo za funkciju $f : S_1 \to S_2$ označavati **prasliku** (ili **original**) skupa B s

$$f^{-1}(B) = \{x \in S_1 : f(x) \in B\}.$$

Kada želimo naglasiti σ-algebre na domeni i kodomeni, pisat ćemo i $f : (S_1, \mathscr{F}_1) \to (S_2, \mathscr{F}_2)$.

Definicija II.2.1 Neka su $(S_1, \mathscr{F}_1)$ i $(S_2, \mathscr{F}_2)$ izmjerivi prostori. Kažemo da je funkcija $f : S_1 \to S_2$ **izmjeriva** ili **$(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$-izmjeriva** ako za svaki $B \in \mathscr{F}_2$ vrijedi $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}_1$.

Obično je iz konteksta jasno o kojim σ-algebrama se radi u domeni i kodomeni funkcije pa onda kraće kažemo samo da je funkcija izmjeriva. Ako promatramo funkcije koje imaju vrijednosti u $\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{R}^d$), onda podrazumijevamo da na tim skupovima imamo Borelovu σ-algebru. Tako ćemo za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$ na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathscr{F})$ reći da je **Borel izmjeriva**, **Borelova** ili samo **izmjeriva** ako je $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ za svaki $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Zadatak II.2.1 Na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathscr{F})$, za skup $A \subseteq \Omega$ ćemo s $\mathbf{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$

označavati **indikatorsku funkciju** definiranu s

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Pokažite da je za $A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ izmjeriva funkcija. ■

Propozicija II.2.1 Neka su $(S_1, \mathscr{F}_1)$ i $(S_2, \mathscr{F}_2)$ izmjerivi prostori i $f : S_1 \to S_2$ funkcija.

(i) Familija

$$\mathscr{G}_1 = f^{-1}(\mathscr{F}_2) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{F}_2\}$$

je σ-algebra na S_1.

(ii) Familija

$$\mathscr{G}_2 = \{B \subseteq S_2 : f^{-1}(B) \in \mathscr{F}_1\} \tag{II.2.1}$$

je σ-algebra na S_2.

Dokaz. (i) Redom provjeravamo svojstva σ-algebre. Kako je $S_2 \in \mathscr{F}_2$, onda $S_1 = f^{-1}(S_2) \in \mathscr{F}_2$. Ako je $A \in \mathscr{G}_1$, onda je $A = f^{-1}(B)$ za neki $B \in \mathscr{F}_2$ pa je $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$, a $B^c \in \mathscr{F}_2$ i slijedi $A^c \in \mathscr{G}_1$. Neka je $A_i \in \mathscr{G}_1$, $i \in \mathbb{N}$. Tada za neke $B_i \in \mathscr{F}_2$, $i \in \mathbb{N}$ je $A_i = f^{-1}(B_i)$. Zbog $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{F}_2$ i $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, slijedi da je $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{G}_1$.

(ii) Iz $f^{-1}(S_2) = S_1 \in \mathscr{F}_1$ slijedi da je $S_2 \in \mathscr{G}_2$. S obzirom da je za $B \in \mathscr{G}_2$, $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathscr{F}_1$, onda je i $B^c \in \mathscr{G}_2$. Za $B_i \in \mathscr{G}_2$, $i \in \mathbb{N}$, je $f^{-1}\left(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \in \mathscr{F}_1$ pa je $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathscr{G}_2$.

■

Uočimo da bi se prema oznakama iz prethodne propozicije, zahtjev izmjerivosti mogao zapisati i kao $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{F}_1$, odnosno $\mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{G}_2$. Osim toga, dolazimo i do jednostavnijeg kriterija za provjeru izmjerivosti.

Korolar II.2.2 Neka su $(S_1, \mathscr{F}_1)$ i $(S_2, \mathscr{F}_2)$ izmjerivi prostori, $f : S_1 \to S_2$ funkcija i neka je $\mathscr{F}_2$ generirana nekom familijom $\mathscr{G}$, $\mathscr{F}_2 = \sigma(\mathscr{G})$. Funkcija f je $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$-izmjeriva ako i samo ako je $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}_1$ za sve $B \in \mathscr{G}$.

Dokaz. Ako je $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}_1$ za sve $B \in \mathscr{G}$, onda je $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{G}_2$ gdje je $\mathscr{G}_2$ definirana s (II.2.1) iz čega slijedi $\mathscr{F}_2 = \sigma(\mathscr{G}) \subseteq \mathscr{G}_2$ jer je $\mathscr{G}_2$ σ-algebra. Obrat je očigledan. ■

Kompozicija izmjerivih funkcija je izmjeriva o čemu govori sljedeća propozicija.

Propozicija II.2.3 Neka su $f : (S_1, \mathscr{F}_1) \to (S_2, \mathscr{F}_2)$ i $g : (S_2, \mathscr{F}_2) \to (S_3, \mathscr{F}_3)$ izmjerive funkcije. Tada je i $g \circ f : (S_1, \mathscr{F}_1) \to (S_3, \mathscr{F}_3)$ izmjeriva.

Dokaz. Za svaki $C \in \mathscr{F}_3$ je $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathscr{F}_1$ jer je $g^{-1}(C) \in \mathscr{F}_2$.

■

Da izmjerivih funkcija ima dosta slijedi iz sljedeće propozicije.

Propozicija II.2.4 Ako je $f:(\mathbb{R}^{d_1},\mathscr{B}(\mathbb{R}^{d_1}))\to(\mathbb{R}^{d_2},\mathscr{B}(\mathbb{R}^{d_2}))$, $d_1,d_2\geq 1$, neprekidna, onda je i izmjeriva.

Dokaz. Zbog Korolara II.2.2 i Propozicije II.1.2 dovoljno je pokazati da je $f^{-1}(U)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^{d_1})$ za svaki otvoren skup $U\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^{d_2})$. Po definiciji neprekidnosti, $f^{-1}(U)$ je otvoren skup pa je $f^{-1}(U)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^{d_1})$. ■

Zadatak II.2.2 Pokažite da je svaka rastuća funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (Borel) izmjeriva. ■

II.2.2 Jednostavne funkcije

Funkcija $f:(\Omega,\mathscr{F})\to(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ je **jednostavna funkcija** ako postoje disjunktni izmjerivi skupovi $A_1,\dots,A_n\in\mathscr{F}$ i $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ takvi da je

$$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{1}_{A_i}.$$

Uočimo da je f izmjeriva jer su $A_1,\dots,A_n$ izmjerivi skupovi. Jednostavna funkcija poprima samo konačno mnogo različitih vrijednosti. Reprezentacija jednostavne funkcije ne mora biti jedinstvena, zato obično pretpostavljamo da su svi $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ međusobno različiti i $\Omega=\cup_{i=1}^{n}A_i$.

Jednostavne funkcije su guste po točkama u prostoru izmjerivih funkcija, o čemu govori sljedeća propozicija.

Propozicija II.2.5 Neka je $(X,\mathscr{A})$ izmjeriv prostor i $f:\Omega\to[0,\infty]$ izmjeriva funkcija. Tada postoji niz nenegativnih jednostavnih funkcija $(f_n,\,n\in\mathbb{N})$ takvih da je $f_1\leq f_2\leq\cdots$ i za sve $\omega\in\Omega$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=f(\omega).$$

Dokaz. Za $n\in\mathbb{N}$ definiramo disjunktne skupove

$$A_k^n=\left\{\omega\in\Omega:\frac{k-1}{2^n}\leq f(\omega)<\frac{k}{2^n}\right\},\qquad k=1,2,\dots,n2^n,$$
$$A_0^n=\{\omega\in\Omega:f(\omega)\geq n\},$$

i definiramo

$$f_n(\omega)=\begin{cases}\frac{k-1}{2^n}, & \omega\in A_k^n,\\ n, & \omega\in A_0^n.\end{cases}$$

Očigledno se radi o rastućem nizu i ako je $f(\omega)\leq n$, onda $|f_n(\omega)-f(\omega)|\leq 1/2^n$ pa $\lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=f(\omega)$. ■

Kada niz funkcija f_n raste prema funkciji f po točkama kao u prethodnoj propoziciji, pišemo $f_n\uparrow f$.

II.3. Integracija

U klasičnoj analizi, Riemannov integral nenegativne realne funkcije jedne varijable predstavlja površinu koju graf funkcije zatvara s x-osi. U okviru teorije mjere, moguće je razviti puno općenitiji pojam integrala tako da možemo integrirati širu klasu funkcija, i u smislu definicije tih funkcija, ali i u smislu domena na kojima su te funkcije definirane. Proširenje razmatramo na način da želimo zadržati uobičajena svojstva integrala i da se novo definirani pojam podudara s Riemannovim integralom kada je on definiran.

II.3.1 Konstrukcija Lebesgueovog integrala

Konstrukcija Lebesgueovog integrala može se podijeliti u tri koraka po klasi izmjerivih funkcija za koje se integral definira:

(i) jednostavne funkcije,
(ii) pozitivne funkcije,
(iii) općenite funkcije.

U nastavku je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor mjere.

II.3.1.1 Integral jednostavnih funkcija

Za jednostavnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$$

definiramo integral u odnosu na mjeru μ s

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i). \tag{II.3.1}$$

Definicija integrala jednostavne funkcije (II.3.1) ne ovisi o reprezentaciji jednostavne funkcije (vidi Problem II.11). Osim toga, možemo pretpostaviti da je $\Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Pokažimo da tako definiran integral ima svojstva koja očekujemo od integrala: homogenost, aditivnost i monotonost.

Lema II.3.1 Ako su $f,g \geq 0$ jednostavne funkcije i $\alpha \in \mathbb{R}$, onda
(i) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$,
(ii) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$,
(iii) ako je $f \leq g$, onda je $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Dokaz. (i) $\int \alpha f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha\alpha_i \mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \alpha \int f d\mu$.

(ii) Ako je $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ i $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$, pri čemu je $\Omega = \cup_{i=1}^n A_i = \cup_{j=1}^m B_j$, onda je

$$f+g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j},$$

pa imamo

$$\begin{aligned} \int (f+g) d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

(iii) Kako je $g - f \geq 0$, onda je i $\int (g-f) d\mu \geq 0$, pa iz (ii) slijedi da je $\int g d\mu = \int (f + g - f) d\mu = \int f d\mu + \int (g-f) d\mu \geq \int f d\mu$.

■

Lema II.3.2 Ako su f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, nenegativne jednostavne funkcije i $f_n \uparrow f$ po točkama, onda

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Dokaz. Zbog monotonosti integrala je $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Za obratnu nejednakost neka je $\varepsilon \in (0,1)$ i neka je $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ uz $\alpha_i \neq 0$. Definirajmo skupove

$$A_i^n = \{\omega \in A_i : f_n(\omega) \geq (1-\varepsilon)\alpha_i\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

koji su izmjerivi, za svaki i je $(A_i^n, n \in \mathbb{N})$ rastući niz i $A_i = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_i^n$. Ako stavimo da je $g_n = \sum_{i=1}^m (1-\varepsilon)\alpha_i \mathbf{1}_{A_i^n}$, onda su g_n, $n \in \mathbb{N}$ jednostavne nenegativne funkcije, $g_n \leq f_n$ i

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m (1-\varepsilon)\alpha_i \mu(A_i^n) = \sum_{i=1}^m (1-\varepsilon)\alpha_i \mu(A_i) = (1-\varepsilon) \int f d\mu.$$

Zbog monotonosti integrala je $\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu$ pa je onda $(1-\varepsilon)\int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ iz čega zbog proizvoljnosti ε slijedi tvrdnja. ■

II.3.1.2 Integral nenegativnih funkcija

Za nenegativnu izmjerivu funkciju $f : \Omega \to [0,\infty)$ integral u odnosu na mjeru μ definiramo s

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu : g \text{ jednostavna}, 0 \leq g \leq f \right\}. \tag{II.3.2}$$

Sljedeća propozicija daje nam karakterizaciju pomoću aproksimirajućeg niza jednostavnih funkcija. Prema Propoziciji II.2.5 takav niz uvijek postoji.

Lema II.3.3 Ako je f nenegativna izmjeriva funkcija i $(f_n, n \in \mathbb{N})$ rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija takvih da $f_n \uparrow f$ po točkama, onda

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int g d\mu : g \text{ jednostavna }, 0 \leq g \leq f\right\} = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Uočimo da limes uvijek postoji u $[0,\infty]$. Jasno je po definiciji da je $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. Za obratnu nejednakost dovoljno je pokazati da za proizvoljnu jednostavnu $g \leq f$ vrijedi

$$\int g d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Lako se vidi da je $g \wedge f_n = \min\{g, f_n\}$ opet nenegativna jednostavna funkcija i $g \wedge f_n \uparrow g$. Prema Lemi II.3.2

$$\int g d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (g \wedge f_n) d\mu$$

i zbog monotonosti integrala (Lema II.3.1(iii)) slijedi $\int (g \wedge f_n) d\mu \leq \int f_n d\mu$ što daje tvrdnju. ∎

Sada ćemo pokazati da i ovaj integral ima svojstva homogenosti, aditivnosti i monotonosti.

Lema II.3.4 Ako su $f, g \geq 0$ nenegativne izmjerive funkcije i $\alpha \geq 0$, onda
(i) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$,
(ii) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$,
(iii) ako je $f \leq g$, onda je $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Dokaz. Neka su (f_n) i (g_n) nizovi jednostavnih funkcija takvi da $f_n \uparrow f$ i $g_n \uparrow g$ po točkama. Tada zbog Leme II.3.3 i Leme II.3.1

$$\int \alpha f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \alpha f_n d\mu = \alpha \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \alpha \int f d\mu,$$
$$\int (f+g) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n d\mu + \int g_n d\mu\right) = \int f d\mu + \int g d\mu,$$

što pokazuje (i) i (ii), dok (iii) slijedi iz definicije (II.3.2). ∎

II.3.2 Integral izmjerive funkcije

Ako je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija, onda iz Propozicije II.2.3 slijedi da su funkcije

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\} = -\min\{f, 0\},$$

nenegativne izmjerive i $f = f^+ - f^-$. Funkciju f^+ zovemo pozitivni dio, a funkciju f^- negativni dio funkcije f.

Zadatak II.3.1 Odredite pozitivni i negativni dio funkcija $f(x) = x^3$ i $g(x) = \sin x$. ▪

Ako je barem jedan od integrala $\int f^+ d\mu$ ili $\int f^- d\mu$ konačan, onda kažemo da $\int f d\mu$ postoji i definiramo

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu. \tag{II.3.3}$$

Ako je $\int f d\mu$ konačan, onda kažemo da je f **integrabilna**. Kako je $|f| = f^+ + f^-$, f je integrabilna ako i samo ako je $|f|$ integrabilna, odnosno $\int |f| d\mu < \infty$. Integral (II.3.3) naziva se **Lebesgueov integral**[1] ili **Lebesgue-Stieltjesov integral**. Tako definiran integral podudara se s prethodno uvedenim integralima na jednostavnim i nenegativnim izmjerivim funkcijama.

Jednostavno slijede svojstva Lebesgueovog integrala (Problem II.12).

Teorem II.3.5 Ako su f, g integrabilne izmjerive funkcije i $\alpha \in \mathbb{R}$, onda

(i) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$,

(ii) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$,

(iii) ako je $f \leq g$, onda je $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Zadatak II.3.2 Pokažite da ako $\int f d\mu$ postoji, onda je

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

■

II.3.3 Oznake i posebni slučajevi

Kada želimo naglasiti argument funkcije onda za integral još pišemo i

$$\int f d\mu = \int_\Omega f d\mu = \int f(\omega) d\mu(\omega) = \int f(\omega) \mu(d\omega).$$

Integral funkcije po izmjerivom podskupu $E \subset \Omega$ definira se kao

$$\int_E f d\mu = \int f \mathbf{1}_E d\mu.$$

Posebni slučajevi imaju svoje oznake. Ako je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ i λ Lebesgueova mjera, onda obično pišemo $\int f(x) dx$ za $\int f d\lambda$. Ako je dodatno $E = [a, b]$, onda pišemo $\int_a^b f(x) dx$ za $\int_E f d\lambda$. Pri tome treba biti jasno da se radi o Lebesgueovom integralu, a ne Riemannovom integralu. Ipak, dva integrala se u većini slučajeva podudaraju (vidi primjerice [8]).

Teorem II.3.6 Svaka ograničena Riemann integrabilna funkcija na $[a, b]$ je i Lebesgue integrabilna i dva integrala su jednaka.

Da obrat ne vrijedi pokazuje sljedeći zadatak.

Zadatak II.3.3 Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}(x)$. Pokažite da f nije Riemann integrabilna, ali je Lebesgue integrabilna i Lebesgueov integral je jednak 1 (u odnosu na Lebesguovu mjeru). ■

Ako je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu)$ pri čemu je μ Lebesgue-Stieltjesova mjera $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$, $a < b$, onda pišemo $\int f(x) dF(x)$ za $\int f d\mu$. U ovom slučaju moguće je napraviti još jednu konstrukciju integrala koja vodi do tzv. Riemann-Stieltjesovog integrala. Opet, ako taj integral postoji, jednak je Lebesgueovom integralu.

[1] Naziv Lebesgueov integral ponekad se koristi samo za specijalni slučaj kad je μ Lebesgueova mjera.

Zadatak II.3.4 Ako je δ_x, $x \in \Omega$, Diracova delta mjera i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ izmjeriva, pokažite da je

$$\int f d\delta_x = f(x).$$

■

Zadatak II.3.5 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$ gdje je μ mjera prebrojavanja, i $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ nenegativna funkcija. Tada je

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(i).$$

■

Prethodno vrijedi i za ne nužno nenegativne funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ako je $\int |f| d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} |f(i)| < \infty$. Općenito, ako je Ω prebrojiv skup, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ i μ mjera prebrojavanja, onda je $\int f d\mu$ zapravo $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)$. Posebno, to znači da rezultati za sume slijede iz odgovarajućih rezultata za integrale.

Ostala svojstva integrala pokazat ćemo za posebni slučaj kojim ćemo se baviti, a to je kad je μ vjerojatnosna mjera.

II.4. Produkt prostora mjere

Neka su $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ i $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ dva σ-konačna prostora mjere. Produkt skupova Ω_1 i Ω_2 je jednostavno Kartezijev produkt $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ dok je **produktna σ-algebra** definirana s

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 = \sigma\left(\{A \times B : A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2\}\right). \tag{II.4.1}$$

Na tako definiranom izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathscr{F})$ vrijedi sljedeće (vidi primjerice [6]).

Teorem II.4.1 Na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathscr{F})$ postoji jedinstvena mjera $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ takva da je za sve $A \in \mathscr{F}_1$ i $B \in \mathscr{F}_2$

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ nazivamo **produktni prostor mjere**. Indukcijom se prethodno jednostavno proširi i na konačno mnogo prostora $(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \mu_i)$, $i = 1, \dots, d$. Može se pokazati i da ako je $(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \mu_i) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ za $i = 1, \dots, d$, tada je produktni prostor $\mathbb{R}^d$ s Borelovom σ-algebrom $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ i mjera je Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$. Posebno, za $d_1, d_2 \geq 1$, σ-algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$ jednaka je produktnoj σ-algebri $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{d_1}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^{d_2})$.

Za integriranje na produktnim prostorima imamo sljedeći važan teorem (vidi primjerice [6]).

Teorem II.4.2 — Fubini(-Tonelli) teorem. Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ produkt σ-konačnih prostora mjere $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ i $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ i $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija.

(i) (Tonelli) Ako je $f \geq 0$, onda vrijedi

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\mu_2(d\omega_2) \right) \mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\mu_1(d\omega_1) \right) \mu_2(d\omega_2). \tag{II.4.2}$$

(ii) Ako je $\int |f| d\mu < \infty$, onda vrijedi (II.4.2) i svi integrali u (II.4.2) su konačni.

Obično ćemo izostavljati zagrade u zapisu dvostrukih integrala. Kada želimo pokazati (II.4.2), često se Tonellijev i Fubinijem teorem koriste zajedno. Naime, da bi pokazali $\int |f| d\mu < \infty$, možemo iskoristiti Tonellijev teorem po kojem je dovoljno pokazati da je $\int \int |f| d\mu_1 d\mu_2 < \infty$ ili $\int \int |f| d\mu_2 d\mu_1 < \infty$. Nakon toga se može primijeniti Fubinijev teorem na f po kojem onda vrijedi (II.4.2).

Zadatak II.4.1 Neka su $a_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}$, realni brojevi. Pokažite:

(a) Ako je $a_{i,j} \geq 0$ za sve $i, j \in \mathbb{N}$, onda je

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{i,j} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{i,j} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i,j}.$$

(b) Ako je $\sum_{i,j\in\mathbb{N}} |a_{i,j}| < \infty$, onda je $\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{i,j} < \infty$ i vrijedi prethodna jednakost.

■

Zadatak II.4.2 Neka su $a_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}$, elementi matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{i,j}|$, $\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{i,j}$ i $\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i,j}$ i objasnite. ■

Zadaci za vježbu

Problem II.1 Dovršite dokaz Propozicije II.1.2.

Problem II.2 Pokažite primjerom da unija dvije σ-algebre ne mora biti σ-algebra.

Problem II.3 Ako je $\mathscr{A} = \{A\}$, $A \subseteq \Omega$, odredite $\sigma(\mathscr{A})$.

Problem II.4 Neka je $\Omega = \{1,2,3,4\}$ i $\mathscr{A} = \{\{1\},\{2\}\}$. Odredite $\sigma(\mathscr{A})$.

Problem II.5 Odredite sve moguće σ-algebre na skupovima $\{1,2\}$ i $\{1,2,3\}$.

Problem II.6 Neka je $\mathscr{A}$ prebrojiva particija od Ω, odnosno $\mathscr{A} = \{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ i $A_i \cap A_j = 0$ za $i \neq j$, te neka je $\mathscr{G}$ familija svih prebrojivih unija elemenata od $\mathscr{A}$. Pokažite da je $\mathscr{G}$ σ-algebra i zaključite da je svaki element od $\sigma(\mathscr{A})$ prebrojiva unija elemenata iz $\mathscr{A}$.

Problem II.7 Familija podskupova nekog skupa koja sadrži taj skup, zatvorena je na komplementiranje i konačne unije naziva se **algebra**. Pokažite da je $\mathscr{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ je konačan ili je } A^c \text{ konačan}\}$ algebra na $\mathbb{N}$, ali nije σ-algebra.

Problem II.8 Za familiju $\mathscr{A}$ podskupova od Ω kažemo da je **π-sistem** ako je zatvorena na konačne presjeke. Za familiju $\mathscr{B}$ podskupova od Ω kažemo da je **λ-sistem** (ili Dynkinov sistem ili klasa, ili d-sistem) ako je:

- $\Omega \in \mathscr{B}$,
- ako je $A, B \in \mathscr{B}$ i $A \subseteq B$, onda je $B \backslash A \in \mathscr{B}$,
- ako je $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathscr{B}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \cdots$, onda je $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{B}$.

Dokažite sljedeće tvrdnje.

(a) Svaka σ-algebra je λ-sistem.
(b) Familija $\mathscr{A}$ je σ-algebra ako i samo ako je π-sistem i λ-sistem.
(c) Familija $\mathscr{A} = \{\emptyset\} \cup \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$ je π-sistem.

Problem II.9 — *. Za familiju $\mathscr{A}$ s $\ell(\mathscr{A})$ označavamo najmanji λ-sistem koji sadrži sve skupove iz $\mathscr{A}$. Neka je $\mathscr{A}$ π-sistem.

(a) Pokažite da je $\ell(\mathscr{A}) \subseteq \sigma(\mathscr{A})$.
(b) Ako je $A \in \ell(\mathscr{A})$, pokažite da je familija

$$\mathscr{G}_A = \{B : A \cap B \in \ell(\mathscr{A})\}$$

λ-sistem.

(c) Pokažite da ako je $A \in \mathscr{A}$, onda je $\ell(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{G}_A$.

(d) Pokažite da ako je $A \in \ell(\mathscr{A})$, onda je $\ell(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{G}_A$.

(e) Na osnovu prethodnog zaključite da je $\ell(\mathscr{A})$ zatvorena na konačne presjeke.

(f) Zaključite da vrijedi $\ell(\mathscr{A}) = \sigma(\mathscr{A})$. Tvrdnja je poznata kao $\pi - \lambda$ **teorem**.

Problem II.10 — *. Neka je $\mathscr{A}$ π-sistem, $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{F}$ i μ_1 i μ_2 mjere na $\mathscr{F}$ takve da je $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ za sve $A \in \mathscr{A}$ te neka je $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) < \infty$.

(a) Pokažite da je $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{F} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ λ-sistem i iz toga zaključite da je $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ za sve $A \in \mathscr{F}$.

(b) Dokažite drugu tvrdnju u Teoremu II.1.5 (za konačnu mjeru μ).

Problem II.11 Pokažite da definicija integrala jednostavne funkcije (II.3.1) ne ovisi o reprezentaciji jednostavne funkcije, odnosno ako je $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$, onda je $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j)$.

Problem II.12 Dokažite Teorem II.3.5.

Problem II.13 Neka su $\Omega_1 = (0,1)$ i $\Omega_2 = (1,\infty)$ uz Borelove σ-algebre i Lebesgueovu mjeru, te neka je $f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. Izračunajte $\int_0^1 \int_1^\infty f(x,y)dydx$ i $\int_1^\infty \int_0^1 f(x,y)dxdy$ i objasnite.

Problem II.14 Može li se zamijeniti redoslijed integracije u integralu

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \sin(ax) y^{p-1} e^{-xy} dxdy, \quad a \in \mathbb{R}, p \in (1,2).$$

Problem II.15 Neka je $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mu_1) = ((0,1), \mathscr{B}((0,1)), \lambda)$, λ Lebesgueova mjera i $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mu_2) = ((0,1), \mathscr{P}((0,1)), \mu_2)$, μ_2 mjera prebrojavanja. Za funkciju $f(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{1}_{\{\omega_1 = \omega_2\}}$ izračunajte

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \right) \mu_1(d\omega_1) \quad \text{i} \quad \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \right) \mu_2(d\omega_2)$$

i komentirajte.

III Vjerojatnost, slučajne varijable i slučajni vektori

III.1. Vjerojatnosni prostor

Sada kada imamo dobru teorijsku podlogu, uvođenje osnovnih pojmova vjerojatnosti neće biti problem.

Definicija III.1.1 **Vjerojatnosna mjera** ili **vjerojatnost** na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathscr{F})$ je mjera P za koju je $P(\Omega) = 1$.

Vjerojatnost ćemo označavati s P.[1] U tom slučaju trojku $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ nazivamo **vjerojatnosni prostor**, Ω zovemo **skup elementarnih događaja**, a elemente od $\mathscr{F}$ zovemo **događaji**.

■ **Primjer III.1.1** Neka je Ω prebrojiv skup (konačan ili prebrojivo beskonačan), $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ i p_ω, $\omega \in \Omega$, niz brojeva takav da je

$$p_\omega \geq 0 \text{ i } \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

Tada je s

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega, \; A \subseteq \Omega,$$

definirana vjerojatnost na Ω. Ovakav vjerojatnosni prostor nazivamo **diskretan vjerojatnosni prostor**. Sjetimo se da je u okviru klasičnog pristupa računanju vjerojatnosti, skup Ω konačan i svi ishodi su jednako vjerojatni pa je $p_\omega = 1/|\Omega|$ za sve $\omega \in \Omega$ pri čemu $|\cdot|$ označava broj elemenata skupa.

Zadatak III.1.1 Definirajte vjerojatnosne prostore za slučajne pokuse bacanja pravilne kockice, izvlačenje karte iz špila i zbroj brojeva u bacanju dvije pravilne kockice. ■

U sljedećoj propoziciji navedena su osnovna svojstva vjerojatnosti koja odmah slijede iz svojstava mjere.

[1] Često se vjerojatnost označava s $\mathbb{P}$.

Propozicija III.1.1 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Tada vrijedi

(i) **monotonost**: za $A, B \in \mathscr{F}$, $A \subseteq B$ vrijedi $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ i posebno $P(A) \leq P(B)$,

(ii) **σ-subaditivnost**: za proizvoljne $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

(iii) **neprekidnost na rastući niz događaja**: za $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$ takve da je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ vrijedi

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n),$$

(iv) **neprekidnost na padajući niz događaja**: za $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$ takve da je $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ vrijedi

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n),$$

(v) **vjerojatnost suprotnog događaja**: $P(A^c) = 1 - P(A)$,

(vi) za proizvoljne $A, B \in \mathscr{F}$ vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dokaz. Tvrdnje (i)-(iv) slijede iz Propozicije II.1.3 dok (v) slijedi iz (i). Za (vi) zapišemo $A \cup B$ kao uniju disjunktnih skupova $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$. ■

Vjerojatnosnim prostorom dajemo matematičku pozadinu stvarnim ili konceptualnim slučajnim pokusima kao što su bacanje novčića, bacanje kockice, životni vijek osobe, vrijeme raspada radioaktivnog atoma i sl. U tom smislu, Ω kao skup elementarnih događaja sadrži sve moguće ishode slučajnog pokusa. Događaji su sastavljeni od ishoda čije vjerojatnosti smijemo računati jer su to izmjerivi skupovi. Skupovne operacije možemo intepretirati u smislu realizacije određenog događaja o čemu govori sljedeći zadatak.

Zadatak III.1.2 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, te neka su A, B i C događaji. Pomoću događaja A, B i C izrazite sljedeće događaje:

(a) realizirao se samo događaj A,
(b) realizirali su se događaji A i B,
(c) realizirala su se sva tri događaja,
(d) realizirao se barem jedan od događaja A, B i C,
(e) realizirao se točno jedan od događaja A, B i C,
(f) realizirali su se barem dva od događaja A, B i C,
(g) realizirali su se točno dva od događaja A, B i C,
(h) realizirali su se najviše dva od događaja A, B i C,
(i) nije se realizirao niti jedan od događaja A, B i C.

■

Zadatak III.1.3 Neka su A i B dva događaja. Vjerojatnost da se ne dogodi nijedan od njih je $3/8$. Kolika je vjerojatnost da se barem jedan od njih dogodi? ■

Zadatak III.1.4 Neka su A i B dva događaja. Ako je $P(A) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.2$ i $P((A \cup B)^c) = 0.4$, izračunajte $P(B)$. ■

Zadatak III.1.5 Neka je $A_n \in \mathscr{F}$, $n \in \mathbb{N}$, u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Pokažite da

(a) ako je $P(A_n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, onda je $P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$,

(b) ako je $P(A_n) = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, onda je $P\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

■

Zadatak III.1.6 Pokažite da za proizvoljna dva događaja $A, B \in \mathscr{F}$ u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vrijedi

$$\max\{P(A), P(B)\} \leq P(A \cup B) \leq 2\max\{P(A), P(B)\}.$$

■

Zadatak III.1.7 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Ako su $A, B \in \mathscr{F}$ takvi da je $P(A \triangle B) = 0$, gdje je $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, pokažite da je $P(A) = P(B)$. ■

III.2. Slučajne varijable i slučajni vektori

Skup elementarnih događaja može biti vrlo apstraktan i kompleksan. Primjerice, možemo razmisliti što bi bio prostor elementarnih događaja za vrijeme sutra. To bi mogao biti skup svih mogućih stanja atmosfere koji je nemoguće opisati. Funkcije na prostoru elementarnih događaja mogu sažeti informacije iz elementarnih događaja. U navedenom primjeru obično nas ne zanima stanje cijele atmosfere već samo neki bitni parametri, primjerice temperatura, vlažnost zraka ili brzina vjetra.

III.2.1 Slučajne varijable

Definicija III.2.1 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je **slučajna varijabla** ako je $X^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ za sve $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Dakle, slučajna varijabla je jednostavno izmjeriva realna funkcija na skupu elementarnih događaja. Slučajna varijabla ishodima slučajnog pokusa pridružuje realne brojeve. Zahtjev izmjerivosti osigurava da je $X^{-1}(B)$ događaj tako da možemo računati njegovu vjerojatnost. Skup $X^{-1}(B)$ obično označavamo s

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B).$$

Slučajna varijabla zapravo nije ni slučajna ni varijabla jer to je samo funkcija koja služi kao model za slučajni fenomen. U određenom smislu, slučajna varijabla sažima informacije iz vjerojatnosnog prostora.

Za funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sa $\sigma(X)$ označavat ćemo familiju

$$\sigma(X) = \{\{X \in B\} : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

Prema Propoziciji II.2.1(i), $\sigma(X)$ je σ-algebra. To je najmanja σ-algebra uz koju je X slučajna varijabla i nazivamo je **σ-algebra generirana s X**. Očigledno je X slučajna varijabla ako i samo ako je $\sigma(X) \subseteq \mathscr{F}$.

Napomena III.2.1 Ako je $A \in \sigma(X)$, onda na osnovu poznavanja $X(\omega)$ možemo znati je li se A dogodio ($\omega \in A$) ili ne ($\omega \notin A$). Primjerice, $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega)^2 = 1\}$ je sadržan u $\sigma(X)$. Kada za neki elementarni događaj $\omega \in \Omega$ znamo $X(\omega)$, onda lako znamo i je li $X(\omega)^2 = 1$, odnosno je li $\omega \in A$. S druge strane, za neku drugu funkciju $Y\colon \omega \to \mathbb{R}$, skup $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) + Y(\omega) = 1\}$ ne mora biti u $\sigma(X)$. Čak i kad znamo $X(\omega)$ ne znamo je li $X(\omega) + Y(\omega) = 1$ jer ne znamo ništa o $Y(\omega)$.

$\sigma(X)$ se može interpretirati kao *skup informacija* o X. Naime, skup informacija možemo poistovjetiti sa svim pitanjima koja možemo odgovoriti na osnovu tih informacija. Tako $\sigma(X)$ sadrži sve skupove za koje znamo jesu li se dogodili na osnovu poznavanja ishoda od X.

Korolar II.2.2 u kombinaciji s Propozicijom II.1.2 nam daje jednostavniji način kako provjeriti uvjet izmjerivosti realnih funkcija.

Korolar III.2.2 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Svaki od sljedećih uvjeta nužan je i dovoljan da X bude slučajna varijabla na Ω:
- (i) $X^{-1}(U) \in \mathscr{F}$ za sve za sve otvorene skupove $U \subseteq \mathbb{R}$,
- (ii) $\{X \le x\} \in \mathscr{F}$ za sve $x \in \mathbb{R}$,
- (iii) $\{X < x\} \in \mathscr{F}$ za sve $x \in \mathbb{R}$,
- (iv) $\{X \ge x\} \in \mathscr{F}$ za sve $x \in \mathbb{R}$,
- (v) $\{X > x\} \in \mathscr{F}$ za sve $x \in \mathbb{R}$,

■ **Primjer III.2.1** Ako je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ diskretan vjerojatnosni prostor, onda je $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ pa je svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla.

■ **Primjer III.2.2** Za $A \in \mathscr{F}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ **indikatorska funkcija** (**indikator**)

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A, \\ 1, & \omega \in A, \end{cases}$$

je slučajna varijabla. Često se koristi i oznaka I_A, a u teoriji mjere naziv karakteristična funkcija koji pak u vjerojatnosti ima sasvim drugo značenje.

Napomena III.2.3 Nekad će funkcije koje promatramo moći poprimati vrijednosti u proširenom skupu realnih brojeva, odnosno $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Borelova σ-algebra na $\overline{\mathbb{R}}$ može se definirati kao

$$\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma\{B \cup C : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), C \subseteq \{-\infty, \infty\}\}.$$

Izmjerive funkcije $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ također ćemo zvati slučajne varijable.

Zadatak III.2.1 Pokažite da ako $\mathscr{G}$ generira $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, onda je $\sigma(X) = \sigma(X^{-1}(\mathscr{G}))$, gdje je $X^{-1}(\mathscr{G}) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathscr{G}\}$. ■

Zadatak III.2.2 Neka su $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcije na potpunom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ takve da je $D = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \neq X_2(\omega)\} \in \mathscr{F}$ i $P(D) = 0$. Pokažite da ako je jedna od njih slučajna varijabla, tada su obje slučajne varijable. ■

III.2.2 Slučajni vektori

Definicija III.2.2 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ je (d-dimenzionalan) **slučajni vektor** ako je $\boldsymbol{X}^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ za sve $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

Komponente slučajnog vektora označavat ćemo kao $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$, odnosno $\boldsymbol{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_d(\omega))$. Za slučajne vektore vrijedi tvrdnja analogna Korolaru III.2.2. Skraćeno ćemo pisati

$$\{\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}\} = \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq x_i,\ i = 1, \ldots, d\}$$

ili

$$\{\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}\} = \{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_d \leq x_d\}.$$

Slučajni vektor je zapravo uređena d-torka slučajnih varijabli.

Propozicija III.2.4 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ je slučajni vektor ako i samo ako je $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla za svaki $i = 1, \ldots, d$.

Dokaz. Ako su $X_1, \ldots, X_d$ slučajne varijable, onda za $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ vrijedi

$$\{\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}\} = \bigcap_{i=1}^{d} \{X_i \leq x_i\} \in \mathscr{F}.$$

S druge strane, ako je $\boldsymbol{X}$ slučajni vektor, za svaki $x_i \in \mathbb{R}$ je

$$\{X_i < x_i\} = \{\boldsymbol{X} \in (-\infty, \boldsymbol{b})\} \in \mathscr{F},$$

za $\boldsymbol{b} = (\infty, \ldots, \infty, x_k, \infty, \ldots, \infty)$. ∎

Ovdje ćemo se baviti samo slučajnim varijablama i slučajnim vektorima, no prethodno se lako može poopćiti. Općenito, slučajni element X je izmjeriva funkcija $X : (\Omega, \mathscr{F}) \to (S, \mathscr{S})$ za neki izmjeriv prostor $(S, \mathscr{S})$. Za $(S, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ dobijemo slučajne varijable, za $(S, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ slučajne vektore, dok za primjerice $(S, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ dobijemo slučajni proces u diskretnom vremenu, a za $(S, \mathscr{S}) = (\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ slučajni proces u neprekidnom vremenu.

III.2.3 Izmjerivost transformacija slučajnih varijabli

Nakon što smo definirali slučajne varijable i slučajne vektore, promatrat ćemo koje transformacije će očuvati svojstvo izmjerivosti. Iz Propozicije II.2.3 odmah slijedi sljedeća tvrdnja.

Korolar III.2.5 (i) Ako je X slučajna varijabla i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva, onda je i $g(X)$ slučajna varijabla.
(ii) Ako je $\boldsymbol{X}$ d_1-dimenzionalan slučajni vektor i $g : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ izmjeriva, onda je $g(\boldsymbol{X})$ d_2-dimenzionalan slučajni vektor.

Prethodna tvrdnja osigurava mnoštvo novih slučajnih varijabli. Primjerice, svaka transformacija neprekidnom funkcijom daje opet slučajnu varijablu. Tako su za slučajnu varijablu X i $\alpha \in \mathbb{R}$, funkcije

$$\alpha X,\ X + \alpha,\ X^2,\ \sin X,\ e^X,\ X^+ = \max\{X, 0\},\ X^- = \max\{-X, 0\} = -\min\{X, 0\},\ |X|,$$

slučajne varijable. Za slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$, funkcije

$$X_1 + \cdots + X_n,\ X_1 X_2 \cdots X_n,\ \max\{X_1, \ldots, X_n\},\ \min\{X_1, \ldots, X_n\},$$

su slučajne varijable.

Zadatak III.2.3 Ako su X i Y slučajne varijable, pokažite da su sljedeći skupovi događaji
(a) $\{X < Y\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < Y(\omega)\}$,
(b) $\{X > Y\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > Y(\omega)\}$,
(c) $\{X = Y\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}$.

Za nizove slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru možemo promatrati i transformacije kao što su $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} X_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} X_m\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{m\geq n} X_m\right), \\ \liminf_{n\to\infty} X_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geq n} X_m\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{m\geq n} X_m\right). \end{aligned} \tag{III.2.1}$$

O njihovoj izmjerivosti govori sljedeća propozicija.

Propozicija III.2.6 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli na istom vjerojatnosnom prostoru. Tada vrijedi:
(i) funkcije $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $\limsup_{n\to\infty} X_n$, $\liminf_{n\to\infty} X_n$ su slučajne varijable,
(ii) skup svih $\omega \in \Omega$ za koje (X_n) konvergira je događaj,
(iii) ako (X_n) konvergira na Ω prema X, tada je X slučajna varijabla.

Dokaz. (i) Za $\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ izmjerivost slijedi iz

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n \leq x\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \leq x\} \in \mathscr{F}.$$

Kako je $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-X_n)$, i $\inf_{n\in\mathbb{N}} X_n$ je slučajna varijabla. Iz te dvije činjenice slijedi i ostatak tvrdnje zbog definicije (III.2.1).
(ii) Skup točaka za koje niz konvergira možemo zapisati kao $\{\omega \in \Omega : \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\}$, što je po (i) i Zadatku III.2.3 događaj.
(iii) Tvrdnja slijedi iz (i) jer je $X = \lim_{n\to\infty} X_n = \liminf_{n\to\infty} X_n = \limsup_{n\to\infty} X_n$. ■

Iz aspekta vjerojatnosti, stvari koje se događaju na skupovima vjerojatnosti nula obično nisu važne. Za događaj A (ili svojstvo opisano tim događajem) na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ kažemo da vrijedi **gotovo sigurno (g.s.)** ako je $P(A) = 1$.[1] U teoriji mjere, ako je $P(A^c) = 0$ koristi se naziv skoro svuda ili gotovo svuda.

Primjerice, kažemo da su dvije slučajne varijable X i Y na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ jednake g.s. ako je

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$$

i pišemo $X = Y$ g.s. To definira relaciju ekvivalencije na skupu svih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Klasu ekvivalencije čine sve slučajne varijable koje su jednake g.s.

S obzirom da su slučajne varijable izmjerive funkcije, jedan oblik konvergencije već smo vidjeli. Niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ konvergira po točkama slučajnoj varijabli X na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ako za sve $\omega \in \Omega$, $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. Često je dovoljno i slabije svojstvo.

[1] Svojstvo se može definirati i za skupove koji nisu izmjerivi tako da zahtijevamo da A^c bude zanemariv (podskup izmjerivog skupa vjerojatnosti nula).

Definicija III.2.3 Niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ **konvergira g.s.** prema slučajnoj varijabli X na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ako je

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Pišemo $X_n \to X$ g.s., $X_n \xrightarrow{\text{g.s}} X$ ili $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ g.s.

Ako je $P(A) = 1, A = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ postoji}\}$, možemo definirati g.s. limes kao (vidjeti Problem III.8)

$$X(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega), & \text{za } \omega \in A, \\ 0, & \text{za } \omega \notin A. \end{cases} \tag{III.2.2}$$

Uobičajena pravila za limes zbroja, umnoška i sl. vrijede i za ovaj tip konvergencije.

Zadatak III.2.4 Neka je $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), P)$ vjerojatnosni prostor i P Lebesgueova mjera na $[0,1]$. Pokažite da niz slučajnih varijabli

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = 0, \\ 1/n, & \omega \neq 0, \end{cases}$$

konvergira g.s. prema $X = 0$, ali ne i po točkama. ■

III.3. Distribucije slučajnih varijabli

Već smo spomenuli da općenitost Ω može biti problem kada nas zanima tek neka slučajna varijabla na Ω. U tom slučaju možemo promatrati i vjerojatnosni prostor koji inducira ta slučajna varijabla.

III.3.1 Funkcije distribucije

Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ i za $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ stavimo

$$P_X(B) = P(X \in B). \tag{III.3.1}$$

Zadatak III.3.1 Pokažite da je s (III.3.1) zadana vjerojatnost na $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. ■

Na taj način dolazimo do vjerojatnosnog prostora $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), P_X)$ koji nazivamo **vjerojatnosni prostor induciran slučajnom varijablom X**. Vjerojatnost P_X nazivamo **vjerojatnost inducirana slučajnom varijablom X** ili **distribucijom** slučajne varijable X. Kraće ćemo pisati $X \sim P_X$.

Uočimo da je P_X mjera na $\mathbb{R}$ pa je možemo identificirati s neopadajućom zdesna neprekidnom funkcijom kao u Poglavlju II.1.3.

Definicija III.3.1 Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. **Funkcija distribucije** od X je funkcija $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana s

$$F(x) = P(X \le x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kada nije jasno o kojoj slučajnoj varijabli se radi, pisat ćemo F_X umjesto F. Osim toga, da X ima funkciju distribucije F označavat ćemo s $X \sim F$. Za $a, b \in \mathbb{R}$ imamo

$$P_X((a,b]) = P(X \in (a,b]) = P(a < X \le b) = F(b) - F(a).$$

te iz poglavlja II.1.3 slijede svojstva funkcije distribucije.

Teorem III.3.1 Funkcija distribucije F slučajne varijable X je neopadajuća zdesna neprekidna funkcija i vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \text{ i } \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Dokaz. Za prvi dio tvrdnje vidjeti Zadatak II.1.5. Za drugi dio uočimo da je $F(n) - F(-n) = P(X \in (-n,n])$. Puštanjem $n \to \infty$ slijedi $F(\infty) - F(-\infty) = P(\Omega) = 1$, pa mora biti $F(\infty) = 1$ i $F(-\infty) = 0$ zbog $F(x) \in [0,1]$. ■

Svaku funkciju F koja zadovoljava svojstva iz prethodnog teorema zvat ćemo **vjerojatnosna funkcija distribucije**. Teorem II.1.5 u kontekstu vjerojatnosti možemo iskazati ovako.

Teorem III.3.2 Ako je F vjerojatnosna funkcija distribucije, tada postoji jedinstvena vjerojatnost P_F na $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ takva da je

$$P_F((-\infty,x]) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ako je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F, onda je $P_X = P_F$.

Prethodni teorem ima dvije važne posljedice. Prvo, da bi poznavali distribuciju slučajne varijable X i tako mogli računati vjerojatnosti svih događaja vezanih uz X, dovoljno je znati funkciju distribucije. Naime, prema prethodnom, funkcija distribucije jednoznačno određuje vjerojatnost induciranu s X.

Kao drugo, u vjerojatnosti obično radimo samo s distribucijama, dok nam konkretan vjerojatnosni prostor nije bitan. Isto tako, obično nas ne zanima ni kako točno slučajna varijabla preslikava događaje u realne brojeve. Primjerice, često samo kažemo „neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F". Prethodni teorem osigurava da o tome zaista ne moramo brinuti. Naime, uvijek postoji vjerojatnosni prostor i slučajna varijabla na njemu koja ima funkciju distribucije upravo F. Možemo uzeti $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), P_F)$ i staviti $X(\omega) = \omega$. Tada je

$$P_F(X \le x) = P_F((-\infty,x]) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tako ćemo ubuduće često pričati o distribucijama i funkcijama distribucije bez da spomenemo vjerojatnosni prostor, pa ni slučajnu varijablu. Tako ćemo pojmove i svojstva jednako razmatrati za distribuciju i slučajnu varijablu.

Zadatak III.3.2 Pokažite da ako je F funkcija distribucije slučajne varijable X, onda vrijedi
(a) $P(X < x) = F(x-)$, $x \in \mathbb{R}$,
(b) $P(X = x) = F(x) - F(x-)$, $x \in \mathbb{R}$.
■

Zadatak III.3.3 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P) = ((0,1), \mathscr{B}((0,1)), \lambda)$, λ Lebesgueova mjera te $X(\omega) = \omega/(1+\omega)$ i $Y(\omega) = \mathbf{1}_{(0,1/2)}(\omega)$. Odredite funkcije distribucije od X i Y. ■

Zadatak III.3.4 Pokažite da ako su F_1 i F_2 funkcije distribucije, A gust skup u $\mathbb{R}$ i $F_1(x) = F_2(x)$ za sve $x \in A$, onda je $F_1 = F_2$. ■

Zadatak III.3.5 Pokažite da je skup svih točaka prekida funkcije distribucije prebrojiv. ■

III.3.2 Tipovi distribucija (slučajnih varijabli)

Kada znamo funkciju distribucije slučajne varijable X, onda možemo računati sve vjerojatnosti vezane uz X. Distribuciju možemo karakterizirati i drugim objektima što može pojednostaviti izračun vjerojatnosti vezanih uz X. O kojim objektima će se raditi ovisi o tipu distribucije slučajne varijable. Dva glavna tipa slučajnih varijabli, odnosno distribucija, su diskretne i neprekidne.

III.3.2.1 Diskretne slučajne varijable

Definicija III.3.2 Slučajna varijabla X je **diskretna** ako postoji prebrojiv skup $D \subset \mathbb{R}$ takav da je $P(X \in D) = 1$.

Još kažemo da je distribucija diskretne slučajne varijable **koncentrirana** na prebrojivom skupu. Neka je D najmanji skup takav da je $P(X \in D) = 1$. To znači da za međusobno različite $x_1, x_2, \ldots$ iz D vrijedi $p_i = P(X = x_i) > 0$ za $i \in \mathbb{N}$. Posebno, D je podskup slike funkcije X, odnosno $D \subseteq X(\Omega)$. Iako se D ne mora podudarati sa slikom od X, često ga nazivamo skup vrijednosti slučajne varijable. Za D definiran kao najmanji skup takav da je $P(X \in D) = 1$, reći ćemo da je **nosač** distribucije od X i označavati ga sa $\operatorname{supp} X$.

Neka je F funkcija distribucije diskretne slučajne varijable X s nosačem D. Kako je za $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} p_i, \tag{III.3.2}$$

to znači da je F stepenasta funkcija koja ima skokove u točkama $x_1, x_2, \ldots$, a visina skoka u točki x_i je jednaka $p_i = F(x_i) - F(x_i-)$. Ako s $C(F)$ označimo skup svih točaka u kojima je F neprekidna, onda je $C(F)^c = D$.

Za proizvoljan Borelov skup $B \subseteq \mathbb{R}$ vjerojatnosti vezane uz X možemo računati kao

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} p_i.$$

Kako nam za računanje $P(X \in B)$ trebaju samo skup D i vjerojatnosti p_i, distribuciju od X preglednije zapisujemo u obliku **tablice distribucije**:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Oznaka $X \sim$ označava da X ima distribuciju zadanu tom tablicom distribucije. Osim tablice distribucije za diskretnu slučajnu varijablu ima smisla definirati i funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = P(X = x), \quad x \in \mathbb{R},$$

koju nazivamo **diskretna funkcija gustoće**[1] iako taj naziv ne treba miješati s funkcijama gustoće neprekidnih slučajnih varijabli. Uočimo da je

$$f(x) = \begin{cases} p_i, & \text{ako je } x = x_i \text{ za neki } x_i \in D, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

[1] eng. probability mass function.

Skup D odgovara nosaču diskretne funkcije gustoće f, odnosno skupu $\operatorname{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$, što opravdava naziv nosač za skup D.

Pretpostavimo sada da je $(x_i, i \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ prebrojiv skup i $(p_i, i \in \mathbb{N})$ niz realnih brojeva takvih da je

$$p_i \geq 0,\ i \in \mathbb{N} \ \text{ i } \ \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i = 1. \tag{III.3.3}$$

Tada je s (III.3.2) definirana neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija takva da je $F(-\infty) = 0$ i $F(\infty) = 1$. Prema Teoremu III.3.2 postoji vjerojatnosni prostor i slučajna varijabla X koja će imati funkciju distribucije F. Osim toga, X je diskretna slučajna varijabla. Dakle, za kreiranje diskretnih slučajnih varijabli trebaju nam samo dva sastojka: prebrojiv skup $(x_i, i \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$ i niz $(p_i, i \in \mathbb{N})$ takav da vrijedi (III.3.3).

III.3.2.2 Neprekidne slučajne varijable

Definicija III.3.3 Kažemo da je slučajna varijabla X s funkcijom distribucije F **apsolutno neprekidna** (ili kraće **neprekidna**) ako postoji Borelova funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{III.3.4}$$

Funkciju f nazivamo **funkcija gustoće** (ili kraće gustoća) od X, odnosno od F.

Kada treba naglasiti slučajnu varijablu kojoj funkcija gustoće pripada, pisat ćemo f_X. Može se pokazati da je funkcija gustoće jedinstvena do na skup Lebesgueove mjere 0 (vidi Problem III.12).

Propozicija III.3.3 Borelova funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcija gustoće neke slučajne varijable ako i samo ako vrijedi

(i) $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ (nenegativnost),

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ (normiranost).

Dokaz. Ako je f gustoća, (ii) slijedi iz (III.3.4), dok (i) slijedi jer mora biti $f \geq 0$ skoro svuda u odnosu na Lebesgueovu mjeru. Kako je gustoća jedinstvena do na skup Lebesgueove mjere 0, možemo uzeti $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Obratno, ako f zadovoljava (i) i (ii), onda (III.3.4) definira vjerojatnosnu funkciju distribucije, odnosno neopadajuću, zdesna neprekidnu funkciju za koju je $F(-\infty) = 0$ i $F(\infty) = 1$ pa po Teoremu III.3.2 postoji vjerojatnosni prostor i slučajna varijabla X koja će imati funkciju distribucije F i biti apsolutno neprekidna jer F zadovoljava (III.3.4). ■

Dakle, neprekidne distribucije, odnosno slučajne varijable, jednostavno dobijemo tako da zadamo Borelovu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je nenegativna i normirana.

Napomena III.3.4 Integral u (III.3.4) je Lebesgueov integral. Ako je Riemmanov integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ konačan, onda je f neprekidna skoro svuda na $\mathbb{R}$ (u smislu Lebesgueove mjere). Osim toga, f je onda i Lebesgue integrabilna i dva integrala su jednaka. U gotovo svim slučajevima od interesa to je ispunjeno tako da ćemo prešutno pretpostavljati da za neprekidnu slučajnu varijablu (III.3.4) vrijedi uz Riemmanov integral te da je posljedično f neprekidna skoro svuda.

Napomena III.3.5 Pojam apsolutna neprekidnost dolazi iz teorije mjere. Mjera ν je apsolutno neprekidna u odnosu na mjeru μ na istom izmjerivom prostoru ako za svaki izmjeriv skup A, $\mu(A) = 0$ povlači da je $\nu(A) = 0$. To označavamo kao $\nu \ll \mu$.

Distribucija neprekidne slučajne varijable P_X je apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu mjeru. Radon-Nikodymov teorem garantira da ako je $\nu \ll \mu$ i obje su σ-konačne, onda postoji izmjeriva funkcija f takva da je

$$\nu(A) = \int_A f d\mu,$$

za svaki izmjerivi skup A. Često se f označava s $\frac{d\nu}{d\mu}$ i naziva Radon-Nikodymova derivacija. U našem slučaju to je gustoća neprekidne distribucije. Za više detalja vidjeti primjerice [3, 8].

Za neprekidnu slučajnu varijablu X s funkcijom gustoće f i proizvoljan Borelov skup $B \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi

$$P(X \in B) = \int_B f(t)dt.$$

To znači da je distribucija neprekidne slučajne varijable u potpunosti opisana njezinom funkcijom gustoće.

Ako znamo funkciju gustoće neprekidne slučajne varijable, onda funkciju distribucije možemo dobiti iz (III.3.4). Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable je uvijek neprekidna funkcija pa je za neprekidnu slučajnu varijablu uvijek

$$P(X = x) = F(x) - F(x-) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

te za svaki $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, vrijedi

$$P(X \in (a,b]) = P(X \in [a,b]) = P(X \in [a,b)) = P(X \in (a,b)) = \int_a^b f(t)dt.$$

Osim toga, ako je F funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable, onda je ona diferencijabilna skoro svuda i vrijedi

$$F'(x) = f(x),$$

za sve x u kojima je f neprekidna, odnosno svuda osim na skupu Lebesgueove mjere nula. Skup $\operatorname{supp} X = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ nazivamo **nosač** distribucije, a radi se ujedno i o nosaču funkcije gustoće.

Napomena III.3.6 Osim diskretnih i neprekidnih distribucija, postoje i **singularne distribucije**, odnosno funkcije distribucije F takve da je F neprekidna, nije konstanta i $F'(x) = 0$ skoro svuda na $\mathbb{R}$. Jedan takav primjer je Cantorova distribucija (vidi Problem III.13). Može se pokazati da se svaka funkcija distribucije može prikazati kao linearna kombinacija diskretne, neprekidne i singularne funkcije distribucije (vidi primjerice [3, 5]).

III.3.3 Primjeri diskretnih distribucija

III.3.3.1 Degenerirana distribucija

Za funkciju distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geq c, \end{cases}$$

kažemo da je **degenerirana** u točki $c \in \mathbb{R}$. Radi se o funkciji distribucije slučajne varijable X takve da je $X = c$ g.s. Uočimo da je mjera inducirana s X

$$P_X(B) = P(X \in B) = \delta_c(B),$$

Diracova delta mjera koncentrirana u c.

III.3.3.2 Diskretna uniformna distribucija

Diskretna uniformna distribucija za nosač ima skup $\{a, a+1, \dots, b\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, a vjerojatnosti su sve jednake $p_i = 1/(b-a+1)$.

III.3.3.3 Bernoullijeva distribucija

Bernoullijeva distribucija može se zapisati tablicom distribucije

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

gdje je $p \in (0,1)$. Realizaciju 1 obično nazivamo uspjehom, a 0 neuspjehom. Koristi se kao model za svaki pokus koji može imati samo dva ishoda (Bernoullijev pokus).

III.3.3.4 Binomna distribucija

Binomna distribucija s parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in (0,1)$ može se definirati diskretnom funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & \text{ako je } x \in \{0, 1, \dots, n\}, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Nosač distribucije je skup $\{0, 1, \dots, n\}$. Vjerojatnosti $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ možemo intepretirati kao vjerojatnost k uspjeha u n ponavljanja Bernoullijevog pokusa u kojem je vjerojatnost uspjeha p. Ako X ima binomnu distribuciju, onda pišemo $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

III.3.3.5 Poissonova distribucija

Nosač **Poissonove distribucije** s parametrom $\lambda > 0$ je $\mathbb{N}_0$, a vjerojatnosti su dane s

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Poissonova distribucija može poslužiti kao model za broj realizacija nekog događaja u nekom vremenskom intervalu i obično se označava s $\mathscr{P}(\lambda)$.

III.3.4 Primjeri neprekidnih distribucija

III.3.4.1 Uniformna distribucija

Uniformna distribucija na intervalu (a, b), u oznaci $\mathscr{U}(a, b)$, zadana je gustoćom

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija distribucije je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}(x-a), & a \le x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$

III.3.4.2 Normalna (Gaussova) distribucija

Normalna distribucija s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, u oznaci $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$, zadana je gustoćom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $\mathscr{N}(0,1)$ nazivamo **standardna normalna distribucija**. Funkcija distribucije ne može se izraziti elementarnim funkcijama i njene vrijednosti moraju se numerički aproksimirati. U ostatku knjige ćemo u puno prilika vidjeti važnost normalne distribucije.

III.3.4.3 Eksponencijalna distribucija

Eksponencijalna distribucija $\mathscr{E}(\lambda)$ s parametrom $\lambda > 0$ ima gustoću

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

dok je funkcija distribucije

$$F(x) = (1-e^{-\lambda x})\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Uočimo da ako je $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, onda je $X > 0$ g.s.

III.3.4.4 Studentova distribucija

Studentova (t) distribucija $\mathscr{T}_\nu$ s parametrom $\nu > 0$, poznatim kao broj stupnjeva slobode, ima funkciju gustoće

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje je Γ gama funkcija

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx, \quad t > 0.$$

Funkcija distribucije općenito se ne može izraziti elementarnim funkcijama. Općenitije se može definirati Studentova distribucija s dodatna dva parametra $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, gustoćom

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{1}{\nu}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Uočimo da je $f_{\mu,1}(x) = f(x-\mu)$ i $f_{0,\sigma}(x) = f(x/\sigma)/\sigma$. Parametri koji zadovoljavaju ova svojstva nazivaju se redom **parametar pomaka** i **parametar skaliranja**.

III.3.5 Računanje s distribucijama

Prije nego što krenemo s primjerima, ponovimo osnovne identitete za računanje vjerojatnosti vezanih uz slučajnu varijablu. Neka je X slučajna varijabla s distribucijom P_X. P_X je mjera na $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ definirana s $P_X(B) = P(X \in B)$. Funkciju distribucije od X definiramo za $x \in \mathbb{R}$ kao

$$F(x) = P(X \le x),$$

te je možemo zapisati i kao integral u odnosu na mjeru P_X

$$F(x) = P_X((-\infty,x]) = \int \mathbf{1}_{(-\infty,x]}dP_X = \int_{-\infty}^x dP_X.$$

Mjera P_X je u potpunosti određena s F u smislu Teorema III.3.2. Kao što smo rekli u poglavlju II.3, integrale u odnosu na Lebesgue-Stieltjesovu mjeru generiranu s F još označavamo kao

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dF(t).$$

Općenitije, za bilo koji Borelov skup B vrijedi

$$P(X \in B) = \int_B dP_X = \int_B dF(x).$$

Kako računati takve vjerojatnosti, ovisi o tome kakvog je tipa X.

- Ako je X diskretna, onda je
$$P(X \in B) = \sum_{\{i:x_i \in B\}} p_i.$$
Zaista, ako je X diskretna, onda je $P_X = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i \delta_{x_i}$, gdje je δ_{x_i} Diracova delta mjera u x_i.
- Ako je X neprekidna, onda ima gustoću i
$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

Objekti kojima možemo opisati distribuciju slučajne varijable su
- za diskretnu slučajnu varijablu:
  - funkcija distribucije,
  - diskretna funkcija gustoće,
  - tablica distribucije,
- za neprekidnu slučajnu varijablu:
  - funkcija distribucije,
  - funkcija gustoće.

Svaki od njih jedinstveno određuje distribuciju i na osnovu svakog od njih možemo doći do ostalih.

Zadatak III.3.6 Izračunajte:
(a) vjerojatnost da $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ bude pozitivna,
(b) vjerojatnost da u 10 bacanja pravilne kockice padne neparan broj šestica,
(c) $P(|X-\mu| \leq k\sigma)$, $k=1,2,3$, za $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$,
(d) $P(X \in \mathbb{Q})$ za neprekidnu slučajnu varijablu X,
(e) $P(|X| > x)$, $x > 0$, za slučajnu varijablu X s funkcijom distribucije F.

■

Zadatak III.3.7 Ako je F funkcija distribucije od X i F neprekidna funkcija, odredite distribuciju slučajne varijable $Y = F(X)$. ■

Zadatak III.3.8 Je li formulom
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5x + 0.5, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$
zadana funkcija distribucije neprekidne distribucije? O kakvoj distribuciji se radi? ■

Zadatak III.3.9 Može li funkcija
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$
biti funkcija distribucije neke slučajne varijable? ■

Zadatak III.3.10 **Paretova distribucija** s parametrima $x_m > 0$ i $\alpha > 0$ je neprekidna distribucija s funkcijom distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_m, \\ 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^{\alpha}, & x \geq x_m. \end{cases}$$

(a) Odredite funkciju gustoće.
(b) Pokažite da je x_m parametar skaliranja.
(c) Izračunajte inverz F^{-1} od restrikcije od F na $[x_m, \infty)$. Ako je F distribucija osobnog bogatstva pojedinca, interpretirajte $F^{-1}(p)$ za $p \in (0,1)$.
(d) Pretpostavite da je $\alpha > 1$ i izračunajte $\int_0^t F^{-1}(p)dp$ za $t \in (0,1)$ i posebno $\mu = \int_0^1 F^{-1}(p)dp$. Interpretirajte što predstavljaju te vrijednosti u kontekstu osobnog bogatstva.
(e) Funkcija $L : [0,1] \to [0,1]$ definirana s

$$L(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t F^{-1}(p)dp$$

naziva se Lorenzova krivulja. Izračunajte $L(0.8)$ i $L(0.99)$ ako je $\alpha = \log_4 5$ i $x_m = 1$.
(f) Izračunajte

$$B = \int_0^1 L(t)dt.$$

Vrijednost $1 - 2B$ poznata je i kao Gini koeficijent ili indeks. ■

Zadatak III.3.11 Pokažite da za gustoće Studentove i standardne normalne distribucije, za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{\nu \to \infty} f_{\mathcal{T}_\nu}(x) = f_{\mathcal{N}(0,1)}(x).$$

■

Zadatak III.3.12 Odredite a tako da

$$f(x) = a\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

bude funkcija gustoće. Odredite odgovarajuću funkciju distribucije. Ova distribucija poznata je kao **Cauchyjeva distribucija**. Usporedite s $\mathcal{T}(1)$ distribucijom. ■

Zadatak III.3.13 Neka je $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $Y = -X$. Pokažite da X i Y imaju istu distribuciju, $X \stackrel{d}{=} Y$, ali $X \neq Y$ g.s. ■

Zadatak III.3.14 Koristeći Fubinijev teorem pokažite da za funkciju distribucije F i $a > 0$ vrijedi $\int_{-\infty}^{\infty}(F(x+a) - F(x))dx = a$. ■

Zadatak III.3.15 Iz kutije s kuglicama numeriranim brojevima od 1 do 7 izvlače se tri kuglice bez vraćanja. Ako je X najveći izvučeni broj, odredite tablicu distribucije i funkciju distribucije od X. ■

Zadatak III.3.16 Vrijeme u satima proteklo između poziva službi za korisnike modelirano je distribucijom s funkcijom gustoće

$$f(x) = \frac{k}{(1+x)^3}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Odredite konstantu k te funkciju distribucije. Kolika je vjerojatnost da se na sljedeći poziv čeka dulje od pola sata? Kolika je vjerojatnost da je čekanje između 20 i 40 minuta? ■

III.4. Distribucije slučajnih vektora

Pojmovi i rezultati prethodne cjeline prenose se i na višedimenzionalni slučaj. Ako je $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ slučajni vektor, onda

$$P_{\boldsymbol{X}}(B) = P(\boldsymbol{X} \in B), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),$$

definira vjerojatnost na $\mathbb{R}^d$. Prostor $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), P_{\boldsymbol{X}})$ nazivamo **vjerojatnosni prostor induciran slučajnim vektorom $\boldsymbol{X}$**, a $P_{\boldsymbol{X}}$ nazivamo **vjerojatnost inducirana slučajnim vektorom X** ili **distribucijom** slučajnog vektora X.

Funkcija distribucije slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ je funkcija $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ zadana s

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(x_1, \ldots, x_d) = P(\boldsymbol{X} \le \boldsymbol{x}) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_d \le x_d), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Isto kao u Teoremu III.3.1 pokaže se da

(i) $\boldsymbol{F}$ je neopadajuća, u smislu da za $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}$, što označava $x_i \le y_i$, $i = 1, \ldots, d$, vrijedi $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$,

(ii) $\boldsymbol{F}$ je zdesna neprekidna, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) \downarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ kada $\boldsymbol{y} \downarrow \boldsymbol{x}$ ($y_i \downarrow x_i$, $i = 1, \ldots, d$),

(iii) ako za barem jedan $i \in \{1, \ldots, d\}$, $x_i \to -\infty$, onda

$$\boldsymbol{F}(x_1, \ldots, x_d) \to 0, \tag{III.4.1}$$

(iv) ako za sve $i \in \{1, \ldots, d\}$, $x_i \to \infty$, onda

$$\boldsymbol{F}(x_1, \ldots, x_d) \to 1. \tag{III.4.2}$$

Za razliku od jednodimenzionalnog slučaja, prethodna svojstva nisu dovoljna za definiranje mjere na $\mathbb{R}^d$. Treba primijetiti da funkcija distribucije slučajnog vektora ima još jedno svojstvo. Neka je $d = 2$ i $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$. Tada je

$$\begin{aligned}
&P(\boldsymbol{X} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = P(a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2) \\
&= P(X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2) - P(X_1 \le a_1, a_2 < X_2 \le b_2) \\
&= P(X_1 \le b_1, X_2 \le b_2) - P(X_1 \le b_1, X_2 \le a_2) - (P(X_1 \le a_1, X_2 \le b_2) - P(X_1 \le a_1, X_2 \le a_2)) \\
&= \boldsymbol{F}(b_1, b_2) - \boldsymbol{F}(b_1, a_2) - (\boldsymbol{F}(a_1, b_2) - \boldsymbol{F}(a_1, a_2)),
\end{aligned}$$

što možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\Delta_{b_1-a_1}\Delta_{b_2-a_2}\boldsymbol{F}(a_1,b_1) &= \Delta_{b_1-a_1}(\boldsymbol{F}(a_1,b_2)-\boldsymbol{F}(a_1,a_2)) \\ &= \boldsymbol{F}(b_1,b_2)-\boldsymbol{F}(b_1,a_2)-(\boldsymbol{F}(a_1,b_2)-\boldsymbol{F}(a_1,a_2)) \geq 0,\end{aligned}$$

gdje Δ označava konačne diferencije definirane za funkciju $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ s

$$\Delta_{b_i-a_i}g(a_1,\dots,a_d) = g(a_1,\dots,a_{i-1},b_i,a_{i+1},\dots,a_d)-g(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_d).$$

Slično vrijedi i općenito za proizvoljne $\boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^d$

$$\Delta_{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = \Delta_{b_1-a_1}\Delta_{b_2-a_2}\cdots\Delta_{b_d-a_d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})\geq 0. \tag{III.4.3}$$

Svojstvo (III.4.3) ključno je za definiranje vjerojatnosti na osnovu funkcija distribucija jer osigurava da će tako definirane vjerojatnosti zaista biti nenegativne. Svojstvo (III.4.3) implicira da je $\boldsymbol{F}$ neopadajuća po komponentama (vidi Problem III.19). Teorem III.3.2 ima sljedeći oblik u $\mathbb{R}^d$.

Teorem III.4.1 Ako je $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ zdesna neprekidna funkcija koja zadovoljava (III.4.1), (III.4.2) i (III.4.3), tada postoji jedinstvena vjerojatnost $P_{\boldsymbol{F}}$ na $(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ takva da je

$$P_{\boldsymbol{F}}((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]) = \Delta_{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}),\quad \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^d,\ \boldsymbol{a}\leq\boldsymbol{b}.$$

Ako je $\boldsymbol{X}$ slučajni vektor s funkcijom distribucije $\boldsymbol{F}$, onda je $P_{\boldsymbol{X}} = P_{\boldsymbol{F}}$.

Slično kao u slučaju $d=1$, za zadanu funkciju $\boldsymbol{F}$ koja zadovoljava (III.4.1), (III.4.2) i (III.4.3), postoji vjerojatnosni prostor i slučajni vektor na njemu čija je funkcija distribucije $\boldsymbol{F}$.

Distribucije slučajnih varijabli X_i koje tvore slučajni vektor $\boldsymbol{X}=(X_1,\dots,X_d)$ nazivaju se **marginalne distribucije**.[1] Na osnovu poznate $\boldsymbol{F}$, do njih možemo doći koristeći

$$F_{X_i}(x) = \lim_{x_1\to\infty}\cdots\lim_{x_{i-1}\to\infty}\lim_{x_{i+1}\to\infty}\cdots\lim_{x_d\to\infty}\boldsymbol{F}(x_1,\dots,x_d).$$

Distribucija slučajnog vektora još se naziva i **zajednička distribucija** slučajnih varijabli $X_1,\dots,X_d$. I distribucije slučajnih vektora sastavljenih od komponenti od $\boldsymbol{X}$ nazivaju se marginalne distribucije.

III.4.1 Diskretan slučajni vektor

Analogno jednodimenzionalnom slučaju, kažemo da je slučajni vektor **diskretan** ako postoji prebrojiv skup $D\subset\mathbb{R}$ takav da je $P(\boldsymbol{X}\in D)=1$. Distribucija diskretnog slučajnog vektora u potpunosti je određena vjerojatnostima

$$p^{(i)} = P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}^{(i)}) = P(X_1=x_1^{(i)},\dots,X_d=x_d^{(i)}),$$

gdje je $D=\{\boldsymbol{x}^{(i)}:i\in\mathbb{N}\}$. Za $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$, $P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})$ je vjerojatnost presjeka događaja $\{X_j=x_j\}$, $j=1,\dots,d$, odnosno vjerojatnost da je istovremeno $X_1=x_1,\dots,X_d=x_d$. Slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ je diskretan ako i samo ako su sve $X_1,\dots,X_d$ diskretne slučajne varijable.

Kad je $d=2$, distribucija se može pregledno zapisati pomoću tablice. Neka je $\{x_1^{(1)},\dots,x_1^{(n)}\}$ nosač od X_1 i $\{x_2^{(1)},\dots,x_2^{(m)}\}$ nosač od X_2. Distribucija od $\boldsymbol{X}$ u potpunosti je određena sljedećom tablicom.

[1] Naziv dolazi iz diskretnog dvodimenzionalnog slučaja kada se te distribucije zapisuju na marginama tablice distribucije.

$X_1 \setminus X_2$	$x_2^{(1)}$	$\cdots$	$x_2^{(m)}$	
$x_1^{(1)}$	$P\left(X_1 = x_1^{(1)}, X_2 = x_2^{(1)}\right)$	$\cdots$	$P\left(X_1 = x_1^{(1)}, X_2 = x_2^{(m)}\right)$	$P\left(X_1 = x_1^{(1)}\right)$
$x_1^{(2)}$	$P\left(X_1 = x_1^{(2)}, X_2 = x_2^{(1)}\right)$	$\cdots$	$P\left(X_1 = x_1^{(2)}, X_2 = x_2^{(m)}\right)$	$P\left(X_1 = x_1^{(2)}\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_1^{(n)}$	$P\left(X_1 = x_1^{(n)}, X_2 = x_2^{(1)}\right)$	$\cdots$	$P\left(X_1 = x_1^{(n)}, X_2 = x_2^{(m)}\right)$	$P\left(X_1 = x_1^{(n)}\right)$
	$P\left(X_2 = x_2^{(1)}\right)$	$\cdots$	$P\left(X_2 = x_2^{(m)}\right)$	1

Zbrajanjem po retcima i po stupcima dolazimo do marginalnih distribucija slučajnih varijabli X_1 i X_2

$$X_1 \sim \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ P\left(X_1 = x_1^{(1)}\right) & \ldots & P\left(X_1 = x_1^{(m)}\right) \end{pmatrix}, \quad X_2 \sim \begin{pmatrix} x_2^{(1)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ P\left(X_2 = x_2^{(1)}\right) & \ldots & P\left(X_2 = x_2^{(n)}\right), \end{pmatrix}$$

jer je

$$P\left(X_1 = x_1^{(i)}\right) = \sum_{j=1}^{m} P\left(X_1 = x_1^{(i)}, X_2 = x_2^{(j)}\right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

i

$$P\left(X_2 = x_2^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(X_1 = x_1^{(i)}, X_2 = x_2^{(j)}\right), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Distribuciju slučajnog vektora možemo opisati i diskretnom funkcijom gustoće

$$f(x_1, \ldots, x_d) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d), \quad (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Marginalne diskretne gustoće možemo dobiti zbrajanjem po odgovarajućim komponentama

$$f_{X_i}(x_i) = \sum_{x_1 \in \operatorname{supp} X_1} \cdots \sum_{x_{i-1} \in \operatorname{supp} X_{i-1}} \sum_{x_{i+1} \in \operatorname{supp} X_{i+1}} \cdots \sum_{x_d \in \operatorname{supp} X_d} f(x_1, \ldots, x_d), \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

■ **Primjer III.4.1** Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p_1, \ldots, p_d \geq 0$, $\sum_{i=1}^{d} p_i = 1$. Slučajni vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ ima **multinomnu (polinomijalnu) distribuciju** s parametrima $n, p_1, \ldots, p_d$ ako je

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \cdots x_d!} p_1^{x_1} \cdots p_d^{x_d}, & \text{za } x_1, \ldots, x_d \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ takve da je } \sum_{i=1}^{d} x_i = n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$X_1, \ldots, X_d$ modeliraju redom broj događaja $A_1, \ldots, A_d$ u n nezavisnih ponavljanja pokusa s d mogućih ishoda $A_1, \ldots, A_d$ koji su disjunktni i $P(A_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Zadatak III.4.1 Iz špila od 52 karte izvlačimo 8 karata s vraćanjem. Kolika je vjerojatnost da smo od svake boje izvukli točno dvije karte? ■

Zadatak III.4.2 Odredite jednodimenzionalnu marginalnu distribuciju multinomnog slučajnog vektora s parametrima n, $p_1, \ldots, p_d$. ■

Zadatak III.4.3 Iz špila od 52 karte na slučajan način izvlačimo dvije karte bez vraćanja. Neka je X broj izvučenih hercova i Y broj izvučenih crnih karata. Odredite distribuciju slučajnog vektora (X,Y) i marginalne distribucije. ■

III.4.2 Neprekidan slučajni vektor

Slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ je **(apsolutno) neprekidan** ako postoji nenegativna Borelova funkcija $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ takva da je

$$\boldsymbol{F}(x_1,\dots,x_d)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_d}f(t_1,\dots,t_d)dt_1\cdots dt_d,\quad \boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d.$$

Funkciju f nazivamo **gustoća slučajnog vektora** i za nju vrijede svojstva analogna jednodimenzionalnom slučaju. Posebno, i slučajne varijable $X_1,\dots,X_d$ su neprekidne i do njihovih gustoća možemo doći pomoću

$$f_{X_i}(x_i)=\int_{t_1=-\infty}^{\infty}\cdots\int_{t_{i-1}=-\infty}^{\infty}\int_{t_{i+1}=-\infty}^{\infty}\cdots\int_{t_d=-\infty}^{\infty}f(t_1,\dots,t_{i-1},x_i,t_{i+1},\dots,t_d)dt_1\cdots dt_d,\quad x_i\in\mathbb{R}.$$

Do marginalnih funkcija distribucije dolazimo slično

$$F_{X_i}(x_i)=\int_{t_1=-\infty}^{\infty}\cdots\int_{t_{i-1}=-\infty}^{\infty}\int_{t_i=-\infty}^{x_i}\int_{t_{i+1}=-\infty}^{\infty}\cdots\int_{t_d=-\infty}^{\infty}f(t_1,\dots,t_d)dt_1\cdots dt_d,\quad x_i\in\mathbb{R}.$$

Ako znamo funkciju distribucije, tada do gustoće možemo doći korištenjem relacije

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{\partial^d F}{\partial x_1\cdots\partial x_d}(\boldsymbol{x}).$$

■ **Primjer III.4.2** Neka je $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^d$ i $\Sigma\in\mathbb{R}^{d\times d}$ simetrična pozitivno definitna matrica ($\boldsymbol{x}^T\Sigma\boldsymbol{x}>0$ za sve $\boldsymbol{x}\neq 0$). Slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ ima **d-dimenzionalnu normalnu distribuciju** ako ima gustoću

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d\det\Sigma}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d.$$

Pišemo $\boldsymbol{X}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$. Ako je $\mu=\boldsymbol{0}$ i $\Sigma=I$, onda kažemo da $\boldsymbol{X}$ ima standardnu normalnu distribuciju.

Zadatak III.4.4 Neka je $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2)^T\in\mathbb{R}^2$ i

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix},$$

gdje je $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$ i $\rho\in(-1,1)$.

(a) Izrazite gustoću slučajnog vektora $\boldsymbol{X}\sim\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ koristeći $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ i ρ.

(b) Pokažite da $X_1\sim\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ i $X_2\sim\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$.

■

Zadatak III.4.5 Neka je (X,Y) neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f(x,y)=4xy\mathbf{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x,y).$$

(a) Provjerite da je f zaista funkcija gustoće.

(b) Odredite funkciju distribucije od (X,Y).

(c) Izračunajte vjerojatnost da prosjek od X i Y bude manji od $1/2$.

■

Zadatak III.4.6 Neka je (X,Y) neprekidan slučajni vektor s funkcijom distribucije

$$F(x,y) = (1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y})\mathbf{1}_{[0,\infty)\times[0,\infty)}(x,y).$$

(a) Odredite marginalne funkcije distribucija.
(b) Odredite funkciju gustoće i marginalne funkcije gustoća.
(c) Izračunajte $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1)$ i $P(1 < X \leq 2, 0 < Y \leq 1)$.

■

Zadatak III.4.7 Neka je (X,Y) neprekidan slučajni vektor s gustoćom

$$f(x,y) = -\cos x \sin y \mathbf{1}_{[0,\pi/2]\times[-\pi/2,0]}(x,y).$$

(a) Odredite funkciju distribucije.
(b) Odredite marginalne funkcije distribucija.
(c) Odredite marginalne funkcije gustoća.

■

Zadatak III.4.8 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P) = ((0,1), \mathscr{B}((0,1)), \lambda)$, λ Lebesgueova mjera i $X(\omega) = \mathbf{1}_{(1/2,1)}(\omega)$, $Y(\omega) = \omega$.
(a) Odredite funkciju distribucije od X, Y i (X,Y).
(b) Je li X neprekidna slučajna varijabla? Je li (X,Y) neprekidan slučajni vektor?

■

Zadatak III.4.9 Neka (X,Y) ima uniformnu distribuciju na $[-1,1]\times[-1,1]$.
(a) Izračunajte vjerojatnost da su i X i Y negativni.
(b) Izračunajte vjerojatnost da je prosjek od X i Y pozitivan.
(c) Izračunajte vjerojatnost da je barem jedan od X i Y veći od $1/2$.

■

Zadaci za vježbu

Problem III.1 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ prostor mjere i $0 < \mu(\Omega) < \infty$. Pokažite da je s $\widetilde{\mu}(A) = \mu(A)/\mu(\Omega)$, $A \in \mathscr{F}$, definirana vjerojatnost na $\mathscr{F}$.

Problem III.2 Za koje događaje vrijede sljedeće relacije:
(a) $A \cup B = A$,
(b) $A \cap B = A$,
(c) $A \cup B = A \cap B$,
(d) $A \cup B = A^c$,
(e) $A \cap B = A^c$.

Problem III.3 Ako događaj A označava da je slučajno izabrani broj paran, a B da taj broj završava nulom, što predstavljaju događaji A^c, B^c, $A \setminus B$, $A \cup B$, $A \cap B^c$?

Problem III.4 Ako je $P(A) = p_1$, $P(B) = p_2$ i $P(A \cup B) = p_3$, izračunajte $P(A \setminus B)$, $P(A \cap B)$, $P(A^c \cap B^c)$ i $P(B \setminus A)$.

Problem III.5 Ako je $P(A) = P(B) = 1/2$ i $P(A \setminus B) = 1/4$, izračunajte $P(A^c \cap B^c)$, $P(A \cap B)$ i $P(B \setminus A)$.

Problem III.6 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ potpun vjerojatnosni prostor. Pokažite da ako je $A \in \mathscr{F}$, $A \triangle B \in \mathscr{F}$ i $P(A \triangle B) = 0$, onda je i $B \in \mathscr{F}$.

Problem III.7 Neka je $\mathscr{A}$ konačna particija od Ω, odnosno $\mathscr{A} = \{A_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$ i $A_i \cap A_j = 0$ za $i \neq j$, te neka je $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$. Pokažite da je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla ako i samo ako je konstanta na svim elementima A_i particije $\mathscr{A}$.

Problem III.8 Pokažite da je limes g.s. jedinstven do na jednakost g.s., odnosno ako $X_n \to X$ g.s. i $X_n \to Y$ g.s., tada je $X = Y$ g.s. Zaključite da u (III.2.2) umjesto nula može biti bilo koji drugi realan broj ili $\infty, -\infty$. Pokažite da je s (III.2.2) definirana slučajna varijabla.

Problem III.9 Neka su X i Y slučajne varijable na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ i $A \in \mathscr{F}$. Pokažite da je

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \text{ako je } \omega \in A, \\ Y(\omega), & \text{ako je } \omega \in A^c, \end{cases}$$

slučajna varijabla.

Problem III.10 Ako su X i Y slučajne varijable i $\varepsilon > 0$, pokažite da je

$$P(|X+Y| > \varepsilon) \leq P(|X| > \varepsilon/2) + P(|Y| > \varepsilon/2).$$

Problem III.11 — *. Neka je F funkcija distribucije. Pokažite da slučajna varijabla

$$X(\omega) = \sup\{y : F(y) < \omega\}$$

na vjerojatnosnom prostoru $((0,1), \mathscr{B}((0,1)), \lambda)$ ima funkciju distribucije F, pri čemu je λ Lebesgueova mjera.

Problem III.12 Neka je f funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable X i g druga funkcija koja zadovoljava $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$. Pokažite da je tada $f = g$ g.s. (uputa: iskoristite [8, Propozicija 10.4]).

Problem III.13 — *. Cantorov skup konstruira se na intervalu $[0,1]$ tako da se u svakom koraku uklanja srednja trećina svakom podintervala prethodnog skupa. Preciznije, neka je $C_0 = [0,1]$, $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, $C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$ itd. Cantorov skup je $C = \cap_{i=0}^{\infty} C_i$ i Cantorova funkcija distribucije F je funkcija distribucije uniformne distribucije na skupu C.[2]

(a) Pokažite da je C Borelov skup i da je $\lambda(B) = 0$. Može se pokazati da je Cantorov skup neprebrojiv.
(b) Pokažite da je F neprekidna.
(c) Pokažite da je $F'(x) = 0$ skoro svuda.
(d) Zaključite da je F singularna te da ne postoji f tako da vrijedi (III.3.4).

Problem III.14 Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P) = ((0,1), \mathscr{B}((0,1)), \lambda)$, λ Lebesgueova mjera, definirane su funkcije

$$X(\omega) = \mathbf{1}_{(0,1/3)}(\omega) + 2 \cdot \mathbf{1}_{(1/3,2/3)}(\omega), \quad Y(\omega) = \omega^2.$$

(a) Jesu li X i Y slučajne varijable?
(b) Odredite distribucije od X i Y te za svaku odgovorite radi li se o diskretnoj ili neprekidnoj slučajnoj varijabli.

Problem III.15 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P) = ((0,1), \mathscr{B}((0,1)), \lambda)$, λ Lebesgueova mjera i $X(\omega) = (-\ln(1-\omega))^{1/\beta}$.

(a) Odredite funkciju distribucije od X.
(b) Je li X neprekidna slučajna varijabla?

Problem III.16 Slučajna varijabla X ima funkciju gustoće

$$f(x) = ax^2 e^{-bx} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \quad b > 0.$$

Odredite a i izračunajte $P(X < 1)$.

Problem III.17 Neka je X slučajna varijabla sa simetričnom distribucijom, odnosno $X \stackrel{d}{=} -X$, te neka je $Y = -X$ i $Z = Y$. Pokažite da je tada $X \stackrel{d}{=} Y$, ali $XZ \stackrel{d}{\neq} YZ$.

Problem III.18 Neka su $X_1 = X_2$ apsolutno neprekidne slučajne varijable. Pokažite da slučajni vektor (X_1, X_2) nije apsolutno neprekidan.

Problem III.19 (a) Pokažite da ako vrijedi (III.4.1) i (III.4.3), tada je $\boldsymbol{F}$ neopadajuća po komponentama.
(b) Za funkciju

$$\boldsymbol{F}(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x_1 < 0 \text{ ili } x_2 < 0 \text{ ili } x_1 + x_2 < 1, \\ 1, & \text{inače,} \end{cases}$$

[2] U engleskoj literaturi poznata i kao *Devil's staircase*.

pokažite da je neopadajuća po komponentama i izračunajte $\Delta_{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ za $\boldsymbol{a} = (1/3, 1/3)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1)$. Zaključite da (III.4.3) ne vrijedi.

Problem III.20 Neka je (X_1, X_2) neprekidan slučajni vektor s gustoćom

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 2x_1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite F_{X_1} i F_{X_2}.

Problem III.21 Neka je f funkcija gustoće neke pozitivne slučajne varijable. Pokažite da je s

$$g(x,y) = \frac{f(x+y)}{x+y} \mathbf{1}_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(x,y)$$

definirana gustoća nekog slučajnog vektora.

Problem III.22 Neka je distribucija slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ zadana gustoćom

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2\right)\right\}, & x_1 x_2 \geq 0, \\ 0, & x_1 x_2 < 0. \end{cases}$$

Pokažite da je $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ iako $\boldsymbol{X}$ nije normalan slučajni vektor.

Problem III.23 Pravilna kockica bačena je 12 puta. Neka X_i broji koliko se puta okrenuo broj i, $i = 1, \ldots, 6$. Izračunajte vjerojatnosti:
(a) $P(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 4, X_6 = 2)$,
(b) $P(X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6)$,
(c) $P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4)$.

Problem III.24 — *. Slučajan vektor (X,Y) ima dvodimenzionalnu Poissonovu distribuciju ako je diskretna gustoća zadana s

$$P(X = x, Y = y) = e^{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3} \frac{\lambda_1^x}{x!} \frac{\lambda_2^y}{y!} \sum_{k=0}^{\min\{x,y\}} \binom{x}{k} \binom{y}{k} k! \frac{\lambda_3^k}{(\lambda_1\lambda_2)^k}.$$

Odredite marginalne distribucije od X i Y.

Problem III.25 Neka je (X,Y,Z) neprekidan slučajan vektor s gustoćom

$$f(x,y,z) = \begin{cases} c, & 0 < x < y < z < 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite konstantu c te marginalne distribucije od X i (X,Y).

Problem III.26 Posjed na potpuno ravnom terenu ima oblik pravokutnog trokuta s južnom granicom (kateta) duljine dva kilometra i istočnom granicom (kateta) duljine jedan kilometar. Koordinate točke na koju pada sjemenka javora nošena vjetrom modelirane su slučajnim vektorom (X,Y). Poznato je da (X,Y) ima uniformnu distribuciju nad posjedom. Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora (X,Y) te njegove marginalne funkcije gustoća.

Problem III.27 — *Formula parcijalne integracije. Neka su F i G dvije vjerojatnosne funkcije distribucije koje nemaju zajedničkih točaka prekida na intervalu $(a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$. Pokažite da je tada

$$\int_a^b G(x)dF(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)dG(x).$$

Zapišite tvrdnju u terminima gustoća za apsolutno neprekidne distribucije F i G.

Problem III.28 Neka (X,Y) ima uniformnu distribuciju na $(0,1)\times(0,1)$. Izračunajte za $x,y,z\in\mathbb{R}$

(a) $P(X\leq x, Y\leq y)$
(b) $P(|X-Y|\leq z)$,
(c) $P(XY\leq z)$,
(d) $P(\min\{X,Y\}\leq z)$,
(e) $P(\max\{X,Y\}\leq z)$,
(f) $P((X+Y)/2\leq z)$.

Problem III.29 Odredite gustoću slučajnog vektora (X,Y,Z) koji ima funkciju distribucije

$$F(x,y,z)=(1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz})\mathbf{1}_{(0,\infty)^3}(x,y,z).$$

Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće od (X,Y).

Problem III.30 Neka je (X,Y) slučajni vektor s gustoćom

$$f(x,y)=a\sin(x+y)\mathbf{1}_{(0,\frac{\pi}{2})\times(0,\frac{\pi}{2})}(x,y).$$

(a) Odredite a.
(b) Odredite funkciju distribucije i marginalne distribucije.
(c) Izračunajte $P(X<Y)$.

Problem III.31 Slučajni vektor (X,Y) ima funkciju distribucije

$$F(x,y)=c\frac{(x-2)(y-2)}{4xy}\mathbf{1}_{(2,\infty)\times(2,\infty)}(x,y).$$

(a) Odredite c.
(b) Izračunajte $P(X\leq 5)$. Odredite funkciju gustoće od X.
(c) Definirajte vjerojatnosni prostor i slučajnu varijablu Z na njemu tako da je $X\stackrel{d}{=}Z$.

Problem III.32 Ivan i Marko dogovorili su se naći u 10:30. Ivan će doći u trenutku X koji dolazi iz uniformne distribucije u vremenskom intervalu od 10:15 do 10:45. Marko će doći u trenutku Y koji dolazi iz uniformne distribucije u vremenskom intervalu od 10:00 do 11:00. Zajednička funkcija gustoće trenutaka njihovih dolazaka je $f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

(a) Kolika je vjerojatnost da Ivan dođe prije Marka?
(b) Kolika je vjerojatnost da onaj koji prvi dođe čeka dulje od 5 minuta?

IV Očekivanje i nezavisnost

IV.1. Očekivanje

Slično kao što slučajna varijabla sažima informacije o vjerojatnosnom prostoru, očekivanje sažima informacije o slučajnoj varijabli.

IV.1.1 Definicija i svojstva

Slučajna varijabla je izmjeriva realna funkcija na vjerojatnosnom prostoru, a njeno očekivanje je jednostavno integral te funkcije u odnosu na vjerojatnosnu mjeru.

Definicija IV.1.1 Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Matematičko očekivanje ili **očekivanje** slučajne varijable X je broj

$$\mathrm{E}X = \int X dP. \tag{IV.1.1}$$

U prethodnom se radi o Lebesgueovom integralu definiranom u Poglavlju II.3. Prednosti ovakve definicije očekivanja je što je teorijski pogodnija, pogotovo za primjerice ulazak limesa pod integral. Vidjet ćemo uskoro da se ovakva definicija svodi na poznate formule za očekivanje diskretnih i neprekidnih slučajnih varijabli.

Podsjetimo se da se do prethodne definicije integrala dolazi tako da najprije za jednostavne slučajne varijable $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ definiramo

$$\mathrm{E}X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i).$$

Zatim za nenegativne slučajne varijable $X \geq 0$ definiramo

$$\mathrm{E}X = \sup\{\mathrm{E}Y : Y \text{ jednostavna }, 0 \leq Y \leq X\}, \tag{IV.1.2}$$

što je ekvivalentno tome da za bilo koji niz jednostavnih slučajnih varijabli takvih da $X_n \uparrow X$ po točkama stavimo

$$\mathrm{E}X = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n.$$

Kažemo da očekivanje postoji ili da je definirano, ako je barem jedno od očekivanja $\mathrm{E}X^+ = \int X^+ dP$ ili $\mathrm{E}X^- = \int X^- dP$ konačno. U tom slučaju je

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}X^+ - \mathrm{E}X^-.$$

Očekivanje je **konačno** ako je $\mathrm{E}X^+ < \infty$ i $\mathrm{E}X^- < \infty$, što je ekvivalentno s $\mathrm{E}|X| = \mathrm{E}X^+ + \mathrm{E}X^- < \infty$. Često kažemo da je X **integrabilna**. Jednakost (IV.1.1) još zapisujemo i kao

$$\mathrm{E}X = \int_\Omega X dP = \int X(\omega) dP(\omega) = \int X(\omega) P(d\omega).$$

Iz svojstava integrala (Teorem II.3.5 i Zadatak II.3.2) slijede svojstva očekivanja.

Teorem IV.1.1 Ako su X i Y slučajne varijable takve da je $\mathrm{E}|X| < \infty$ i $\mathrm{E}|Y| < \infty$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, onda vrijedi
(i) $\mathrm{E}(\alpha X) = \alpha \mathrm{E}X$,
(ii) $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$,
(iii) ako je $X \le Y$, onda je $\mathrm{E}X \le \mathrm{E}Y$,
(iv) $|\mathrm{E}X| \le \mathrm{E}|X|$.

U prethodnom teoremu implicitno se tvrdi i da promatrana očekivanja postoje i konačna su. Primjerice, $\mathrm{E}|\alpha X| < \infty$ ako je $\mathrm{E}|X| < \infty$. Slično, ako je $\mathrm{E}|X| < \infty$ i $\mathrm{E}|Y| < \infty$, onda je

$$\mathrm{E}|X+Y| \le \mathrm{E}(|X| + |Y|) = \mathrm{E}|X| + \mathrm{E}|Y| < \infty.$$

Svojstva (i) i (ii) daju **linearnost** očekivanja, odnosno za integrabilne slučajne varijable $X_1, \dots, X_n$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{E}X_i.$$

Još se kaže da je očekivanje linearan funkcional, što donekle objašnjava čestu oznaku za očekivanje $\mathrm{E}[\cdot]$. Koristit ćemo obične zagrade i to samo kada to pomaže preglednosti.

Za izmjeriv skup A označavamo

$$\int_A X dP = \mathrm{E}(X\mathbf{1}_A)$$

i $\mathrm{E}(X\mathbf{1}_A)$ postoji ako postoji $\mathrm{E}X$ jer je $X\mathbf{1}_A \le X$. Posebno, $\mathrm{E}\mathbf{1}_A = P(A)$.

U sljedećoj propoziciji sadržana su i druga svojstva očekivanja, a vezana su uz odnose između slučajnih varijabli koji vrijede g.s.

Propozicija IV.1.2 Ako su X i Y slučajne varijable takve da je $\mathrm{E}|X| < \infty$ i $\mathrm{E}|Y| < \infty$, onda vrijedi sljedeće.
(i) Ako je $X = 0$ g.s., onda je $\mathrm{E}X = 0$.
(ii) Ako je $X = Y$ g.s., onda je $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$.
(iii) Ako je $X = c$ g.s., $c \in \mathbb{R}$, onda je $\mathrm{E}X = c$.
(iv) Ako je $X \le Y$ g.s., onda je $\mathrm{E}X \le \mathrm{E}Y$.
(v) Ako je $X \ge 0$ i $\mathrm{E}X = 0$, onda je $X = 0$ g.s.
(vi) Ako je $\mathrm{E}(X\mathbf{1}_A) \le \mathrm{E}(Y\mathbf{1}_A)$ za sve $A \in \mathscr{F}$, tada je $X \le Y$ g.s.
(vii) Ako je $\mathrm{E}(X\mathbf{1}_A) = \mathrm{E}(Y\mathbf{1}_A)$ za sve $A \in \mathscr{F}$, tada je $X = Y$ g.s.
(viii) $|X| < \infty$ g.s.

Dokaz. (i) Kao i brojne druge tvrdnje za očekivanje, odnosno integrale, i ova se dokazuje najprije za jednostavne slučajne varijable (funkcije), zatim nenegativne i na kraju općenito. Ako je X jednostavna slučajna varijabla, onda je $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \mathbf{1}_{A_i}$, pri čemu $\alpha_1 = 0$, $A_1 = \{X = 0\}$, $\alpha_2, \dots, \alpha_n \neq 0$ i $P(A_2) = \cdots = P(A_n) = 0$. Onda je

$$\mathrm{E}X = 0P(A_1) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i P(A_i) = 0.$$

Ako je $X \geq 0$, onda za svaku jednostavnu $Y \leq X$ je $Y = 0$ g.s. pa $\mathrm{E}Y = 0$ po prethodnom. Zbog (IV.1.2) je onda $\mathrm{E}X = 0$. Kako je $|X|$ nenegativna i $|X| = 0$ g.s., po prethodnom je $\mathrm{E}|X| = 0$. Zbog Teorema IV.1.1(iv) slijedi $\mathrm{E}X = 0$.

(ii) Slijedi iz (i) jer je $X - Y = 0$ g.s.

(iii) Slijedi iz (ii).

(iv) Stavimo li $A = \{X \leq Y\}$, tada je $X\mathbf{1}_A \leq Y\mathbf{1}_A$ pa onda i $\mathrm{E}(X\mathbf{1}_A) \leq \mathrm{E}(Y\mathbf{1}_A)$ po Teoremu IV.1.1(iii). Ali $X = X\mathbf{1}_A$ g.s. i $Y = Y\mathbf{1}_A$ g.s. pa je po (ii) $\mathrm{E}X = \mathrm{E}(X\mathbf{1}_A)$ i $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}(Y\mathbf{1}_A)$ iz čega slijedi tvrdnja.

(v) Za $A_n = \{X \geq 1/n\}$ imamo

$$\frac{1}{n}\mathbf{1}_{A_n} \leq X\mathbf{1}_{A_n} \leq X,$$

pa je

$$\frac{1}{n}P(A_n) \leq E(X\mathbf{1}_{A_n}) \leq \mathrm{E}X = 0,$$

stoga $P(X > 0) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

(vi) Stavimo li $B = \{X > Y\}$, onda je $Y\mathbf{1}_B \leq X\mathbf{1}_B$ pa je $\mathrm{E}(Y\mathbf{1}_B) \leq \mathrm{E}(X\mathbf{1}_B)$. Po pretpostavci je $\mathrm{E}(X\mathbf{1}_B) \leq \mathrm{E}(Y\mathbf{1}_B)$ pa onda $\mathrm{E}(X\mathbf{1}_B) = \mathrm{E}(Y\mathbf{1}_B)$, odnosno $\mathrm{E}((X - Y)\mathbf{1}_B) = 0$. Kako je $(X - Y)\mathbf{1}_B \geq 0$ g.s. zbog (v) mora biti $P(B) = 0$.

(vii) Slijedi iz (vi).

(viii) Ako bi bilo $P(A) > 0$ za $A = \{|X| = \infty\}$, onda je $\mathrm{E}|X| \geq \mathrm{E}(|X|\mathbf{1}_A) = \infty$. Dakle, mora biti $P(A) = 0$.

■

Primijetimo da je u (ii) dovoljno pretpostaviti da je $\mathrm{E}|X| < \infty$ iz čega slijedi da mora biti i $\mathrm{E}|Y| < \infty$. Zaista, ako stavimo $A = \{X \neq Y\} \in \mathscr{F}$, $P(A) = 0$, onda je $Y = Y\mathbf{1}_A + Y\mathbf{1}_{A^c} = Y\mathbf{1}_A + X\mathbf{1}_{A^c}$. Zbog (i) je $\mathrm{E}(Y\mathbf{1}_A) = 0$, a $\mathrm{E}|X\mathbf{1}_{A^c}| < \infty$ pa mora biti i $\mathrm{E}|Y| < \infty$.

Zadatak IV.1.1 Pokažite da ako je $X \leq c$ g.s., onda je $\mathrm{E}X \leq c$. ■

Zadatak IV.1.2 Pokažite primjerom da $\mathrm{E}X \leq \mathrm{E}Y$ općenito ne povlači da je $X \leq Y$ g.s. ■

IV.1.2 Očekivanje i limes

Osnovno pitanje ovog dijela je kada je limes očekivanja jednak očekivanju limesa, odnosno kada vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n = \mathrm{E}(\lim_{n\to\infty} X_n)$. Općenito, ne možemo zamijeniti redoslijed očekivanja (integracije) i limesa.

Zadatak IV.1.3 Neka je $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), P)$ vjerojatnosni prostor i P Lebesgueova mjera na $[0,1]$. Pokažite da za $\alpha > 0$, niz slučajnih varijabli

$$X_n(\omega) = n^{\alpha} \mathbf{1}_{(0,1/n^2)}(\omega),$$

konvergira prema $X = 0$. Izračunajte $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} X_n$. ■

Prvi uvjet koji omogućava zamjenu limesa i očekivanja jest monotonost.

Teorem IV.1.3 — Teorem o monotonoj konvergenciji. Ako $0 \le X_n \uparrow X$, onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} X_n = \mathrm{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_n\right) = \mathrm{E} X.$$

Dokaz. Ovakvu tvrdnju smo dokazali za jednostavne funkcije (slučajne varijable) u Lemi II.3.3. Neka je za $k \in \mathbb{N}$, $(Y_k^{(n)}, n \in \mathbb{N})$ niz nenegativnih jednostavnih slučajnih varijabli koji aproksimira X_k, odnosno $Y_k^{(n)} \uparrow X_k$ kad $n \to \infty$. Uočimo da je $Z_n = \max_{1\le k\le n} Y_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$, neopadajući niz jednostavnih nenegativnih slučajnih varijabli. U nejednakosti

$$Y_k^{(n)} \le Z_n \le X_n,$$

pustimo prvo $n \to \infty$, što daje

$$X_k \le \lim_{n\to\infty} Z_n \le \lim_{n\to\infty} X_n = X$$

a zatim puštanjem $k \to \infty$ slijedi

$$X = \lim_{k\to\infty} X_k \le \lim_{n\to\infty} Z_n \le X,$$

pa je $X = \lim_{n\to\infty} Z_n$ i stoga $\mathrm{E}X = \mathrm{E}(\lim_{n\to\infty} Z_n)$. Postupimo li isto s nejednakosti $\mathrm{E} Y_k^{(n)} \le \mathrm{E} Z_n \le \mathrm{E} X_n$, nakon puštanja $n \to \infty$ slijedi

$$\mathrm{E} X_k \le \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} Z_n \le \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} X_n,$$

jer je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} Y_k^{(n)} = \mathrm{E} X_k$ po Lemi II.3.3. Puštanjem $k \to \infty$ dobijemo $\lim_{k\to\infty} \mathrm{E} X_k \le \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} Z_n \le \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} X_n$, pa zaključujemo da je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} Z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} X_n$. Kako je $\mathrm{E}(\lim_{n\to\infty} Z_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} Z_n$ po Lemi II.3.3, dokaz je gotov. ■

Zadatak IV.1.4 Pokažite da je u prethodnom teoremu dovoljno pretpostaviti da $X_n \uparrow X$ g.s. ■

Zbog monotonosti očekivanja, jasno je da u prethodnom teoremu $\mathrm{E} X_n \uparrow \mathrm{E} X$. Ako niz događaja $A_n \uparrow A$, onda $\mathbf{1}_{A_n} \uparrow \mathbf{1}_A$ pa po teoremu o monotonoj konvergenciji

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} \mathbf{1}_{A_n} = \mathrm{E} \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathrm{E} \mathbf{1}_A = P(A),$$

što je svojstvo neprekidnosti vjerojatnosti na rastuće familije.

Korolar IV.1.4 Ako je $(X_n, n \in \mathbb{N})$, niz nenegativnih slučajnih varijabli, onda je

$$\mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}X_n.$$

Prethodni korolar može se pokazati i korištenjem Fubinijevog teorema.

Teorem IV.1.5 — Fatouova lema. Ako je $(X_n, n \in \mathbb{N})$, niz nenegativnih slučajnih varijabli, onda je

$$\mathrm{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n.$$

Dokaz. Stavimo $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$, $n \in \mathbb{N}$, tako da $Y_n \uparrow \liminf_{n\to\infty} X_n$ kad $n \to \infty$. Po teoremu o monotonoj konvergenciji $\mathrm{E}Y_n \uparrow \mathrm{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n)$. Kako je $Y_n \leq X_n$, slijedi da je $\mathrm{E}Y_n \leq \mathrm{E}X_n$ za sve n pa je $\mathrm{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n) = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}Y_n \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n$. ■

Fatouova lema najčešće se koristi kada znamo da limes niza slučajnih varijabli postoji pa je $\liminf = \lim$ i želimo pokazati da je očekivanje limesa konačno. Ako je niz slučajnih varijabli dominiran nekom drugom integrabilnom slučajnom varijablom, onda imamo sljedeći rezultat.

Teorem IV.1.6 — Teorem o dominiranoj konvergenciji. Ako $X_n \to X$ g.s. i $|X_n| \leq Y$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $E|Y| < \infty$, onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n = E\left(\lim_{n\to\infty} X_n\right) = \mathrm{E}X.$$

Dokaz. Kako je $(Y + X_n, n \in \mathbb{N})$ nenegativan niz i $Y + X_n \to Y + X$ g.s., iz Fatouove leme slijedi

$$\mathrm{E}(Y+X) = \mathrm{E}\left(\liminf_{n\to\infty}(Y+X_n)\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y+X_n),$$

odnosno $\mathrm{E}X \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n$. Niz $(Y - X_n, n \in \mathbb{N})$ je također nenegativan i iz Fatouove leme slijedi

$$\mathrm{E}(Y-X) = \mathrm{E}\left(\liminf_{n\to\infty}(Y-X_n)\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y-X_n),$$

odnosno $-\mathrm{E}X \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(-X_n)$ što daje $\mathrm{E}X \geq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n$. Kako je uvijek $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n \leq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}X_n$, slijedi tvrdnja. ■

Napomena IV.1.7 Primijetite da u Zadatku IV.1.3 momenti konvergiraju za $\alpha < 2$ iako pretpostavke teorema o monotonoj i dominiranoj konvergenciji nisu ispunjene. Isti primjer za $\alpha \geq 2$ pokazuje da u Fatouovoj lemi možemo imati strogu nejednakost.

Zadatak IV.1.5 Neka je $X \geq 0$ slučajna varijabla na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Pokažite da je s

$$\mu(A) = \int_A X dP = \mathrm{E}(X\mathbf{1}_A), \quad A \in \mathscr{F},$$

definirana mjera na $\mathscr{F}$. ■

Mjera μ iz prethodnog zadatka zadovoljava $P(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$, pa je u smislu Napomene III.3.5 μ apsolutno neprekidna u odnosu na P, tj. $\mu \ll P$. Prema Radon-Nikodymovom teoremu, μ tada ima *gustoću* a to je slučajna varijabla X.

IV.1.3 Računanje očekivanja i momenti

Uvođenjem slučajnih varijabli prestali smo brinuti o samoj strukturi vjerojatnosnog prostora. Slično bi i za očekivanje htjeli izbjeći integriranje na vjerojatnosnom prostoru. Da bi računali integrale, moramo stvari preseliti na prostor gdje to znamo.

Neka je X slučajna varijabla, P_X njena distribucija i F njena funkcija distribucije.

Teorem IV.1.8 Ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija takva da je $g(X) \geq 0$ ili $\mathrm{E}\,|g(X)| < \infty$, onda vrijedi

$$\mathrm{E}\,g(X) = \int_\Omega g(X)dP = \int_\mathbb{R} g(x)dP_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

Dokaz. Dokaz ide standardnom procedurom. Ako je $g = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, onda $\{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) = 1\} = \{X \in A\}$ pa je

$$\mathrm{E}\,g(X) = P(X \in A) = \int_A dP_X = \int_A dF(x) = \int_\mathbb{R} g(x)dF(x).$$

Za jednostavne funkcije g tvrdnja slijedi zbog linearnosti, za nenegativne korištenjem teorema o monotonoj konvergenciji i za općenite g rastavljanjem na pozitivni i negativni dio (vidi Problem IV.2). ■

Može se pokazati i da ako $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$ postoji, onda postoji i $\mathrm{E}\,g(X)$ (vidi [8]). Ako u prethodnom teoremu uzmemo $g(x) = x$, onda dobivamo da je

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x).$$

Dakle, očekivanja možemo računati kao integral u odnosu na funkciju distribucije. Kako se ti integrali računaju razmotrit ćemo posebno za diskretne i neprekidne slučajne varijable.

Ako je X diskretna slučajna varijabla s nosačem $\{x_1, x_2, \dots\}$, onda je

$$\mathrm{E}\,g(X) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P(X = x_i).$$

To se može vidjeti i tako da uočimo da je $g(X) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\mathbf{1}_{\{X=x_i\}}$ pa je u slučaju nenegativnosti $\mathrm{E}\,g(X) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\,\mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{X=x_i\}}$, a za opći slučaj možemo rastaviti na pozitivni i negativni dio.

Ako je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f, onda je

$$\mathrm{E}\,g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Ako je $g = \mathbf{1}_A$, onda to slijedi iz

$$\mathrm{E}\,g(X) = P(A) = \int_A f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_A(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Standardnom procedurom tvrdnja se proširuje redom za jednostavne, nenegativne, općenite funkcije.

Jedna od prednosti prethodnih formula jest da ne moramo znati distribuciju od $g(X)$ da bi izračunali $\mathrm{E}\,g(X)$. Očekivanje $\mathrm{E}X$ u određenom smislu ukazuje na sredinu distribucije, dok za neke druge izbore funkcija g dobijemo različite numeričke karakteristike distribucija.

Definicija IV.1.2 Za slučajnu varijablu X i $r > 0$, takve da $\mathrm{E}X^r$ postoji, definiramo
- **r-ti moment** od X: $\mathrm{E}X^r$,
- **r-ti apsolutni moment** od X: $\mathrm{E}|X|^r$,

Ako je $\mathrm{E}|X| < \infty$, definiramo i
- **r-ti centralni moment** od X: $\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^r$, ,
- **r-ti apsolutni centralni moment** od X: $\mathrm{E}|X - \mathrm{E}X|^r$.

Drugi centralni moment

$$\mathrm{Var}\,X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2$$

nazivamo **varijanca**, a $\sqrt{\mathrm{Var}\,X}$ **standardna devijacija**.

Varijanca je mjera odstupanja slučajne varijable od njenog očekivanja i vrijedi $\mathrm{Var}\,X \geq 0$. Ako je $\mathrm{E}|X| < \infty$, onda je

$$\mathrm{Var}\,X = \mathrm{E}(X^2 - 2X\,\mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2) = \mathrm{E}X^2 - 2\,\mathrm{E}X\,\mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2.$$

Osim toga, za $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$\mathrm{Var}(aX + b) = \mathrm{E}\left(aX + b - (a\mathrm{E}X + b)\right)^2 = a^2\,\mathrm{Var}\,X.$$

Posebno, $\mathrm{Var}(b) = 0$ za $b \in \mathbb{R}$. S druge strane, ako je $\mathrm{Var}\,X = 0$, onda je $(X - \mathrm{E}X)^2 = 0$ g.s., pa je $X = \mathrm{E}X$ g.s.

Zadatak IV.1.6 Ako je $\mathrm{E}X^2 < \infty$, pokažite da se minimum funkcije

$$\phi(c) = \mathrm{E}(X - c)^2$$

postiže u $c = \mathrm{E}X$ i iznosi $\mathrm{Var}\,X$. ▪

Propozicija IV.1.9 Ako je $r > 0$ i $\mathrm{E}|X|^r < \infty$, onda je i $\mathrm{E}|X|^s < \infty$ za svaki $0 \leq s < r$.

Dokaz. Slijedi iz nejednakosti $|x|^s \leq 1 + |x|^r$ koja vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$. ■

Zadatak IV.1.7 Izračunajte očekivanje i varijancu sljedećih distribucija
(a) $\mathscr{B}(n, p)$,
(b) $\mathscr{P}(\lambda)$,
(c) $\mathscr{U}(a, b)$,
(d) $\mathscr{E}(\lambda)$,
(e) Paretova distribucija,
(f) Cauchyjeva distribucija.
▪

Zadatak IV.1.8 Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathrm{E}X^4 < \infty$ i $\mu = \mathrm{E}X$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,X$. (Pearsonov) **momentni koeficijent asimetričnosti**[a] definira se kao

$$s = \mathrm{E}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{\mathrm{E}(X - \mu)^3}{(\mathrm{E}(X - \mu)^2)^{3/2}},$$

a **momentni koeficijent spljoštenosti**[b] kao

$$k = \mathrm{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4 = \frac{\mathrm{E}(X-\mu)^4}{\left(\mathrm{E}(X-\mu)^2\right)^2}.$$

(a) Ako je distribucija od X simetrična (oko 0), odnosno $X \stackrel{d}{=} -X$, izračunajte s.
(b) Izračunajte s ako je $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ i ako je $X = -Y$, $Y \sim \mathscr{E}(\lambda)$.
(c) Izračunajte k za $X \sim \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$, $X \sim \mathscr{T}_\nu$, $\nu > 4$, i $X \sim \mathscr{U}(-1,1)$.

[a] eng. *skewness*
[b] eng. *kurtosis*

Zadatak IV.1.9 Pokažite da za slučajnu varijablu $X \geq 0$ i $p > 0$ vrijedi

$$\mathrm{E}X^p = \int_0^\infty p x^{p-1} P(X > x) dx.$$

Posebno, za $p = 1$ imamo

$$\mathrm{E}X = \int_0^\infty P(X > x) dx = \int_0^\infty (1 - F(x)) dx$$

Zadatak IV.1.10 Pokažite da je $\mathrm{E}|X| < \infty$ ako i samo ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > n) < \infty.$$

Zadatak IV.1.11 Neka X ima **geometrijsku distribuciju** s parametrom $p \in (0,1)$, odnosno $\operatorname{supp} X = \mathbb{N}$ i $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$, $k \in \mathbb{N}$. Izračunajte očekivanje od X. Koliko bacanja očekujemo da je potrebno da pravilan novčić prvi puta padne na pismo?

Zadatak IV.1.12 Pokažite da ako je $r > 0$ i $\mathrm{E}|X|^r < \infty$, onda

$$\lim_{x \to \infty} x^r P(|X| > x) = 0.$$

Zadatak IV.1.13 Neka je X slučajna varijabla takva da je

$$P(X > x) = \frac{c}{x \log x}$$

za $x \geq 3$, a inače $P(X > x) = 1$.
(a) Odredite c.
(b) Pokažite da je $\mathrm{E}X = \infty$.

(c) Pokažite da $\lim_{x\to\infty} xP(X > x) = 0$. Usporedite sa Zadatkom IV.1.12. ▪

IV.1.4 Nejednakosti vezane uz očekivanje

Prva klasa nejednakosti koje ćemo pokazati tiče se različitih ocjena na repne vjerojatnosti korištenjem momenata.

Propozicija IV.1.10 — Markovljeva nejednakost (generalizirana). Neka je X slučajna varijabla i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \geq 0$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ i $m_A = \inf\{g(x) : x \in A\}$. Tada vrijedi

$$m_A P(X \in A) \leq \mathrm{E}(g(X)\mathbf{1}_{\{X\in A\}}) \leq \mathrm{E}\, g(X).$$

Dokaz. Slijedi ako primijenimo očekivanje na nejednakost

$$m_A \mathbf{1}_{\{X\in A\}} \leq g(X)\mathbf{1}_{\{X\in A\}} \leq g(X).$$

■

Ako uzmemo $g(x) = |x|^p$ i $A = \{x : |x| \geq \varepsilon\}$ za $p > 0$ i $\varepsilon > 0$, onda je $m_A = |\varepsilon|^p$ i dobijemo:

Korolar IV.1.11 — Markovljeva nejednakost. Za slučajnu varijablu X i proizvoljne $p > 0$ i $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{E}\,|X|^p}{\varepsilon^p}.$$

Primijenimo li prethodno na $X - \mathrm{E}X$ za $p = 2$ slijedi:

Korolar IV.1.12 — Čebiševljeva nejednakost. Ako je X slučajna varijabla, $\mathrm{E}X^2 < \infty$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$P(|X - \mathrm{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}\,X}{\varepsilon^2}.$$

Zadatak IV.1.14 Neka je $p \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ i X slučajna varijabla takva da je $P(X = -\varepsilon) = P(X = \varepsilon) = p$ i $P(X = 0) = 1 - 2p$. Pokažite da se u Čebiševljevoj nejednakosti za X postiže jednakost. S druge strane, što tvrdnja Zadatka IV.1.12 za $r = 2$ znači za Čebiševljevu nejednakost? ▪

Zadatak IV.1.15 Pokažite da za slučajnu varijablu X s varijancom $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,X < \infty$, vrijedi

$$P(|X - \mathrm{E}X| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{i} \quad P(|X - \mathrm{E}X| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2},$$

za $k \in \mathbb{N}$. Usporedite te ocjene s vjerojatnostima za $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ i $k = 1, 2, 3$. ▪

Zadatak IV.1.16 Vjerojatnost pisma nepravilnog novčića je 0.4. Koristeći Čebiševljevu nejednakost, odgovorite koliko puta treba baciti novčić da se relativna frekvencija pisama ne razlikuje od 0.4 za više ili jednako 0.01 s vjerojatnošću barem 0.95. ■

Ocjenu na očekivanje produkta daje nam sljedeća nejednakost.

Teorem IV.1.13 — Hölderova nejednakost. Neka su $p, q \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $q > 1$ i $1/p + 1/q = 1$. Ako je $\mathrm{E}|X|^p < \infty$ i $\mathrm{E}|Y|^q < \infty$, onda je i $\mathrm{E}|XY| < \infty$ i vrijedi

$$\mathrm{E}|XY| \leq (\mathrm{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathrm{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Dokaz. U nejednakost iz Problema IV.7 stavimo $x = |X|/(\mathrm{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}$ i $y = |Y|/(\mathrm{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}$ i primijenimo očekivanje

$$\mathrm{E}\left(\frac{|X|}{(\mathrm{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}} \frac{|Y|}{(\mathrm{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}}}\right) \leq \frac{1}{p} \frac{\mathrm{E}|X|^p}{(\mathrm{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}p}} + \frac{1}{q} \frac{\mathrm{E}|Y|^q}{(\mathrm{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}q}} = 1.$$

■

Često se koristi oznaka $\|X\|_p = (\mathrm{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}}$ pa tako Hölderovu nejednakost možemo zapisati kao

$$\mathrm{E}|XY| \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Može se pokazati da $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$, zaista definira normu na prostoru slučajnih varijabli, pri čemu identificiramo slučajne varijable koje su jednake g.s. Prostor svih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ za koje je $\|X\|_p < \infty$, odnosno $\mathrm{E}|X|^p < \infty$, označava se s L^p.

Hölderova nejednakost za $p = q = 2$ daje **Cauchy-Schwarz(-Bunjakovski) nejednakost**

$$\mathrm{E}|XY| \leq \left(\mathrm{E}X^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{E}Y^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Posebno, ako je $\mathrm{E}X^2 < \infty$ i $\mathrm{E}Y^2 < \infty$, onda je i $\mathrm{E}|XY| < \infty$.

Zadatak IV.1.17 — Ljapunovljeva nejednakost. Pokažite da za $0 < r < p$

$$\|X\|_r \leq \|X\|_p.$$

■

Zadatak IV.1.18 — Paley–Zygmund nejednakost. Neka je $X \geq 0$ slučajna varijabla i $\mathrm{E}X^2 < \infty$. Pokažite da za $\lambda \in (0,1)$ vrijedi

$$P(X \geq \lambda\, \mathrm{E}X) \geq (1-\lambda)^2 \frac{(\mathrm{E}X)^2}{\mathrm{E}X^2}.$$

■

Prethodne nejednakosti ocjenjuju očekivanje produkta. Za očekivanje sume imamo sljedeće.

Propozicija IV.1.14 Za $p > 0$ vrijedi

$$\mathrm{E}|X+Y|^p \leq 2^p (\mathrm{E}|X|^p + \mathrm{E}|Y|^p).$$

Posebno, ako je $\mathrm{E}|X|^p < \infty$ i $\mathrm{E}|Y|^p < \infty$, onda je i $\mathrm{E}|X+Y|^p < \infty$.

Dokaz. Slijedi iz nejednakosti $(x+y)^p \leq (2\max\{x,y\})^p \leq 2^p(x^p+y^p)$ koja vrijedi za sve $x \geq 0$, $y \geq 0$ i $p > 0$. ■

Teorem IV.1.15 — Nejednakost Minkowskog. Ako je $p \geq 1$ te $\mathrm{E}|X|^p < \infty$ i $\mathrm{E}|Y|^p < \infty$, onda vrijedi

$$(\mathrm{E}|X+Y|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathrm{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} + (\mathrm{E}|Y|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Dokaz. Ako je $\mathrm{E}|X+Y|^p = 0$, nema se što dokazati pa pretpostavimo da je $\mathrm{E}|X+Y|^p > 0$. Za $q = p/(p-1)$ je $1/p + 1/q = 1$ pa imamo koristeći Hölderovu nejedakost

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}|X+Y|^p &= \mathrm{E}\left(|X+Y|^{p-1}|X+Y|\right) \leq \mathrm{E}\left(|X+Y|^{p-1}|X|\right) + \mathrm{E}\left(|X+Y|^{p-1}|Y|\right) \\
&\leq \left(\mathrm{E}|X+Y|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} (\mathrm{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} + \left(\mathrm{E}|X+Y|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} (\mathrm{E}|Y|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\mathrm{E}|X+Y|^p)^{\frac{1}{q}} \left((\mathrm{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} + (\mathrm{E}|Y|^p)^{\frac{1}{p}}\right).
\end{aligned}$$

Dijeljenjem s $(\mathrm{E}|X+Y|^p)^{\frac{1}{q}}$ slijedi tvrdnja. ■

Nejednakost Minkowskog pokazuje da u L^p vrijedi nejednakost trokuta $\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$ što je nužno da bi $\|\cdot\|_p$ zaista bila norma.

Za očekivanje konveksnih funkcija slučajnih varijabli imamo sljedeću nejednakost.

Teorem IV.1.16 — Jensenova nejednakost. Neka je X slučajna varijabla i g konveksna funkcija, odnosno

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y),$$

za sve $\lambda \in [0,1]$ i $x, y \in \mathbb{R}$. Ako je $\mathrm{E}|X| < \infty$ i $\mathrm{E}|g(X)| < \infty$, onda je

$$g(\mathrm{E}X) \leq \mathrm{E}g(X).$$

Dokaz. Ako je g konveksna, onda postoji pravac $l(x) = ax+b$ takav da je $l(\mathrm{E}X) = g(\mathrm{E}X)$ i $g(x) \geq l(x)$. Sada imamo

$$\mathrm{E}g(X) \geq \mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}X + b = l(\mathrm{E}X) = g(\mathrm{E}X).$$

■

Zadatak IV.1.19 Koristeći Jensenovu nejednakost pokažite da vrijedi

(a) $|\mathrm{E}X| \leq \mathrm{E}|X|$,

(b) za $p \geq 1$, $(\mathrm{E}|X|)^p \leq \mathrm{E}|X|^p$,

(c) za $p \geq 1$ i $r > 0$, $(\mathrm{E}|X|^r)^{1/r} \leq (\mathrm{E}|X|^{rp})^{\frac{1}{rp}}$,

(d) ako je g konkavna, onda

$$g(\mathrm{E}X) \geq \mathrm{E}g(X),$$

(e) za $p \leq 1$, $(\mathrm{E}|X|)^p \geq \mathrm{E}|X|^p$.

■

IV.1.5 Momenti slučajnog vektora

Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_d)$ slučajni vektor. **Očekivanje slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$** definirano je kao

$$\mathrm{E}\boldsymbol{X} = (\mathrm{E}X_1, \dots, \mathrm{E}X_d) \in \mathbb{R}^d,$$

pod pretpostavkom da očekivanja $\mathrm{E}X_1, \dots, \mathrm{E}X_d$ postoje. Teorem IV.1.8 ima sljedeći oblik za slučajne vektore.

Teorem IV.1.17 Ako je $\boldsymbol{X}$ d-dimenzionalan slučajni vektor s funkcijom distribucije $\boldsymbol{F}$ i $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija takva da je $g(\boldsymbol{X}) \geq 0$ ili $\mathrm{E}|g(\boldsymbol{X})| < \infty$, onda vrijedi

$$\mathrm{E}\,g(\boldsymbol{X}) = \int_\Omega g(\boldsymbol{X})dP = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dP_{\boldsymbol{X}}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)d\boldsymbol{F}(x).$$

Prema prethodnom teoremu, slično kao kod slučajnih varijabli, $\mathrm{E}\,g(\boldsymbol{X})$ za funkciju $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ i diskretan slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ s nosačem $\{\boldsymbol{x}^{(i)} : i \in \mathbb{N}\}$ računamo kao

$$\mathrm{E}\,g(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} g(\boldsymbol{x}^{(i)})P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}^{(i)}),$$

dok za neprekidan slučajni vektor $\boldsymbol{X}$ s funkcijom gustoće f, $\mathrm{E}\,g(\boldsymbol{X})$ računamo kao

$$\mathrm{E}\,g(\boldsymbol{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

Za slučajne vektore posebno su važni momenti drugog reda koji mogu opisati vezu između komponenti vektora. Neka je (X,Y) slučajni vektor takav da je $\mathrm{E}X^2 < \infty$ i $\mathrm{E}Y^2 < \infty$. Prema Cauchy-Schwarz nejednakosti, tada je i $\mathrm{E}|XY| < \infty$ i možemo definirati **kovarijancu slučajnog vektora (X,Y)** (odnosno slučajnih varijabli X i Y)

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)(Y - \mathrm{E}Y) = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y.$$

Očigledno je $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$ i $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}X$. Kovarijanca mjeri zajedničku raspršenost od X i Y. Kovarijanca je pozitivna ako dvije varijable imaju sklonost varirati zajedno, u smislu da ako je jedna iznad (ispod) očekivanja, onda je i druga iznad (ispod) svog očekivanja. S druge strane, kovarijanca je negativna kada je jedna varijabla iznad (ispod) očekivanja, a druga ima tendenciju tada biti ispod (iznad) svog očekivanja. Kovarijanca je bilinearna, odnosno

$$\mathrm{Cov}(aX,bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X,Y), \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

To znači da kovarijanca može biti velika po apsolutnoj vrijednosti samo zato što slučajne varijable mogu poprimiti velike vrijednosti (primjerice, nije invarijantna na promjenu mjernih jedinica). Zato definiramo i normiranu verziju, a to je **koeficijent korelacije slučajnog vektora (X,Y)** (odnosno slučajnih varijabli X i Y)

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}X\,\mathrm{Var}Y}}$$

Pri tome pretpostavljamo da je $\mathrm{Var}X, \mathrm{Var}Y > 0$. Ako je $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Corr}(X,Y) = 0$, onda kažemo da su X i Y **nekorelirane**.

Zadatak IV.1.20 Pokažite da je

(a) $|\rho_{X,Y}| \leq 1$,

(b) $\mathrm{Corr}(aX, bY) = \mathrm{sign}(ab)\,\mathrm{Corr}(X,Y)$, $a, b \in \mathbb{R}$,

(c) $|\rho_{X,Y}| = 1$ ako i samo ako je $Y = aX + b$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, i pri tome $\rho_{X,Y} = 1$ ako je $a > 0$ i $\rho_{X,Y} = -1$ ako je $a < 0$,

(d) $\rho_{X,X} = 1$.

■

Zadatak IV.1.21 Neka su $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_m$ slučajne varijable takve da je $\mathrm{E}X_i^2 < \infty$ i $\mathrm{E}Y_i^2 < \infty$ za sve i i $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Pokažite da vrijedi:

(a)

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \,\mathrm{Cov}(X_i, Y_j),$$

(b)

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\, X_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j),$$

(c) ako su $X_1, \dots, X_n$ nekorelirane, odnosno $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ za sve $i \neq j$, onda je

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\, X_i.$$

■

Za d-dimenzionalan slučajni vektor $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \dots, X_d)$ takav da je $\mathrm{E}X_i^2 < \infty$ za sve $i = 1, \dots, d$, definiramo **matricu kovarijanci** slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ s

$$\Gamma = \mathrm{E}(\boldsymbol{X} - \mathrm{E}\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X} - \mathrm{E}\boldsymbol{X})^T$$

čiji elementi su $\Gamma = [\gamma_{i,j}]_{i,j=1,\dots,d}$

$$\gamma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Uočimo da su dijagonalni elementi $\gamma_{i,i} = \mathrm{Var}\, X_i$, $i = 1, \dots, d$.

Zadatak IV.1.22 Pokažite da za matricu kovarijanci Γ slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ vrijedi

(a) Γ je simetrična,

(b) Γ je pozitivno semidefinitna.

■

Zadatak IV.1.23 Neka je $\boldsymbol{X}$ slučajni vektor s očekivanjem $\boldsymbol{\mu}$ i matricom kovarijanci Γ, $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$ i $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^k$. Pokažite da k-dimenzionalni slučajni vektor $\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$ ima očekivanje $A\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}$ i matricu kovarijanci $A\Gamma A^T$. ■

Zadatak IV.1.24 Neka je $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ normalan slučajni vektor, gdje je $\boldsymbol{\mu} =$

$(\mu_1,\mu_2)^T \in \mathbb{R}^2$ i

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

$\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ i $\rho \in (-1,1)$ (vidi Zadatak III.4.4). Pokažite da je $\mathrm{E}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu}$ i $\rho = \mathrm{Corr}(X_1,X_2)$ te je Σ matrica kovarijanci od (X,Y). ■

Može se pokazati da posljednja tvrdnja vrijedi i općenito, odnosno matrica kovarijanci d-dimenzionalnog normalnog slučajnog vektora $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ je upravo Σ.

Zadatak IV.1.25 Neka je (X,Y) neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f(x,y) = \begin{cases} a, & \text{ako je } x^2+y^2 \leq 4, y>0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odredite a.
(b) Izračunajte očekivanje.
(c) Izračunajte matricu kovarijanci.

■

Zadatak IV.1.26 Neka je (X,Y) neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f(x,y) = \frac{1}{8}(6-x-y)\mathbf{1}_{[0,2]\times[2,4]}(x,y).$$

Izračunajte matricu kovarijanci i koeficijent korelacije od (X,Y). ■

IV.2. Nezavisnost

Nezavisnost je jedan od središnjih koncepata u teoriji vjerojatnosti koji je značajno diferencira od teorije mjere. Iako se radi o konceptu koji je intuitivno jasan u praktičnim primjerima, nezavisnost se temelji na tehničkom uvjetu koji treba provjeriti.

IV.2.1 Nezavisnost događaja

Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Krećemo od definicije nezavisnosti za dva događaja.

Definicija IV.2.1 Događaji $A, B \in \mathscr{F}$ su **nezavisni** ako je

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Zadatak IV.2.1 Pokažite:

(a) događaj A takav da je $P(A) = 0$ je nezavisan sa svakim događajem $B \in \mathscr{F}$,

(b) Ω i B su nezavisni za svaki $B \in \mathscr{F}$,

(c) ako su A i B nezavisni, onda su nezavisni i A^c i B, A i B^c, te A^c i B^c.

∎

Za konačno mnogo događaja definicija je sljedeća.

Definicija IV.2.2 Događaji $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$ su **nezavisni** ako je

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i), \qquad \text{za sve } I \subseteq \{1, \ldots, n\}.$$

Treba naglasiti da za nezavisnost događaja $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{F}$, $n > 2$, nije dovoljno da vrijedi $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ za sve $i \neq j$. Za takve događaje kažemo da su nezavisni po parovima.

Zadatak IV.2.2 Za pokus bacanja dvije pravilne kockice promatramo događaje $A_1 = \{\text{na prvoj kockici je } 1, 2 \text{ ili } 3\}$, $A_2 = \{\text{na drugoj kockici je } 4, 5 \text{ ili } 6\}$ i $A_3 = \{\text{zbroj brojeva na kockicama je } 7\}$. Pokažite da su A_1, A_2, A_3 nezavisni po parovima, ali nisu nezavisni. ■

Definiciju ćemo sada proširiti na konačno mnogo familija događaja, a zatim i na proizvoljan broj familija događaja.

Definicija IV.2.3 Familije događaja $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \subseteq \mathscr{F}$, su **nezavisne** ako su za svaki izbor $A_i \in \mathscr{A}_i$, $i = 1, \ldots, n$, događaji $A_1, \ldots, A_n$ nezavisni.

Ako se svaka familija sastoji od jednog događaja, tada se definicija svodi na Definiciju IV.2.2. Sljedeći teorem čini provjeru nezavisnosti znatno jednostavnijom. Podsjetimo se iz Problema II.9 da je familija skupova π-sistem ako je zatvorena na konačne presjeke. Tipičan primjer takve familije je $\mathscr{A} = \emptyset \cup \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Teorem IV.2.1 Ako su $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \subseteq \mathscr{F}$ π-sistemi koji su nezavisni, onda su σ-algebre $\sigma(\mathscr{A}_1), \ldots, \sigma(\mathscr{A}_n)$ nezavisne.

Dokaz. Vidi Problem IV.19. ■

Definicija IV.2.4 Familije događaja $\{\mathscr{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, $\mathscr{A}_\lambda \subseteq \mathscr{F}$, su **nezavisne** ako su za svaki konačan $I \subseteq \Lambda$, familije $\mathscr{A}_i$, $i \in I$ nezavisne.

Beskonačna familija je nezavisna ako i samo ako je svaka konačna potfamilija nezavisna. Posebno, i svaka potfamilija nezavisne familije je nezavisna.

IV.2.2 Nezavisnost slučajnih varijabli

Sada se okrećemo pojmu nezavisnosti slučajnih varijabli definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru.

Definicija IV.2.5 Slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ su **nezavisne** ako za proizvoljne $B_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i).$$

Zadatak IV.2.3 Pokažite da su X i Y nezavisne ako i samo ako su σ-algebre $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$ nezavisne. ■

Zadatak IV.2.4 Pokažite da su A_1 i A_2 nezavisni događaji ako i samo ako su $\mathbf{1}_{A_1}$ i $\mathbf{1}_{A_2}$ nezavisne slučajne varijable. ■

Za proizvoljnu familiju slučajnih varijabli imamo sljedeću definiciju.

Definicija IV.2.6 Familija slučajnih varijabli $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, je **familija nezavisnih slučajnih varijabli** ako su za svaki konačan $I \subseteq \Lambda$, slučajne varijable X_i, $i \in I$ nezavisne.

Sljedeća propozicija pokazuje da što god (deterministički) radili s nezavisnim slučajnim varijablama, one ostaju nezavisne.

Propozicija IV.2.2 Neka je $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, familija nezavisnih slučajnih varijabli i $g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$, izmjerive funkcije. Tada je i $\{g_\lambda(X_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ familija nezavisnih slučajnih varijabli.

Dokaz. Slijedi iz jednakosti $\{g_\lambda(X_\lambda) \in B\} = \{X_\lambda \in g_\lambda^{-1}(B)\}$. ■

Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, onda je za $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$P(\boldsymbol{X} \in B_1 \times \cdots \times B_n) = P_{\boldsymbol{X}}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(B_i), \tag{IV.2.1}$$

odnosno $P_{\boldsymbol{X}}$ je produktna vjerojatnost $P_{X_1} \times \cdots \times P_{X_n}$. To je posljedica Teorema II.4.1 jer postoji jedinstvena vjerojatnost P' za koju vrijedi $P'(B_1 \times \cdots \times B_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(B_i)$, a kako to vrijedi i za $P_{\boldsymbol{X}}$, mora biti $P' = P_{\boldsymbol{X}}$.

Sada ćemo navesti kako se uvjet nezavisnosti može iskazati u terminima objekata koji opisuju distribucije slučajnih varijabli.

Teorem IV.2.3 Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ slučajni vektor s funkcijom distribucije $\boldsymbol{F}$. Slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ su nezavisne ako i samo ako je za sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x_i), \tag{IV.2.2}$$

odnosno

$$\boldsymbol{F}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).$$

Dokaz. Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, onda očito vrijedi i (IV.2.2). Obratno, pretpostavimo da vrijedi (IV.2.2). Familije $\mathscr{A}_i = \{\{X_i \le x\} : x \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, \ldots, n$ su π-sistemi. Prema Teoremu IV.2.1, $\sigma(\mathscr{A}_1), \ldots, \sigma(\mathscr{A}_n)$ su nezavisne. Kako je $\sigma(\mathscr{A}_i) = \sigma(X_i)$ (Zadatak III.2.1), tvrdnja je dokazana. ■

Uz pretpostavku na tip slučajne varijable, nezavisnost se može karakterizirati i na sljedeće načine.

Korolar IV.2.4 Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće f. Slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ su nezavisne ako i samo ako je za sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i).$$

Dokaz. Ako uvjet vrijedi, onda iz Fubinijevog teorema slijedi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(x_1, \ldots, x_n) &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1}(t_1) \cdots f_{X_n}(t_n) dt_1 \cdots dt_n \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1) dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_n}(t_n) dt_n = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i). \end{aligned}$$

Obratno, ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, onda

$$\boldsymbol{F}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1}(t_1) \cdots f_{X_n}(t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

pa je za sve $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_B f(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n = \int_B f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

Korištenjem Propozicije IV.1.2(vii) (za slučajne vektore), slijedi da je $f(x_1,\dots,x_n) = f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n)$ g.s. ■

Korolar IV.2.5 Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_n)$ diskretan slučajni vektor. Slučajne varijable $X_1,\dots,X_n$ su nezavisne ako i samo ako je za sve $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$

$$P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

Dokaz. Ako su $X_1,\dots,X_n$ nezavisne, tvrdnja je očita. Obratno, neka je D nosač od $\boldsymbol{X}$. Za $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{z\in D, \boldsymbol{z}\le \boldsymbol{x}} P(X_1 = z_1,\dots,X_n = z_d) = \sum_{z\in D, \boldsymbol{z}\le \boldsymbol{x}} P(X_1 = z_1)\cdots P(X_n = z_d) \\
&= \sum_{z_2\le x_2,\dots,z_n\le x_n} \sum_{z_1\le x_1} P(X_1 = z_1)\prod_{i=2}^n P(X_i = z_i) \\
&= P(X_1 \le x_1) \sum_{z_2\le x_2,\dots,z_n\le x_n} \prod_{i=2}^n P(X_i = z_i) \\
&= \cdots = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i),
\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi iz Teorema IV.2.3. ■

Ubuduće ćemo se često susretati s tvrdnjama oblika „Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s funkcijama distribucije $(F_n, n \in \mathbb{N})$”. Može se pokazati da zaista postoji vjerojatnosni prostor i slučajne varijable na njemu koje će biti nezavisne i imati distribuciju koja je jednaka zadanim vjerojatnosnim funkcijama distribucije. To smo pokazali za jednu slučajnu varijablu (Teorem III.3.2), i za konačno mnogo slučajnih varijabli (Teorem III.4.1), bez pretpostavke o nezavisnosti. Slična tvrdnja vrijedi za beskonačno mnogo slučajnih varijabli pod pretpostavkom nezavisnosti, a općenito vrijedi uz dodatne pretpostavke na familiju funkcija distribucije. Tvrdnja je poznata kao Kolmogorovljev teorem o proširenju (vidi primjerice [8]).

Posebno, za zadanu vjerojatnosnu funkciju distribucije F, postoji vjerojatnosni prostor i niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ na njemu koje su nezavisne i sve jednako distribuirane s funkcijom distribucije F. Kažemo da je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ **niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli** (**n.j.d. niz**).

Zadatak IV.2.5 Neka su $\{X_{ij} : \ i = 1,\dots,m, \ j = 1,\dots,n_i\}$ nezavisne slučajne varijable i $g_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ izmjerive funkcije, $i = 1,\dots,m$. Tada su slučajne varijable $Y_i = g_i(X_{i1},\dots X_{in_i})$, $i = 1,\dots,m$ nezavisne. ■

Zadatak IV.2.6 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz neprekidnih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F.

(a) Pokažite da je vjerojatnost da ima jednakih

$$P\left(\bigcup_{i\neq j}\{X_i = X_j\}\right) = 0.$$

(b) Neka je R_n rang od X_n u nizu $X_1,\dots,X_n$, odnosno

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \geq X_n\}}.$$

Pokažite da je $\{R_n, n \in \mathbb{N}\}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i za $k = 1,\dots,n$ vrijedi

$$P(R_n = k) = \frac{1}{n}.$$

(c) Pokažite da su događaji $A_n = \{R_n = 1\}$ nezavisni i interpretirajte.

IV.2.3 Nezavisnost i momenti

Ako iskoristimo činjenicu da je distribucija slučajnog vektora s nezavisnim komponentama produkt distribucija komponenti i Teorem IV.1.17, dolazimo do sljedećeg.

Teorem IV.2.6 Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable i $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija takva da je $h \geq 0$ ili $\mathrm{E}|h(X,Y)| < \infty$. Tada je

$$\mathrm{E}h(X,Y) = \int\int h(x,y)dF_X(x)dF_Y(y).$$

Ako je $h = f \cdot g$ za izmjerive $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f,g \geq 0$ ili $\mathrm{E}|f(X)| < \infty$, $\mathrm{E}|g(Y)| < \infty$, onda vrijedi

$$\mathrm{E}f(X)g(Y) = \mathrm{E}f(X) \cdot \mathrm{E}g(Y).$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz Teorema IV.1.17, činjenice da je $P_{(X,Y)} = P_X \times P_Y$ i Fubinijevog teorema. Druga tvrdnja slijedi kao posljedica za $f,g \geq 0$. Primjenom iste na $|f(X)g(Y)|$ slijedi da je $\mathrm{E}|f(X)g(Y)| = \mathrm{E}|f(X)|\mathrm{E}|g(Y)| < \infty$, pa možemo primijeniti Fubinijev teorem i u tom slučaju. ■

Indukcijom slijedi:

Korolar IV.2.7 Ako su $X_1,\dots,X_n$ nezavisne i $X_i \geq 0$ za svaki i, ili $\mathrm{E}|X_i| < \infty$ za svaki i, onda vrijedi

$$\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}X_i.$$

Obrat ne mora vrijediti. Ako je $\mathrm{E}XY = \mathrm{E}X\,\mathrm{E}Y$, onda su X i Y nekorelirane, ali ne moraju biti nezavisne.

Zadatak IV.2.7 Jesu li X i Y nezavisne slučajne varijable u

(a) Zadatku III.4.3,

(b) Zadatku III.4.5,

(c) Zadatku III.4.6,
(d) Zadatku III.4.7,
(e) Zadatku IV.1.25,
(f) Zadatku IV.1.26?

■

Općenito, ako su $X_1, \ldots, X_d$ nezavisne slučajne varijable, onda je $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ za $i \neq j$ pa je matrica kovarijanci slučajnog vektora $(X_1, \ldots, X_d)$ dijagonalna. Obrat općenito ne vrijedi, ali vrijedi u sljedećem slučaju.

Zadatak IV.2.8 Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d) \sim \mathscr{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Slučajne varijable $X_1, \ldots, X_d$ su nezavisne ako i samo ako je Σ dijagonalna matrica. ■

IV.3. Distribucije funkcija slučajnih varijabli i vektora

Ako je X slučajna varijabla i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija, onda za funkciju distribucije slučajne varijable $Y = g(X)$ vrijedi

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X \in g^{-1}((-\infty, x])) = \int_{g^{-1}((-\infty,x])} dF_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dakle, ako znamo funkciju distribucije od X, onda znamo i funkciju distribucije od $g(X)$ za izmjerivu funkciju g.

Ako je X diskretna slučajna varijabla s tablicom distribucije

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix},$$

onda je

$$F_Y(x) = \sum_{\{n:\ x_n \in g^{-1}((-\infty,x])\}} p_n = \sum_{\{n:\ g(x_n) \leq x\}} p_n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ako je X neprekidna s gustoćom f_X, onda je

$$F_Y(x) = \int_{g^{-1}((-\infty,x])} f_X(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Slično vrijedi i za slučajne vektore. Ako je $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_{d_1})$ i $g : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$, $g(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_{d_2}(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{d_1})$, izmjeriva funkcija, onda d_2-dimenzionalan slučajni vektor $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$ ima funkciju distribucije

$$F_{\boldsymbol{Y}}(x_1, \ldots, x_{d_2}) = P(\boldsymbol{X} \in g^{-1}((-\infty, \boldsymbol{x}]) = \int_{g^{-1}((-\infty,\boldsymbol{x}])} dF_{\boldsymbol{X}}(x), \quad (x_1, \ldots, x_{d_2}) \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

■ **Primjer IV.3.1** (i) Ako je $Y = aX + b$, $a > 0$, onda je

$$F_Y(x) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

(ii) Ako je $Y = X^2$, onda je $F_Y(x) = 0$ za $x < 0$, a za $x \geq 0$ imamo

$$F_Y(x) = P\left(X^2 \leq x\right) = P\left(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) + P(X = -\sqrt{x}).$$

(iii) Ako su X i Y nezavisne, onda je $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ pa imamo da je

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(z) &= \int\int \mathbf{1}_{\{x+y\leq z\}} dF_{X,Y} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{x+y\leq z\}} dF_X dF_Y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z-x) dF_X(x). \end{aligned}$$

Ako je X diskretna slučajna varijabla i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva, onda je i $Y = g(X)$ diskretna, $\text{supp}(Y) = \{y_1, y_2, \ldots\} \subseteq \{g(x_i) : x_i \in \text{supp}(X)\}$, pri čemu su $y_1, y_2, \ldots$ međusobno različiti, i distribucija od Y je dana s

$$P(Y = y_i) = \sum_{\{k : g(x_k) = y_i\}} p_k, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Slično vrijedi i za funkcije diskretnih slučajnih vektora.

Zadatak IV.3.1 Neka je (X,Y) slučajni vektor s tablicom distribucije

$X \setminus Y$	-1	0	1
0	0.25	0	0.25
1	0	0.5	0

.

Odredite distribuciju od $Z = X^2 + Y^2$. ■

Međutim, ako je X neprekidna slučajna varijabla i g izmjeriva, $Y = g(X)$ ne mora biti neprekidna slučajna varijabla (primjerice, $\mathbf{1}_A(X)$). Isto vrijedi i za funkcije slučajnih vektora. Postavlja se pitanje, pod kojim uvjetima će $g(X)$ biti neprekidna slučajna varijabla (odnosno, $g(\boldsymbol{X})$ neprekidan slučajni vektor) te kako doći do gustoće. Jedan pristup je doći do funkcije distribucije od $Y = g(X)$ i na osnovu nje vidjeti radi li se o neprekidnoj distribuciji te ako da, onda izračunati gustoću.

Zadatak IV.3.2 Neka je $X \sim \mathcal{E}(1)$ i $Y = (X-1)^2$. Provjerite je li Y neprekidna slučajna varijabla i ako jest, odredite gustoću. ■

Osim prethodnog pristupa, do gustoće možemo doći i direktno sljedećim rezultatom.

Teorem IV.3.1 Neka je X neprekidna slučajna varijabla i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija takva da je

(i) $g : \text{supp}(X) \to K$, $K = g(\text{supp}(X))$, je bijekcija,

(ii) g je klase C^1 i za inverznu funkciju vrijedi $(g^{-1})'(y) \neq 0$ za sve $y \in K$.

Tada je $Y = g(X)$ neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|(g^{-1})'(y)\right| \mathbf{1}_K(y).$$

Dokaz. Skica: g je neprekidna bijekcija pa je strogo monotona. Ako je, primjerice, strogo rastuća, onda je

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)).$$

Kako je g neprekidno diferencijabilna, onda je i g^{-1} neprekidno diferencijabilna (teorem o inverznom preslikavanju) pa je

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|(g^{-1})'(y)\right| \mathbf{1}_K(y).$$

■

Ako funkcija g u prethodnom teoremu nije injekcija, ali postoje disjunktni Borelovi skupovi A_i, $\text{supp}(X) = \cup_i A_i$, takvi da su funkcije $g_i = g\big|_{A_i}$ injekcije i zadovoljavaju pretpostavke teorema, onda je

$$f_Y(y) = \sum_i f_X(g_i^{-1}(y)) \left|(g_i^{-1})'(y)\right| \mathbf{1}_{K_i}(y),$$

gdje je $K_i = g_i(A_i)$.

Zadatak IV.3.3 Strijelac s povezom na očima ispucava strijele na beskonačno dugačak zid od kojeg je udaljen jedan metar. S obzirom da ima povez na očima, strijele ispucava slučajno se okrećući oko svoje osi. Stoga će kut ispucavanja biti slučajan broj iz intervala $[-\pi/2, \pi/2]$. Odredite distribuciju mjesta pogotka strijele na zidu. ■

Zadatak IV.3.4 Riješite Zadatak IV.3.2 primjenom Teorema IV.3.1. ■

Zadatak IV.3.5 Neka je X neprekidna slučajna varijabla i $Y = aX + b$, $a \neq 0$. Odredite gustoću od Y. Posebno, odredite distribuciju od Y ako je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. ■

Promotrimo sada generalizaciju na slučajne vektore. Za vektorsku funkciju $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ s $g_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$, označavamo komponente $g(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_d(\boldsymbol{x}))$. Ako je g klase C^1, u smislu da su sve g_i klase C^1, onda definiramo Jacobijan od g kao $Dg : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ s

$$Dg(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_d}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_d}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial g_d}{\partial x_d}(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix}.$$

Teorem IV.3.2 Neka je $\boldsymbol{X}$ neprekidan d-dimenzionalan slučajni vektor i $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ izmjeriva funkcija takva da je

(i) $g : \text{supp}(\boldsymbol{X}) \to K$, $K = g(\text{supp}(\boldsymbol{X}))$, je bijekcija,

(ii) g je klase C^1 i za inverznu funkciju vrijedi $Dg^{-1}(\boldsymbol{y}) \neq 0$ za sve $\boldsymbol{y} \in K$.

Tada je $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$ neprekidan slučajni vektor s gustoćom

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(g^{-1}(\boldsymbol{y})) \left|Dg^{-1}(\boldsymbol{y})\right| \mathbf{1}_K(\boldsymbol{y}).$$

Slično kao i u prethodnom, ako funkcija g u prethodnom teoremu nije injekcija, ali postoje disjunktni Borelovi skupovi A_i, $\text{supp}(\boldsymbol{X}) = \cup_i A_i$, takvi da su funkcije $g^{(i)} = g\big|_{A_i}$ injekcije i zadovoljavaju pretpostavke teorema, onda je

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = \sum_i f_{\boldsymbol{X}}((g^{(i)})^{-1}(\boldsymbol{y})) \left|D(g^{(i)})^{-1}(\boldsymbol{y})\right| \mathbf{1}_{K_i}(\boldsymbol{y}),$$

gdje je $K_i = g^{(i)}(A_i)$.

■ **Primjer IV.3.2** Pretpostavimo da je $d = 2$, odnosno (X,Y) je neprekidan slučajni vektor s gustoćom f i $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija, te nas zanima distribucija od $\psi(X,Y)$. Definiramo $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s

$$g_1(x,y) = x,$$
$$g_2(x,y) = \psi(x,y).$$

Tada je $g(X,Y)=(X,\psi(X,Y))$. Dovoljno je g promatrati na $\text{supp}(X,Y)=\{(x,y): f(x,y)>0\}$. Pretpostavimo da je g invertibilna, klase C^1 i $Dg^{-1}(\mathbf{y})\neq 0$ za sve $\mathbf{y}\in K=g(\text{supp}(X,Y))$. Inverznu funkciju g^{-1} odredimo iz uvjeta $g^{-1}(g(x,y))=g^{-1}(u,v)=(x,y)$, odnosno iz sustava

$$\begin{aligned} u &= g_1(x,y)=x,\\ v &= g_2(x,y)=\psi(x,y), \end{aligned}$$

izrazimo x i y pomoću u i v. Tako dobijemo da je

$$\begin{aligned} x &= (g^{-1})_1(u,v)=u,\\ y &= (g^{-1})_2(u,v)=\phi(u,v), \end{aligned}$$

za neku funkciju ϕ. Sada slijedi da je

$$Dg^{-1}(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial(g^{-1})_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial(g^{-1})_1}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial(g^{-1})_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial(g^{-1})_2}{\partial v}(u,v)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0\\ \frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\end{vmatrix}=\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v).$$

Prema Teoremu IV.3.2 onda

$$f_{g(X,Y)}(u,v)=f_{X,\psi(X,Y)}(u,\phi(u,v))\left|\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right|,$$

pa je

$$f_{\psi(X,Y)}(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,\phi(u,v))\left|\frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\right| du.$$

Zadatak IV.3.6 Neka je (X,Y) neprekidan slučajni vektor s gustoćom f. Odredite funkcije gustoće slučajnih varijabli
(a) $X+Y$,
(b) $X-Y$,
(c) XY,
(d) Y/X.
■

Zadatak IV.3.7 Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable sa standardnom normalnom distribucijom. Pokažit da Y/X ima Cauchyjevu distribuciju. ■

Zadatak IV.3.8 Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s eksponencijalnom $\mathscr{E}(\lambda)$ distribucijom.
(a) Odredite gustoću slučajnog vektora $(Y_1,Y_2)=(X_1-X_2,X_1+X_2)$.
(b) Pokažite da Y_1 ima **Laplaceovu distribuciju** koja je opisana gustoćom

$$f_{Y_1}(y_1)=\frac{1}{2b}e^{-\frac{|y_1-\mu|}{b}},\quad y_1\in\mathbb{R},$$

pri čemu je $\mu=0$ i $b=1/\lambda$.
(c) Pokažite da Y_2 ima **gama distribuciju** $\Gamma(\alpha,\beta)$ koja je opisana gustoćom

$$f_{Y_2}(y_2)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y_2^{\alpha-1}e^{-\beta y_2}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y_2),$$

pri čemu je $\alpha=2$ i $\beta=\lambda$.

Zadatak IV.3.9 Neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne s distribucijom $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$, $\beta > 0$.

(a) Pokažite da je $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \beta)$.

(b) **χ^2 distribucija** s k **stupnjeva slobode** $\chi^2(k)$ ima funkciju gustoće

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Pokažite da ako je $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, onda $Z^2 \sim \chi^2(1)$.

(c) Pokažite da je $\Gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim \chi^2(k)$ i da ako su $Z_1, \dots, Z_n$ nezavisne $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, onda je $\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$.

Zadatak IV.3.10 Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ neprekidan slučajni vektor i $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regularna matrica. Pokažite da je slučajni vektor $\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X}$ neprekidan s funkcijom gustoće

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{X}}(A^{-1}\boldsymbol{y}) \frac{1}{|\det A|}.$$

IV.4. Uvjetna vjerojatnost i uvjetno očekivanje

Krenut ćemo od osnovne definicije uvjetne vjerojatnosti događaja. Zatim ćemo razmotriti isto za diskretne slučajne varijable te neprekidne slučajne varijable. Motivirat ćemo uvjetnu vjerojatnost uz σ-algebru. To će nas dovesti do definicije uvjetnog očekivanja uz danu σ-algebru koje u sebi pokriva sve što je potrebno.

IV.4.1 Uvjetna vjerojatnost i uvjetne distribucije

Definicija IV.4.1 Neka je $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $B \in \mathscr{F}$ takav da je $P(B) > 0$. Za $A \in \mathscr{F}$, **uvjetna vjerojatnost od A uz uvjet B** je

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Lako se provjeri da je s $P_B(A) = P(A \mid B)$ definirana vjerojatnost na $\mathscr{F}$ koju zovemo **uvjetna vjerojatnost**. Ako su A i B nezavisni, onda je

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Uvjetnu vjerojatnost možemo shvatiti u smislu promatrača koji ima djelomične informacije o ishodu pokusa. S jedne strane, $P(A)$ je vjerojatnost da ishod pokusa bude u A. Pretpostavimo da promatrač zna da je ishod pokusa u B. Uz ovu informaciju vjerojatnost da je ishod u A je sada $P(A \mid B)$.

Događaji koje promatramo obično su vezani uz slučajne varijable pa će nas tako prvenstveno zanimati uvjetne vjerojatnosti vezane uz slučajne varijable, odnosno uvjetne distribucije. Potpuna generalizacija koncepta uvjetne vjerojatnosti na distribucije nije odmah jasna u općenitom slučaju. Ovdje ćemo razmatrati posebno diskretne i neprekidne distribucije. U sljedećem poglavlju vidjet ćemo općeniti pristup.

IV.4.1.1 Diskretne distribucije

Neka je (X,Y) diskretan slučajni vektor i neka je $y \in \operatorname{supp}(Y)$ takav da je $P(Y=y)>0$. Tada su dobro definirane uvjetne vjerojatnosti

$$P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{IV.4.1}$$

Kako je

$$\sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} P(X=x \mid Y=y) = \frac{\sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P(Y=y)}{P(Y=y)} = 1,$$

nizom $P(X=x \mid Y=y)$, $x \in \operatorname{supp}(X)$, definirana je distribucija diskretne slučajne varijable koju često označavamo s $X\,|_{Y=y}$. Njenu distribuciju nazivamo **uvjetna distribucija** od X uz uvjet $Y=y$. **Uvjetna funkcija distribucije** definirana je s

$$F_{X|Y=y}(x) = \sum_{z \le x} P(X=z \mid Y=y).$$

Analogno se definira i uvjetna distribucija od Y uz uvjet $X=x$ za $x \in \operatorname{supp}(X)$.

Ako su X i Y nezavisne, onda su uvjetne distribucije jednake marginalnima, odnosno $X\,|_{Y=y} \overset{d}{=} X$ i $Y\,|_{X=x} \overset{d}{=} Y$ za sve $y \in \operatorname{supp}(X)$ i $x \in \operatorname{supp}(Y)$. S druge strane, ako su uvjetne distribucije jednake marginalnima, onda je

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x \mid Y=y)P(Y=y) = P(X=x)P(Y=y),$$

za sve $x \in \operatorname{supp}(X)$, $y \in \operatorname{supp}(Y)$. Dakle, X i Y su nezavisne, odnosno vrijedi i obrat.

> **Zadatak IV.4.1** Pravilan novčić baca se tri puta. Neka je X broj pisama u prva dva bacanja i Y broj pisama u drugom i trećem bacanju.
> (a) Odredite distribuciju od (X,Y).
> (b) Odredite distribucije od $X\,|_{Y=1}$ i $Y\,|_{X=0}$.
> (c) Jesu li X i Y nezavisne?
> ■

IV.4.1.2 Neprekidne distribucije

Prethodna definicija za diskretne slučajne varijable je potpuno razumljiva. Za neprekidan slučajni vektor s gustoćom f, uvjetne vjerojatnosti oblika $P(X \in A \mid Y \in B)$, za $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ takve da je $P(Y \in B) > 0$, možemo računati kao

$$P(X \in A \mid Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)} = \frac{\int_A \int_B f(x,y)\,dxdy}{\int_B f_Y(y)\,dy}. \tag{IV.4.2}$$

Međutim, kako za neprekidnu slučajnu varijablu Y definirati uvjetne vjerojatnosti uz uvjet $Y=y$, kada je to događaj vjerojatnosti nula? Ako bi vjerojatnosti u (IV.4.1) gledali kao vrijednosti diskretne funkcije gustoće, onda to sugerira sljedeću definiciju.

Neka je (X,Y) neprekidan slučajni vektor s gustoćom f. Za $y \in \mathbb{R}$ **uvjetna funkcija gustoće** od X uz uvjet $Y=y$ definirana je s

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, & f_Y(y) > 0, \\ 0, & f_Y(y) = 0, \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{IV.4.3}$$

a **uvjetna funkcija distribucije** s

$$F_{X|Y=y}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y=y}(z)\,dz.$$

Funkcija $f_{X|Y=y}$ je zaista funkcija gustoće jer je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x)dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}{f_Y(y)} = 1,$$

i ako su X i Y nezavisne onda je očito $f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$.

Pomoću uvjetnih gustoća definiramo

$$P(X \in A \mid Y = y) := \int_A f_{X|Y=y}(x)dx, \tag{IV.4.4}$$

i na taj je način zadana **uvjetna distribucija slučajne varijable X uvjetno na $Y = y$**. Analogno se definira i uvjetna gustoća i distribucija od Y uz uvjet $X = x$.

Zadatak IV.4.2 Odredite uvjetne funkcije gustoća za slučajni vektor (X,Y) iz
(a) Zadatka III.4.5,
(b) Zadatka IV.1.26.

■

Zadatak IV.4.3 Odredite uvjetne gustoće dvodimenzionalnog normalnog slučajnog vektora (vidi Zadatak III.4.4). Za X i Y standardne normalne s koeficijentom korelacije 0.5 izračunajte $P(X \le 1 \mid Y = 1)$ i $P(X \le 1 \mid Y = 2)$. ■

Zadatak IV.4.4 Pokažite da ako je (X,Y) diskretan ili neprekidan slučajni vektor vrijedi **formula potpune vjerojatnosti**

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|Y=y}(x)dF_Y(y).$$

■

Zadatak IV.4.5 Neka je $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$. Pokažite da je za $x, y > 0$

$$P(X > x + y \mid X > x) = P(X > y).$$

Ako X ima geometrijsku distribuciju, pokažite da za $m, n \in \mathbb{N}$

$$P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n).$$

■

Napomena IV.4.1 Za diskretne slučajne varijable definicija uvjetnih distribucija je potpuno prirodna jer u sebi sadrži uvjetne vjerojatnosti. Definiciju (IV.4.3) uveli smo koristeći intuiciju koja proizlazi iz slične relacije za diskretne slučajne varijable. S (IV.4.4), istim smo pristupom htjeli dati smisao uvjetnim vjerojatnostima oblika $P(X \in A \mid Y = y)$ za $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Problematično je što uvjetujemo na događaj $\{Y = y\}$ za koji je $P(Y = y) = 0$.

Treba imati na umu da, općenito, uvjetovanje na događaje vjerojatnosti nula nema jedinstvenu definiciju. Neka je B događaj za koji je $P(B) = 0$. Jedan pristup jest da za niz izmjerivih skupova (B_n) takvih da $B_n \downarrow B$ i $P(B_n) > 0$ stavimo

$$P(X \in A \mid B) = \lim_{n\to\infty} P(X \in A \mid B_n),$$

ako taj limes postoji. Vjerojatnosti s desne strane su dobro definirane s (IV.4.2). No time nije sve riješeno. Naime, gornji limes može ovisiti u izboru niza (B_n) (vidi Problem IV.45).

Sljedeći primjer daje još jedan problem koji ilustrira da problem računanja uvjetnih vjerojatnosti uz uvjet vjerojatnosti nula ne mora imati jedinstveno rješenje (poznato kao Borelov paradoks). Ipak, ako uvjetujemo na događaje oblika $Y = y$ takav problem se ne pojavljuje. S pristupom koji ćemo vidjeti u sljedećim poglavljima uvodi se uvjetovanje na σ-algebre kao skup informacija umjesto uvjetovanja na događaje.

■ **Primjer IV.4.1** Neka su X i Y nezavisne standardne normalne slučajne varijable i pretpostavimo da prethodnim pristupom želimo izračunati $P(X \in A \mid X = Y)$.

Neka je $(X, Z_1) = (X, X - Y)$ slučajni vektor. Tada je $\{X = Y\} = \{Z_1 = 0\}$. Prema Zadatku IV.3.6 (b), (X, Z_1) ima funkciju gustoće

$$f_{X,Z_1}(u,v) = f_{X,Y}(u,u-v) = f_X(u)f_Y(u-v),$$

te je

$$f_{Z_1}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,u-v)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(u-v)du.$$

Koristeći (IV.4.4) imali bi

$$\begin{aligned} P(X \in A \mid Z_1 = 0) &= \frac{\int_A f_{X,Z_1}(x,0)dx}{f_{Z_1}(0)} = \frac{\int_A f_X(x)f_Y(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(u)du} \\ &= \frac{\int_A \frac{1}{2\pi}e^{-x^2}dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}e^{-x^2}dx} = \frac{\int_A \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv} \\ &= \frac{\int_A \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy}{\sqrt{\pi}} = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \end{aligned}$$

Dakle, X uvjetno na $\{X = Y\} = \{Z_1 = 0\}$ ima standardnu normalnu distribuciju.

Stavimo sada da je $(X, Z_2) = (X, Y/X)$. Prema Zadatku IV.3.6 (d), (X, Z_2) ima funkciju gustoće

$$f_{X,Z_2}(u,v) = f_{X,Y}(u,uv)|u| = f_X(u)f_Y(uv)|u|,$$

dok prema Zadatku IV.3.7 Z_2 ima Cauchyjevu distribuciju pa je

$$f_{Z_2}(v) = \frac{1}{\pi(1+v^2)}.$$

Sada bi iz (IV.4.4) imali

$$\begin{aligned} P(X \in A \mid Z_2 = 1) &= \frac{\int_A f_{X,Z_2}(x,1)dx}{f_{Z_1}(1)} = \frac{\int_A f_X(x)f_Y(x)|x|dx}{\frac{1}{2\pi}} \\ &= 2\pi \int_A \frac{1}{2\pi}e^{-x^2}|x|dx = \int_A |x|e^{-x^2}dx, \end{aligned}$$

što svakako nije normalna distribucija. Ali s obzirom da je $\{X = Y\} = \{Z_1 = 0\} = \{Z_2 = 1\}$, vidimo da uvjetovanjem na isti događaj dobijemo različite uvjetne vjerojatnosti.

Napomena IV.4.2 Primijetimo isto tako da smo u prethodnom uvijek pretpostavljali da je (X, Y) diskretan ili neprekidan slučajni vektor. Pretpostavimo da imamo sljedeći pokus. Biramo y iz uniformne distribucije $Y \sim \mathscr{U}(0, 1)$, i zatim bacamo novčić u kojem je vjerojatnost pisma jednaka y, odnosno X je Bernoullijeva s parametrom y. Trebalo bi biti $P(X = 1 \mid Y = y) = y$, ali prethodne definicije ne pokrivaju ovakav slučaj gdje je jedna slučajna varijabla diskretna a druga neprekidna.

IV.4.2 Uvjetno očekivanje u odnosu na slučajnu varijablu

Očekivanje indikatora je vjerojatnost pa uvjetnu vjerojatnost možemo zapisati i kao

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\mathrm{E}\,\mathbf{1}_{A\cap B}}{\mathrm{E}\,\mathbf{1}_B} = \frac{\mathrm{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)}{\mathrm{E}\,\mathbf{1}_B}.$$

Umjesto indikatora, možemo promatrati i druge slučajne varijable. Ako zamijenimo $\mathbf{1}_A$ sa slučajnom varijablom X, $\mathrm{E}\,|X| < \infty$, dolazimo do **očekivanja od X uz uvjet B**

$$\mathrm{E}(X \mid B) = \frac{\mathrm{E}(X\mathbf{1}_B)}{P(B)}. \tag{IV.4.5}$$

Pri tome vrijedi da je $\mathrm{E}(X \mid B) = \int X dP_B$, gdje je P_B uvjetna vjerojatnost definirana s $P_B(A) = P(A \mid B)$ (vidi Problem IV.46).

Zadatak IV.4.6 Neka je X ishod bacanja pravilne kockice. Izračunajte očekivanje od X ako znamo da je pao paran broj. ■

Događaj B će obično biti opisan nekom slučajnom varijablom. Osim toga, slično kao što očekivanjem sažimamo informacije o distribuciji, tako bi htjeli sažeti informacije o uvjetnoj distribuciji. Ako je (X,Y) diskretan slučajni vektor i $y \in \mathrm{supp}(Y)$, onda je **uvjetno očekivanje od X uz uvjet $Y = y$** dano s

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \sum_{x \in \mathrm{supp}(X)} xP(X = x \mid Y = y).$$

Za neprekidan slučajni vektor (X,Y), **uvjetno očekivanje od X uz uvjet $Y = y$** definiramo s

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x)dx.$$

Funkciju $g(y) = \mathrm{E}(X \mid Y = y)$ još nazivamo i **regresijska funkcija**. Ona je izmjeriva, pa njenom kompozicijom s Y dobivamo novu slučajnu varijablu

$$\mathrm{E}(X|Y) = g(Y) \tag{IV.4.6}$$

koju nazivamo **uvjetno očekivanje od X za dano Y**. Svojstva uvjetnog očekivanja razmotrit ćemo na općenitijoj definiciji u sljedećem poglavlju.

Zadatak IV.4.7 U bacanju dvije pravilne kockice neka je X manji, a Y veći od brojeva koji su pali na kockicama.

(a) Odredite distribuciju od (X,Y).

(b) Izračunajte $\mathrm{E}(X \mid Y = y)$.

■

Zadatak IV.4.8 Neka je (X,Y) neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f(x,y) = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y} - y} \mathbf{1}_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(x,y).$$

(a) Izračunajte $P(X > 1 \mid Y = y)$ za $y > 0$.

(b) Izračunajte $\mathrm{E}(X \mid Y)$.

■

Zadatak IV.4.9 U kliničkom ispitivanju nekog cjepiva neka je N_p broj zaraženih među onima koji su primili placebo, N_c broj zaraženih među onima koji su primili cjepivo i $N = N_p + N_c$ ukupan broj zaraženih. N_p i N_c su nezavisne s Poissonovom distribucijom s parametrima λ_p i λ_c, redom.

(a) Odredite uvjetnu distribuciju broja zaraženih među placebo skupinom ako je ukupan broj zaraženih jednak n.

(b) Odredite očekivani broj zaraženih u placebo skupini uz dani ukupan broj zaraženih N.

■

Zadatak IV.4.10 Neka je Y visina slučajnog odabranog oca i X visina njegovog sina. I X i Y imaju $\mathcal{N}(180, 7^2)$ distribuciju, a koeficijent korelacije je $\rho = 0.3$. Kolika je očekivana visina sina ako je otac visok 190cm? ■

Zadatak IV.4.11 Neka je (X,Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f(x,y) = \frac{1}{2} y e^{-xy} \mathbf{1}_{(0,\infty)\times(0,2)}(x,y).$$

Odredite $\mathrm{E}(e^{X/2} \mid Y = 1)$. ■

IV.4.3 Uvjetno očekivanje u odnosu na σ-algebru

Prvo ćemo uvesti sljedeću motivaciju za uvjetovanje u odnosu na σ-algebru.

IV.4.3.1 Poopćenje osnovne definicije

Neka je ω ishod pokusa koji je nepoznat promatraču. Vjerojatnost da je ω u događaju A je $P(A)$. Ako promatrač zna da je ω u B, onda je vjerojatnost da je ω u A jednaka $P(A \mid B)$. S druge strane, ako promatrač zna da se ω nalazi u B^c, onda je vjerojatnost događaja A jednaka $P(A \mid B^c)$. Zajednički bi to mogli zapisati kao

$$h(\omega) = \begin{cases} P(A \mid B), & \omega \in B, \\ P(A \mid B^c), & \omega \in B^c, \end{cases}$$

Dakle, ako promatrač dobije informaciju da je ω u B ili B^c, onda je za njega nova vjerojatnost da je $\omega \in A$ jednaka $h(\omega)$. Promatrač ne zna ω, ali može izračunati $h(\omega)$ jer zna je li se dogodio B ili B^c.

B i B^c čine jednu particiju skupa Ω. Neka je sada $B_1, B_2, \ldots$ konačna ili prebrojivo beskonačna particija od Ω i $\mathscr{G}$ σ-algebra generirana tom familijom. Tada možemo definirati

$$h(\omega) = P(A \mid B_i), \text{ ako je } \omega \in B_i, \ i = 1, 2, \ldots$$

Ako promatrač sazna koji B_i sadrži ω (dogodio se), onda je njegova nova vjerojatnost događaja A jednaka $h(\omega)$. Particiju $\{B_i\}$ odnosno σ-algebru $\mathscr{G}$ možemo shvatiti kao poseban pokus, a saznati koji od B_i sadrži ω je kao saznati ishod tog pokusa. U tom smislu $\mathscr{G}$ možemo shvatiti kao **skup informacija**.

Napomena IV.4.3 Zamislimo da netko zna ishod pokusa ω i neće nam reći koji je ishod, ali će dopustiti određena pitanja s odgovorima da ili ne. Primjerice, je li $\omega \in B$ ili nije, je kao pitanje je li se dogodio B ili nije. Ako je $B \in \mathscr{G}$, onda je to dopušteno pitanje, odnosno pitanje na koje možemo odgovoriti na osnovu *informacija iz* $\mathscr{G}$.

Skup informacija možemo intuitivno opisati kroz skup svih pitanja koja možemo odgovoriti pomoću tog skupa informacija. Primjerice, na osnovu enciklopedije iz 2000. godine znamo odgovor na pitanje „Je li Drugi svjetski rat završio 1945. godine?”, ali ne znamo odgovor na pitanje „Je li Hrvatska viceprvak svijeta 2018. godine?”.

Zašto je skup informacija σ-algebra? Pa ako znamo odgovoriti na „Je li se dogodio B?”, onda znamo odgovoriti i na „B se nije dogodio?”. Dakle, $\mathscr{G}$ je zatvorena na komplementiranje. Nadalje, ako znamo odgovor vezan uz A i B, onda znamo i za njihovu uniju „Je li se dogodio A ili B?”. Dakle, $\mathscr{G}$ je zatvorena na konačne unije. Za zatvorenost na prebrojivo beskonačne unije, možemo razmišljati o nizu pitanja. Primjerice, ako znamo odgovoriti na niz pitanja „Može li čovjek biti visok $180 - 1/n$ cm?” za $n \in \mathbb{N}$, onda možemo odgovoriti i na pitanje „Može li čovjek biti visok 180 cm?”

Funkciju $h(\omega)$ (slučajnu varijablu) ima smisla promatrati kao uvjetnu vjerojatnost od A uz uvjet $\mathscr{G}$. Napomenimo još da ako je $P(B_i) = 0$ za neki B_i, $P(A \mid B_i)$ nije dobro definirano pa u tom slučaju možemo staviti da je h na takvom B_i jednaka nekoj konstanti. Sve takve funkcije će biti jednake g.s., a za svaku on njih kažemo da je jedna verzija.

Primijetimo da ovako definirana h ima sljedeća svojstva:

(i) h je $\mathscr{G}$ izmjeriva – za $U \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $h^{-1}(U) = \{\omega : h(\omega) \in U\}$ je unija onih B_i na kojima h postiže vrijednost koja je u U, a to je svakako $\mathscr{G}$-izmjeriv skup.

(ii) Za svaki $G \in \mathscr{G}$ je

$$\int_G \mathbf{1}_A dP = \int_G h dP,$$

odnosno $P(A \cap G) = \int_G h dP$. Naime, G je disjunktna unija $G = \cup_k B_{i_k}$ pa je

$$P(A \cap G) = \sum_k P(A \cap B_{i_k}) = \sum_k P(A \mid B_{i_k}) P(B_{i_k}) = \sum_k \int_{B_{i_k}} h dP = \int_G h dP.$$

Već smo vidjeli da uvjetnu vjerojatnost možemo promatrati i kao uvjetno očekivanje indikatora. Taj pristup i prethodna motivacija vode nas do općenite definicije u sljedećem dijelu.

IV.4.3.2 Definicija

Definicija IV.4.2 Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, $\mathrm{E}|X| < \infty$ i $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ σ-algebra. **Uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathscr{G}$** je svaka slučajna varijabla Y za koju vrijedi

(uo-i) Y je $\mathscr{G}$-izmjeriva,

(uo-ii) za svaki $A \in \mathscr{G}$

$$\int_A X dP = \int_A Y dP.$$

U tom slučaju Y označavamo kao $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$.

Uočimo da je $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$ slučajna varijabla jer je $\mathscr{G}$-izmjeriva, a $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ pa je i $\mathscr{F}$-izmjeriva. Svojstvo (uo-ii) još možemo zapisati kao

$$\mathrm{E}(X\mathbf{1}_A) = \mathrm{E}(Y\mathbf{1}_A) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})\mathbf{1}_A),$$

za sve $A \in \mathscr{G}$.

Teorem IV.4.4 Uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathscr{G}$ postoji, ima konačno očekivanje i jedinstveno je g.s.

Dokaz. Neka je $X \geq 0$. Iz Zadatka IV.1.5 slijedi da je $\mu(A) = \int_A X dP$ mjera na $\mathscr{G}$ i za svaki $A \in \mathscr{G}$, $P(A) = 0 \implies \mu(A) = 0$, odnosno $\mu \ll P$. Prema Radon-Nikodymovom teoremu (vidi Napomenu III.3.5) postoji $\mathscr{G}$-izmjeriva funkcija Y za koju vrijedi $\mu(A) = \int_A Y dP$, odnosno Y je uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathscr{G}$. Za općeniti slučaj, $\mathrm{E}(X^+ \mid \mathscr{G}) - \mathrm{E}(X^- \mid \mathscr{G})$ zadovoljava uvjete definicije. Dakle, uvjetno očekivanje postoji.

Prema Propoziciji IV.1.2 (vii), iz svojstva (uo-ii) slijedi da je uvjetno očekivanje jedinstveno g.s.

Ako je $Y = \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$, onda imamo

$$\int Y^+ dP = \int_{\{Y>0\}} Y dP = \int_{\{Y>0\}} X dP \leq \int_{\{Y>0\}} |X| dP < \infty,$$
$$\int Y^- dP = \int_{\{Y<0\}} (-Y) dP = \int_{\{Y<0\}} (-X) dP \leq \int_{\{Y<0\}} |X| dP < \infty,$$

pa je $\mathrm{E}|Y| < \infty$. ■

Sve jednakosti s uvjetnim očekivanjem zapravo vrijede g.s. Za konkretnu Y koja zadovoljava Definiciju IV.4.2 kažemo da je **verzija** od $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$. Radi jednostavnosti ubuduće ćemo često ispustiti g.s. kod jednakosti koje uključuju uvjetno očekivanje.

Objasnili smo da na σ-algebru gledamo kao na skup informacija. U kontekstu uvjetnog očekivanja $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$, σ-algebra $\mathscr{G}$ predstavlja informacije koja su nam dostupne. Uvjetno očekivanje $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$ je najbolje što možemo reći o X na osnovu informacija koje imamo. Sljedeći primjeri to ilustriraju. Princip računanja u njima je *pogoditi* što bi bilo uvjetno očekivanje i onda provjeriti uvjete (uo-i) i (uo-ii) Definicije IV.4.2.

■ Primjer IV.4.2

(a) Ako je X $\mathscr{G}$-izmjeriva, onda je

$$\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) = X,$$

odnosno, ako znamo X, najbolje što možemo reći o X je X. Svojstvo (uo-ii) uvijek vrijedi za X. Dakle, jedino što X sprječava da bude uvjetno očekivanje je (uo-i).

(b) Ako je $X = c$ g.s., onda je $E(X \mid \mathscr{G}) = c$, što slijedi iz (a).

(c) Ako su X i $\mathscr{F}$ nezavisne, u smislu da za svaki $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ i $A \in \mathscr{G}$ vrijedi $P(\{X \in B\} \cap A) = P(X \in B)P(A)$, onda je

$$\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) = \mathrm{E}X.$$

Ovo je situacija suprotna od (a) gdje $\mathscr{G}$ sadrži sve informacije o X, dok ovdje $\mathscr{G}$ ne sadrži nikakve informacije o X. Dakle, ako ne znamo ništa o X, onda je $\mathrm{E}X$ najbolje što možemo reći o X. Naime, (uo-i) vrijedi jer je $\mathrm{E}X$ konstanta, dok za $A \in \mathscr{G}$ (uo-ii) slijedi iz nezavisnosti

$$\int_A X dP = \mathrm{E}(X \mathbf{1}_A) = \mathrm{E}X\, \mathrm{E}\mathbf{1}_A = \int_A \mathrm{E}X dP.$$

(d) Ako je $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, onda je

$$\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) = \mathrm{E}X.$$

IV.4.3.3 Uvjetna vjerojatnost u odnosu na σ-algebru

Prije definicije promotrit ćemo kako je definicija uvjetnog očekivanja povezana s posebnim slučajem razmatranim u Poglavlju IV.4.3.1.

■ **Primjer IV.4.3** Neka je $\{B_i\}$ prebrojiva particija od Ω, $P(B_i) > 0$ i $\mathscr{G} = \sigma(\{B_i\})$. Tada je

$$\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) = \sum_i \mathrm{E}(X \mid B_i)\mathbf{1}_{B_i} = \sum_i \frac{\mathrm{E}(X\mathbf{1}_{B_i})}{P(B_i)}\mathbf{1}_{B_i}, \tag{IV.4.7}$$

gdje je $\mathrm{E}(X \mid B_i) = E(X\mathbf{1}_{B_i})/P(B_i)$ definirano u (IV.4.5). Dakle, ako je $\omega \in B_i$ (B_i se dogodio), onda je uvjetno očekivanje $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$ uz ovakvu σ-algebru jednako uvjetnom očekivanju u odnosu na događaj $\mathrm{E}(X \mid B_i)$. Razlika je što je s $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$ opisano uvjetno očekivanje ne samo uz jedan događaj kao uvjet, nego uz sve koji čine particiju.

Kako bi vidjeli da IV.4.7 zaista vrijedi, uočimo da se radi o jednostavnoj funkciji (osim što suma eventualno može imati beskonačno mnogo članova), a $B_i \in \mathscr{G}$ pa je (uo-i) zadovoljeno. Uvjet (uo-ii) dovoljno je provjeriti za proizvoljni B_i jer općenito slijedi iz linearnosti. Za $A = B_i$ imamo

$$\int_{B_i} \frac{\mathrm{E}(X\mathbf{1}_{B_i})}{P(B_i)} dP = \frac{\mathrm{E}(X\mathbf{1}_{B_i})}{P(B_i)} \int_{B_i} dP = \mathrm{E}(X\mathbf{1}_{B_i}) = \int_{B_i} X dP.$$

■ **Primjer IV.4.4** Ako u prethodnom primjeru uzmemo particiju B, B^c, za $B \in \mathscr{F}$, $P(B > 0)$, onda je $\mathscr{G} = \sigma(\{B\}) = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ i

$$\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})(\omega) = \begin{cases} \mathrm{E}(X \mid B), \, \omega \in B, \\ \mathrm{E}(X \mid B^c), \, \omega \in B^c, \end{cases} = \begin{cases} \frac{E(X\mathbf{1}_B)}{P(B)}, \, \omega \in B, \\ \frac{E(X\mathbf{1}_{B^c})}{P(B^c)}, \, \omega \in B^c. \end{cases}$$

Dakle, Definicija IV.4.2 je u skladu s uvjetnim očekivanjem u odnosu na događaj definiranim u (IV.4.5).

Kao motivaciju za promatranje uvjetnih vjerojatnosti u odnosu na σ-algebru promatrali smo slučaj kad je σ-algebra generirana particijom od Ω. Sada možemo uvesti opću definiciju.

Definicija IV.4.3 Za σ-algebru $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ i događaj $A \in \mathscr{F}$ **uvjetna vjerojatnost od A uz dano $\mathscr{G}$** je

$$P(A \mid \mathscr{G}) = \mathrm{E}(\mathbf{1}_A \mid \mathscr{G}).$$

Prema Primjeru IV.4.4, ako je $\mathscr{G} = \sigma(\{B\}) = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$, onda je

$$P(A \mid \mathscr{G})(\omega) = \begin{cases} \frac{E(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)}{P(B)}, \, \omega \in B, \\ \frac{E(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{B^c})}{P(B^c)}, \, \omega \in B^c, \end{cases} = \begin{cases} \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \, \omega \in B, \\ \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)}, \, \omega \in B^c, \end{cases} = \begin{cases} P(A \mid B), \, \omega \in B, \\ P(A \mid B^c), \, \omega \in B^c. \end{cases}$$

Ako su A i B nezavisni, onda su $\mathbf{1}_A$ i $\mathscr{G} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ nezavisni pa je prema Primjeru IV.4.2

$$P(A \mid \mathscr{G}) = \mathrm{E}\,\mathbf{1}_A = P(A).$$

Zadatak IV.4.12 Pokažite da za $A \in \mathscr{F}$ i $B \in \mathscr{G}$ vrijedi Bayesova formula

$$P(B \mid A) = \frac{\int_B P(A \mid \mathscr{G}) dP}{\int_\Omega P(A \mid \mathscr{G}) dP}.$$

Posebno zapišite za slučaj $\mathscr{G} = \sigma(\{B\})$. ■

IV.4.3.4 Veza s prethodnom definicijom

Definicija uvjetnog očekivanja IV.4.2 pokriva i uvjetno očekivanje u odnosu na slučajnu varijablu na sljedeći način.

Definicija IV.4.4 Za slučajne varijable X i Y, $\mathrm{E}|X| < \infty$, **uvjetno očekivanje od X uz dano Y** je

$$\mathrm{E}(X \mid Y) = \mathrm{E}(X \mid \sigma(Y)).$$

Uvjetno očekivanje uz familiju $\{Y_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ slučajnih varijabli definiramo kao

$$\mathrm{E}(X \mid Y_\lambda, \lambda \in \Lambda) = \mathrm{E}(X \mid \sigma(Y_\lambda, \lambda \in \Lambda))$$

Prvo ćemo vidjeti kako ta definicija odgovara definiciji uvjetnog očekivanja i uvjetnih distribucija (IV.4.1) za diskretne slučajne varijable.

■ **Primjer IV.4.5** Neka je (X,Y) diskretan slučajni vektor i $\mathrm{supp}(X) = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\mathrm{supp}(Y) = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Tada familija događaja $\{Y = y_i\}$, $i = 1,2,\ldots$, čini jednu particiju of Ω i $\sigma(Y) = \sigma(\{Y = y_i\}, i = 1,2,\ldots)$. Prema Primjeru IV.4.3 je onda

$$\mathrm{E}(X \mid \sigma(Y)) = \sum_i \frac{\mathrm{E}(X\mathbf{1}_{\{Y=y_i\}})}{P(Y=y_i)} \mathbf{1}_{\{Y=y_i\}} = g(Y)$$

za funkciju g definiranu s

$$g(y) = \sum_i \frac{\mathrm{E}(X\mathbf{1}_{\{Y=y_i\}})}{P(Y=y_i)} \mathbf{1}_{\{y=y_i\}} = \begin{cases} \frac{\mathrm{E}(X\mathbf{1}_{\{Y=y_i\}})}{P(Y=y_i)}, & \text{ako je } y = y_i, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uočimo da je

$$\mathrm{E}(X\mathbf{1}_{\{Y=y_i\}}) = \sum_j x_j P(X\mathbf{1}_{\{Y=y_i\}} = x_j) = \sum_j x_j P(X = x_j, Y = y_i),$$

pa je za $y = y_i \in \mathrm{supp}(Y)$

$$g(y) = \frac{\sum_j x_j P(X = x_j, Y = y)}{P(Y = y)} = \sum_{x \in \mathrm{supp}(X)} x P(X = x \mid Y = y) = \mathrm{E}(X \mid Y = y).$$

Dakle, definicija je u skladu s (IV.4.6).

Za neprekidne slučajne varijable imamo sljedeće.

■ **Primjer IV.4.6** Neka je (X,Y) neprekidan slučajni vektor s funkcijom gustoće f. Pokazat ćemo da je

$$\mathrm{E}(X \mid \sigma(Y)) = g(Y)$$

za

$$g(y) = \mathrm{E}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x)dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dx}{f_Y(y)}.$$

Funkcija g je izmjeriva pa je $g(Y)$ svakako $\sigma(Y)$ izmjerivo. Za uvjet (uo-ii), ako je $A \in \sigma(Y)$, onda je $A = \{Y \in B\}$ za neki $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ i imamo

$$\begin{aligned} \int_A g(Y)dP &= \mathrm{E}(g(Y)\mathbf{1}_A) = \mathrm{E}(g(Y)\mathbf{1}_B(Y)) = \int_B g(y) f_Y(y)dy = \int_B \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\mathbf{1}_B(y) f(x,y)dxdy = \mathrm{E}(X\mathbf{1}_B(Y)) = \mathrm{E}(X\mathbf{1}_A) = \int_A XdP. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathrm{E}(X \mid \sigma(Y))$ je jednako ranije definiranom $\mathrm{E}(X \mid Y)$.

IV.4.4 Svojstva uvjetnog očekivanja

Teorem IV.4.5 Neka su X i Y slučajne varijable, $\mathrm{E}|X| < \infty$, $\mathrm{E}|Y| < \infty$, i $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2 \subseteq \mathscr{F}$ σ-algebre.

(i) **linearnost**: za $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathrm{E}(aX + bY \mid \mathscr{G}) = a\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) + b\mathrm{E}(Y \mid \mathscr{G}).$$

(ii) **Monotonost**: Ako je $X \leq Y$, onda je

$$\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) \leq \mathrm{E}(Y \mid \mathscr{G}).$$

Posebno, ako je $X \geq 0$, onda je $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) \geq 0$.

(iii) **Pravilo o dvostrukom očekivanju**[a]:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})\right) = \mathrm{E}X.$$

(iv) **Manja σ-algebra pobjeđuje**[b]: ako je $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$, onda je

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}_1) \mid \mathscr{G}_2\right) = \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}_1),$$
$$\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}_2) \mid \mathscr{G}_1\right) = \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}_1).$$

(v) **Ono što znamo može *izaći van***: Ako je Y $\mathscr{G}$-izmjeriva i $\mathrm{E}|Y| < \infty$, $\mathrm{E}|XY| < \infty$, onda

$$\mathrm{E}(XY \mid \mathscr{G}) = Y\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}).$$

(vi) **Pravilo o supstituciji**: Ako su X i Y nezavisne i $\mathrm{E}|\phi(X,Y)| < \infty$, onda je

$$\mathrm{E}\left(\phi(X,Y) \mid Y\right) = h(Y),$$

gdje je $h(y) = \mathrm{E}(\phi(X,y))$.

[a] Poznato još i kao teorem o dvostrukom očekivanju ili formula potpunog očekivanja.
[b] Poznato još i kao *tower property*.

Dokaz. (i) Treba provjeriti da desna strana zadovoljava definiciju uvjetnog očekivanja. Očito je $\mathscr{G}$-izmjeriva. Za (uo-ii), uočimo da za $A \in \mathscr{G}$

$$\begin{aligned}\int_A (a\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) + b\mathrm{E}(Y \mid \mathscr{G}))\,dP &= a\int_A \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})dP + b\int_A \mathrm{E}(Y \mid \mathscr{G})dP \\ &= a\int_A X\,dP + b\int_A Y\,dP = \int_A (aX + bY)dP.\end{aligned}$$

(ii) Iz definicije imamo

$$\int_A \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})dP = \int_A X\,dP \leq \int_A Y\,dP = \int_A \mathrm{E}(Y \mid \mathscr{G})dP,$$

pa tvrdnja slijedi iz Propozicije IV.1.2 (vi).

(iii) Slijedi direktno iz svojstva (uo-ii) definicije za $A = \Omega$.

(iv) Prva jednakost slijedi jer je $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}_1)$ $\mathscr{G}_2$-izmjeriva. Za drugu jednakost uočimo da je $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}_1)$ $\mathscr{G}_1$-izmjeriva i za $A \in \mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$ je

$$\int_A \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}_1)dP = \int_A X\,dP = \int_A \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}_2)dP.$$

(v) Treba provjeriti uvjete definicije za $Y\,\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$. Po pretpostavci, Y je $\mathscr{G}$-izmjeriva, i po definiciji je $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$ $\mathscr{G}$-izmjeriva pa je i $Y\,\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$ $\mathscr{G}$-izmjeriva. Za pokazati (uo-ii) idemo standardnom procedurom. Neka je $Y = \mathbf{1}_B$ za $B \in \mathscr{G}$. Tada za $A \in \mathscr{G}$

$$\int_A \mathbf{1}_B\,\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})dP = \int_{A\cap B} \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})dP = \int_{A\cap B} X dP = \int_A \mathbf{1}_B X dP.$$

Dakle, (uo-ii) vrijedi za indikatore, pa po linearnosti slijedi i za jednostavne. Za $X, Y \geq 0$ i Y_n jednostavne takve da $Y_n \uparrow Y$, korištenjem teorema o monotonoj konvergenciji

$$\int_A Y\,\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})dP = \lim_{n\to\infty} \int_A Y_n\,\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})dP = \lim_{n\to\infty} \int_A Y_n X dP = \int_A Y X dP.$$

Za općenitu tvrdnju treba rastaviti još na pozitivni i negativni dio.

(vi) Jasno je da je $h(Y)$ $\sigma(Y)$-izmjeriva. Za provjeriti (uo-ii), neka je $A \in \sigma(Y)$. Onda je za neki $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $A = \{Y \in B\}$ i slijedi

$$\begin{aligned}
\int_A \phi(X,Y)dP &= \int \phi(X,Y)\mathbf{1}_B(Y)dP = \mathrm{E}(\phi(X,Y)\mathbf{1}_B(Y)) \\
&= \int\int \phi(x,y)\mathbf{1}_B(y)dF_X(x)dF_Y(y) = \int \mathbf{1}_B(y)\left(\int \phi(x,y)dF_X(x)\right)dF_Y(y) \\
&= \int \mathbf{1}_B(y)\,\mathrm{E}(\phi(X,y))dF_Y(y) = \int \mathbf{1}_B(y)h(y)dF_Y(y) \\
&= \mathrm{E}(h(Y)\mathbf{1}_B(y)) = \int_B h(Y)dP.
\end{aligned}$$

■

Napomena IV.4.6 Vrijedi još jednom ponoviti da u prethodnom jednakosti i nejednakosti vezane uz uvjetno očekivanje vrijede g.s. što nismo posebno naglašavali radi preglednosti.

Spomenuli smo da na uvjetno očekivanje $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$ možemo gledati kao na najbolje što možemo reći o X na osnovu informacija iz $\mathscr{G}$. Sljedeći teorem to potvrđuje i pokazuje da je $\mathrm{E}(X \mid \mathscr{F})$ slučajna varijabla koja minimizira očekivano kvadratno odstupanje.

Teorem IV.4.7 Neka je $\mathrm{E}X^2 < \infty$. Tada za svaku $\mathscr{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Y takvu da je $\mathrm{E}Y^2 < \infty$ vrijedi

$$\mathrm{E}(X-Y)^2 \geq \mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})\right)^2.$$

Dokaz. Neka je Z proizvoljna $\mathscr{G}$-izmjeriva i $\mathrm{E}Z^2 < \infty$. Tada je $\mathrm{E}|XZ| < \infty$ po Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti i po Teoremu IV.4.5 (v) je

$$Z\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) = \mathrm{E}(XZ \mid \mathscr{G}).$$

Primijenimo li očekivanje slijedi

$$\mathrm{E}\left(Z\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(XZ \mid \mathscr{G})\right) = \mathrm{E}(XZ),$$

odnosno

$$\mathrm{E}\left(Z(X - \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}))\right) = 0.$$

Za zadanu $\mathscr{G}$-izmjerivu slučajnu varijablu Y je $Z = \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) - Y$ $\mathscr{G}$-izmjeriva i

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X-Y)^2 &= \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) + Z)^2 \\ &= \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}))^2 + 2\,\mathrm{E}\left(Z(X - \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}))\right) + \mathrm{E}Z^2 \\ &= \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}))^2 + \mathrm{E}Z^2,\end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju i pokazuje da se jednakost postiže ako i samo ako je $Z = \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) - Y = 0$ g.s. Upitno je jedino još je li $\mathrm{E}Z^2 = \mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}) - Y)^2 < \infty$, no to slijedi iz Problema IV.48. ■

Zadatak IV.4.13 Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable s Bernoullijevom distribucijom. Izračunajte $\mathrm{E}(X \mid Y)$ i $\mathrm{E}(X \mid 0.00001X + Y)$ i komentirajte. ▪

Zadatak IV.4.14 Neka su $X_1, \ldots, X_n$ n.j.d., $\mathrm{E}|X_1| < \infty$ i $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Pokažite da je $\mathrm{E}(X_1 \mid \overline{X}_n) = \overline{X}_n$. ▪

Zadatak IV.4.15 Neka su X, Y nezavisne standardne normalne. Izračunajte $\mathrm{E}(X \mid X+Y)$ i $\mathrm{E}(X^2 \mid X+Y)$ ▪

Pravilo o dvostrukom očekivanju može se iskoristiti za računanje očekivanja slučajne varijable. Naime, nekad je jednostavnije izračunati uvjetno očekivanje $g(y) = \mathrm{E}(X \mid Y = y)$ za neku drugu slučajnu varijablu Y i naći distribuciju od Y, nego izravno izračunati $\mathrm{E}X$. U takvim slučajevima, $\mathrm{E}X$ možemo izračunati kao

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X \mid Y)\right) = \mathrm{E}\left(g(Y)\right) = \sum_{y \in \mathrm{supp}(Y)} \mathrm{E}(X \mid Y = y) P(Y = y),$$

ako je Y diskretna, odnosno

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X \mid Y)\right) = \mathrm{E}\left(g(Y)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(X \mid Y = y) f_Y(y)\, dy,$$

ako je Y neprekidna.

Zadatak IV.4.16 Ako je $\mathrm{E}Y = \mu$, $\mathrm{Var}\,Y = \sigma^2$ i $\mathrm{E}(X \mid Y = y) = ay + b$, izračunajte $\mathrm{E}(XY)$. ▪

Zadatak IV.4.17 Miš u labirintu ima tri puta. Prvi put ga vodi na slobodu za 3 minute. Drugi put ga vraća na početak labirinta nakon 5 minuta. Treći put ga vraća na početak labirinta nakon 7 minuta. Svaki put kad bira put, odabir je slučajan i svaki odabir je jednako vjerojatan. Koliko je očekivano vrijeme koje će miš provesti u labirintu? ▪

Zadatak IV.4.18 Neka je $X \sim \mathscr{U}(0, 10)$ i uvjetna funkcija gustoće od Y uz uvjet $X = x$ je jednaka

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 \le y \le x, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Izračunajte $\mathrm{E}Y$. ■

Zadatak IV.4.19 **Uvjetnu varijancu slučajne varijable X za dano $\mathcal{G}$** definiramo kao

$$\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G}) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X \mid \mathcal{G}))^2 \mid \mathcal{G}\right).$$

Pokažite da je

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G}) &= \mathrm{E}(X^2 \mid \mathcal{G}) - (\mathrm{E}(X \mid \mathcal{G}))^2 \\ \mathrm{Var}\, X &= \mathrm{E}\left(\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G})\right) + \mathrm{Var}\left(\mathrm{E}(X \mid \mathcal{G})\right). \end{aligned}$$

■

Zadatak IV.4.20 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz i N slučajna varijabla nezavisna od $(X_n, n \in \mathbb{N})$ takva da je $\mathrm{supp}(N) = \mathbb{N}$.

(a) Ako je $\mathrm{E}|X_1| < \infty$ i $\mathrm{E}N < \infty$, onda vrijedi

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathrm{E}X_1 \cdot \mathrm{E}N.$$

(b) Ako je $\mathrm{E}X_1^2 < \infty$ i $\mathrm{E}N^2 < \infty$, onda vrijedi

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathrm{Var}\, X_1\, \mathrm{E}N + (\mathrm{E}X_1)^2\, \mathrm{Var}\, N.$$

■

Zadatak IV.4.21 Iznosi novca koji se podižu na bankomatu su nezavisni i imaju distribuciju

$$\begin{pmatrix} 100 & 200 & 500 & 1000 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Broj ljudi koji dnevno podigne novac ima Poissonovu distribuciju s parametrom 100. Koliki je očekivani iznos novca koji će se podići s bankomata u jednom danu? Izračunajte i varijancu ukupnog dnevnog iznosa. ■

Zadaci za vježbu

Problem IV.1 Pokažite da ako $X_n \downarrow X$, $X_n \geq 0$ i $\mathrm{E}|X_1| < \infty$, onda

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} X_n = E\left(\lim_{n\to\infty} X_n\right) = \mathrm{E} X.$$

Problem IV.2 Raspišite detalje u dokazu Teorema IV.1.8.

Problem IV.3 Ako je $\mathrm{E}|X| < \infty$, pokažite da se minimum funkcije

$$\phi(c) = \mathrm{E}|X-c|$$

postiže u $c = \operatorname{med} X$, gdje je $\operatorname{med} X$ medijan slučajne varijable X, odnosno broj za koji vrijedi

$$P(X \leq \operatorname{med} X) \geq \frac{1}{2} \;\text{ i }\; P(X \geq \operatorname{med} X) \geq \frac{1}{2}.$$

Problem IV.4 Neka X ima distribuciju **arkus sinusa** s funkcijom distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}, & x \in [-a, a) \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

(a) Odredite funkciju gustoće.
(b) Izračunajte $P(-a/2 < X < a/2)$.
(c) Izračunajte očekivanje i varijancu.

Problem IV.5 Neka X ima **beta distribuciju** s parametrima $p, q > 0$ zadanu funkcijom gustoće

$$f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x).$$

Izračunajte k-ti moment od X, $k \in \mathbb{N}$.

Problem IV.6 Neka je X slučajna varijabla i $p < 0$ takav da je $\mathrm{E}|X|^p < \infty$. Pokažite da za proizvoljan $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$P(|X| \leq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{E}|X|^p}{\varepsilon^p}.$$

Problem IV.7 Neka je $p, q \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $q > 1$ i $1/p + 1/q = 1$. Pokažite da za fiksni $y \geq 0$, funkcija $\phi(x) = x^p/p + y^q/q - xy$, $x \geq 0$, ima vrijednost 0 u točki minimuma. Zaključite da za $x, y \geq 0$ vrijedi

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Problem IV.8 Pokažite da je za pozitivnu slučajnu varijablu X

$$\mathrm{E}X + \mathrm{E}\frac{1}{X} \geq 2.$$

Problem IV.9 Pokažite da ako je $\mathrm{E}X^4 < \infty$ i $\mathrm{E}X^2 = 1$, onda je

$$\mathrm{E}|X| \geq \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}X^4}}.$$

Problem IV.10 Neka je $X \geq 0$ i $\mathrm{E}X^2 < \infty$. Pokažite da je

$$P(X > 0) \geq \frac{(\mathrm{E}X)^2}{\mathrm{E}X^2}.$$

Problem IV.11 Neka je $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ i Y ima konačnu varijancu. Pokažite da je $\mathrm{E}|XY|^r < \infty$ za $r < 2$.

Problem IV.12 Ako je X slučajna varijabla s pozitivnom varijancom, pokažite da je

$$P\left(-\sqrt{10} < \frac{X - \mathrm{E}X}{\sqrt{\mathrm{Var}X}} < \sqrt{10}\right) > 0.9.$$

Problem IV.13 Ako je $\mathrm{E}X = 1$ i $\mathrm{Var}X = 0.2$, ocijenite $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$.

Problem IV.14 — *. Pokažite da ako je u Jensenovoj nejednakosti g strogo konveksna i vrijedi jednakost, tada je $X = \mathrm{E}X$ g.s.

Problem IV.15 — *. Neka je X slučajna varijabla, $\mathrm{E}X^2 < \infty$, $\mathrm{E}X = \mu$ i $\mathrm{Var}X = \sigma^2$. Pokažite da vrijedi (**Cantellijeva nejednakost**):

(a) Za svaki $a \geq 0$

$$P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

(b) Za svaki $a \geq 0$

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

(c) Kada je nejednakost u (b) preciznija od Čebiševljeve nejednakosti?

(d) Nađite X za koju se u (a) postiže jednakost.

Problem IV.16 Funkcija gustoće slučajnog vektora (X,Y) je

$$f(x,y) = axye^{-x^2-y^2}\mathbf{1}_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(x,y).$$

(a) Odredite a.

(b) Odredite marginalne funkcije gustoća.
(c) Izračunajte očekivanje, matricu kovarijanci i koeficijent korelacije od (X,Y).

Problem IV.17 Neka je $a \in (0,1)$ i X slučajna varijabla, $X \sim \mathscr{U}(0,1)$. Odredite a tako da X i $Y = |X-a|$ budu nekorelirane.

Problem IV.18 Neka je (X,Y) slučajni vektor s matricom kovarijanci

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte varijancu od $3X-2Y$.

Problem IV.19 — *. Neka vrijede pretpostavke Teorema IV.2.1.

(a) Fiksirajmo $A_2,\dots,A_n$, $A_i \in \mathscr{A}_i$ i stavimo $F = A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Pokažite da je familija

$$\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{F} : P(A\cap F) = P(A)P(F)\}$$

λ-sistem.
(b) Koristeći $\pi-\lambda$-teorem (Problem II.10) zaključite da je $\sigma(A_1) \subseteq \mathscr{G}$ i da su $\sigma(\mathscr{A}_1), \mathscr{A}_2, \dots, \mathscr{A}_n$ nezavisne.
(c) Ponovnim primjenama prethodne tvrdnje dovršite dokaz Teorema IV.2.1.

Problem IV.20 Pokažite da su događaji $A_1,\dots,A_n$ nezavisni ako i samo ako su $\mathbf{1}_{A_1},\dots,\mathbf{1}_{A_n}$ nezavisne slučajne varijable.

Problem IV.21 Neka (X,Y) ima diskretnu uniformnu distribuciju na skupu točaka $\{(-1,0),(1,0),(0,1),(0,-1)\}$. Pokažite da su X i Y nekorelirane, ali nisu nezavisne.

Problem IV.22 Neka su X i Y Bernoullijeve slučajne varijable. Pokažite da su X i Y nezavisne ako i samo ako su nekorelirane.

Problem IV.23 Funkcija gustoće slučajnog vektora (X,Y) je

$$f(x,y) = ke^{-a^2x+bxy-cy^2}, \quad x,y \in \mathbb{R},$$

$a>0$, $b\in\mathbb{R}$ i $c>0$. Odredite uvjete na a, b i c tako da X i Y budu nezavisne.

Problem IV.24 — *. Neka je funkcija gustoće slučajnog vektora $(X_1,\dots,X_d)$

$$f(x_1,\dots,x_d) = \frac{1}{(2\pi)^d}(1-\cos x_1 \cdots \cos x_d)\mathbf{1}_{[0,2\pi]^d}(x_1,\dots,x_d).$$

Pokažite da $X_1,\dots,X_d$ nisu nezavisne, ali svaki podskup k njih $2 \le k < n$ jest.

Problem IV.25 Pri pakiranju pudinga sa šlagom, prvi stroj ubrizgava puding u čašu pri čemu je očekivana masu 100g uz pogrešku s distribucijom $\mathscr{N}(0,2^2)$. Drugi stroj dodaje šlag očekivane mase 30g uz grešku koja ima $\mathscr{N}(0,1)$ distribuciju i nezavisna je od greške prvog stroja. Kolika je vjerojatnost da u čaši bude više od 134g?

Problem IV.26 Neka je (X,Y) slučajni vektor s gustoćom

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(1+xy)\mathbf{1}_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y).$$

(a) Odredite marginalne gustoće od X i Y.
(b) Jesu li X i Y nezavisne?
(c) Jesu li X^2 i Y^2 nezavisne? Objasnite.

Problem IV.27 — *. Neka su $X_1,\ldots,X_n$ n.j.d. iz $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ distribucije. Pokažite da su slučajne varijable

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2,$$

nezavisne. Vrijedi i obrat ove tvrdnje, vidi primjerice [8, Teorem 13.6].

Problem IV.28 Ako su X i Y nezavisne, $X\sim\chi^2(n)$, $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$, pokažite da

$$\frac{Y}{\sqrt{\frac{X}{n}}} \sim \mathcal{T}_n.$$

Problem IV.29 ***F*-distribucija** s (d_1,d_2) **stupnjeva slobode** opisana je gustoćom

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{d_1}{2},\frac{d_2}{2}\right)}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}} x^{\frac{d_1}{2}-1}\left(1+\frac{d_1}{d_2}x\right)^{-\frac{d_1+d_2}{2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Ako su X i Y nezavisne, $X\sim\chi^2(n)$, $Y\sim\chi^2(m)$, pokažite da

$$\frac{\frac{Y}{m}}{\frac{X}{n}}$$

ima F distribuciju s (m,n) stupnjeva slobode.

Problem IV.30 Ako su X i Y nezavisne, $X,Y\sim\mathcal{E}(1)$, odredite distribuciju od $\frac{X}{X+Y}$.

Problem IV.31 Neka su $X_1,\ldots,X_n$ n.j.d. s funkcijom distribucije F.

(a) Izrazite funkciju distribucije slučajnih varijabli $Y=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$ i $Z=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$.

(b) Ako je $F\sim\mathcal{U}(0,1)$, odredite gustoću, očekivanje i varijancu od Y i Z.

Problem IV.32 Neka X ima Cauchyjevu distribuciju. Odredite distribuciju od $1/X$.

Problem IV.33 Neka X ima $F(d_1,d_2)$ distribuciju. Odredite distribuciju od $1/X$.

Problem IV.34 Neka je $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Pokažite da $Y=e^X$ ima **log-normalnu distribuciju** s funkcijom gustoće

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y).$$

Izračunajte očekivanje i varijancu.

Problem IV.35 Neka su X i Y nezavisne s gustoćama

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Odredite distribuciju od $X+Y$.

Problem IV.36 Trajnost žarulje ima eksponencijalnu distribuciju. Za žarulju od 80W očekivana trajnost je 300 sati, a za žarulju od 100W je 200 sati. Izračunajte vjerojatnost da žarulja od 100W traje dulje od žarulje od 80W.

Problem IV.37 Ako su X i Y nezavisne, $X,Y\sim\mathcal{E}(\lambda)$, pokažite da su $X+Y$ i X/Y nezavisne slučajne varijable.

Problem IV.38 Neka su X i Y nezavisne i imaju $\mathscr{U}(0,1)$ distribuciju.
(a) Odredite distribucije slučajnih varijabli $R = \sqrt{-2\ln X}$ i $\Phi = 2\pi Y$. Jesu li R i Φ nezavisne?
(b) Odredite distribuciju slučajnog vektora $(U,V) = (R\cos\Phi, R\sin\Phi)$. Odredite distribucije od U i V. Jesu li U i V nezavisne?

Problem IV.39 Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable, $X \sim \mathscr{U}(0,1)$ i Y ima funkciju gustoće

$$f_Y(y) = (1 - |1-y|)\,\mathbf{1}_{(0,2)}(y).$$

(a) Izračunajte koeficijent korelacije slučajnog vektora $(X,Z) = (X, X+Y)$.
(b) Odredite funkciju gustoće od $(X,Z) = (X, X+Y)$.

Problem IV.40 Neka su X i Y nezavisne i imaju $\Gamma(\alpha,\beta)$ distribuciju zadanu gustoćom

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

(a) Odredite distribuciju slučajnog vektora $(U,V) = (X/(X+Y), X+Y)$.
(b) Odredite funkciju gustoće od U. Jesu li U i V nezavisne?

Zadaci vezani uz Poglavlje IV.4.1. i IV.4.2.

Problem IV.41 U kutiji se nalaze četiri kuglice numerirane brojevima $1,2,2,3$. Iz kutije izvlačimo dvije kuglice bez vraćanja i neka je X broj na prvoj kuglici i Y broj na drugoj kuglici.
(a) Odredite distribuciju od (X,Y).
(b) Kolika je vjerojatnost da je druga kuglica 3 ako je prva 2?
(c) Kolika je vjerojatnost da je prva kuglica 2 ako je druga 3?
(d) Odredite distribucije od $X\,|_{Y=3}$ i $Y\,|_{X=1}$.
(e) Jesu li X i Y nezavisne? A kada bi izvlačenje bilo s vraćanjem?

Problem IV.42 Odredite uvjetne distribucije slučajnog vektora iz Zadatka III.4.3.

Problem IV.43 Za slučajni vektor (X,Y,Z) iz Problema III.25, odredite uvjetne funkcije gustoće
(a) $f_{X|Y=y}$,
(b) $f_{Y|Z=z}$,
(c) $f_{X|Y=y,Z=z}(x) = \frac{f_{(X,Y,Z)}(x,y,z)}{f_{(Y,Z)}(y,z)}(x)$.

Problem IV.44 Odredite uvjetne funkcije gustoća $f_{X|Y=y}$ i $f_{Y|X=x}$ za X i Y iz Problema III.26.

Problem IV.45 — *. U okviru Primjera IV.4.1, izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(X \le x, B_n)}{P(B_n)}$$

pri čemu je
(a) $B_n = \{|Z_1| \le 1/n\}$,
(b) $B_n = \{|Z_2 - 1| \le 1/n\}$.

Problem IV.46 Pokažite da je $\mathrm{E}(X \mid B) = \int X dP_B$ tako da prvo pokažete za indikatore, i onda dalje uobičajenim postupkom.

Problem IV.47 — *. Pokažite da teorem o monotonoj konvergenciji vrijedi i za uvjetno očekivanje, odnosno ako je $X_n \ge 0$, $\boldsymbol{X}_n \uparrow X$ i $\mathrm{E}X < \infty$,

$$\mathrm{E}(X_n \mid \mathscr{G}) \uparrow \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}).$$

Problem IV.48 — *. Pokažite da ako je ϕ konveksna, $\mathrm{E}|X| < \infty$ i $\mathrm{E}|\phi(X)| < \infty$, onda je

$$\phi\left(\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})\right) \leq \mathrm{E}\left(\phi(X) \mid \mathscr{G}\right).$$

Problem IV.49 Neka je $X = \min\{U_1, U_2\}$ i $Y = \max\{U_1, U_2\}$, gdje su U_1, U_2 nezavisne s $\mathscr{U}(0,1)$ distribucijom.

(a) Odredite distribuciju slučajnog vektora (X,Y).

(b) Odredite $\mathrm{E}(X \mid Y)$.

Problem IV.50 Neka X opisuje iznos uplate u investicijski fond, a slučajna varijabla Y vrijednost udjela nakon godinu dana. Funkcija gustoće slučajnog vektora (X,Y) je

$$f(x,y) = \frac{3}{11}(x^2 + y)\mathbf{1}_{[0,2]\times[0,1]}(x,y).$$

(a) Koja slučajna varijabla opisuje očekivanu vrijednost udjela nakon godinu dana ako je ulog iznosio X? Odredite njezino očekivanje.

(b) Koja slučajna varijabla opisuje zaradu nakon godinu dana? Odredite njezino očekivanje ako je poznato da je ulog bio 0.5.

Problem IV.51 Neka su $X_1, \ldots, X_n$ n.j.d. s $\mathscr{E}(\lambda)$ distribucijom i $S = X_1 + \cdots + X_n$

(a) Odredite distribuciju od $T = X_2 + \cdots + X_n$.

(b) Odredite distribuciju od $(X_1, S) = (X_1, X_1 + T)$.

(c) Odredite uvjetnu distribuciju od X_1 uz dano S.

(d) Izračunajte $\mathrm{E}(X_1 \mid S)$.

Problem IV.52 Neka su X i Y nezavisne i $X \sim \mathscr{B}(n_1, p)$, $Y \sim \mathscr{B}(n_2, p)$. Odredite uvjetnu distribuciju od X uz dano $X + Y = m$. Pokažite da se radi o **hipergeometrijskoj distribuciji** s parametrima n_1, n_2, m koja je model za broj izvučenih plavih kuglica u pokusu u kojem izvlačimo m kuglica iz kutije u kojoj je n_1 plavih i n_2 crvenih.

Problem IV.53 Promotrimo pokus s tri moguća ishoda koji imaju vjerojatnost p_1, p_2, p_3, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ i koji nezavisno ponavljamo n puta. Neka je X_i, $i = 1, 2, 3$, broj ishoda i u n ponavljanja. Odredite distribuciju od X_1 uvjetno na $X_2 = m$ te izračunajte očekivani broj ishoda 1 uz dano $X_2 = m$.

Problem IV.54 Neka je (X,Y) slučajni vektor s gustoćom

$$f(x,y) = 6xy(2 - x - y)\mathbf{1}_{(0,1)\times(0,1)}(x,y).$$

Izračunajte uvjetno očekivanje od X uz dano $Y = y$.

Problem IV.55 Neka je (X,Y) slučajni vektor s gustoćom

$$f(x,y) = \begin{cases} 4y(x-y)e^{-x-y}, & x > 0, 0 < y < x, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Izračunajte uvjetno očekivanje od X uz dano $Y = y$.

Problem IV.56 Neka je (X,Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(y-x)e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

(a) Odredite c.

(b) Odredite uvjetne funkcije gustoća.

(c) Izračunajte $\mathrm{E}(X \mid Y)$ i $\mathrm{E}(Y \mid X)$.

Problem IV.57 Neka je (X,Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odredite uvjetne funkcije gustoća.
(b) Izračunajte $\mathrm{E}(Y \mid X)$.

Problem IV.58 Neka je (X,Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f(x,y) = xe^{-x(y+1)}\mathbf{1}_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(x,y).$$

(a) Odredite uvjetne funkcije gustoća.
(b) Izračunajte $\mathrm{E}(Y \mid X)$.

Zadaci vezani uz Poglavlje IV.4.3. i IV.4.4.

Problem IV.59 Ivan se priprema za kolokvij. Slučajno će odabrati hoće li pročitati poglavlje 4 ili 5. Ako izabere poglavlje 4, riješit će $\mathscr{P}(2)$ zadataka, a ako izabere poglavlje 5, onda $\mathscr{P}(5)$ zadataka. Koliki očekivani broj zadataka će riješiti?

Problem IV.60 Novčić s vjerojatnošću pisma p baca se dok ne padne k pisama zaredom. Koliki je očekivani broj bacanja?

Problem IV.61 Osiguravajuća kuća pretpostavlja da broj odštetnih zahtjeva svakog osiguranika ima Poissonovu distribuciju s parametrom koji ovisi o osiguraniku, a dolazi iz $\Gamma(1,\beta)$ distribucije. Kolika je vjerojatnost da od jednog osiguranika bude n odštetnih zahtjeva? Koliki je očekivani broj zahtjeva za 100 osiguranika?

Problem IV.62 Broj ljudi koji uđe u trgovinu u jednom danu ima Poissonovu distribuciju s parametrom 100. Vjerojatnost da je posjetitelj muškarac je p, a žena $1-p$. Odredite vjerojatnost da u trgovinu uđe točno n muškaraca i m žena.

Problem IV.63 — *. U n kutija nalaze se različiti iznosi novca. Kutije se pomiješaju i redom nam se daju jedna po jedna. Nakon otvaranja svake kutije trebamo odlučiti hoćemo li uzeti iznos iz kutije ili ćemo odbiti i nastaviti otvarati dalje. Jednom odbijeni iznos ne možemo vratiti, a posljednju kutiju moramo prihvatiti. Odredite najbolju strategiju i vjerojatnost da ćemo uzeti najveći iznos s tom strategijom.

Problem IV.64 Na izborima kandidat A je pobijedio s osvojenih n glasova, a kandidat B osvojio je m glasova. Kolika je vjerojatnost da prilikom brojanja glasova A uvijek bude u vodstvu?

Problem IV.65 — *. Neka su $(U_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d., $U_1 \sim \mathscr{U}(0,1)$ i

$$N = \min\{n \geq 2 : U_n > U_{n-1}\}, \qquad M = \min\{n \geq 1 : U_1 + \cdots + U_n > 1\}\}.$$

Pokažite da N i M imaju istu distribuciju i izračunajte očekivanje.

Problem IV.66 Neka je $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ pri čemu p dolazi iz $\mathscr{U}(0,1)$ distribucije. Odredite vjerojatnost da je X jednako $k \in \{0,1,\ldots,n\}$.

Problem IV.67 Pokažite da je $\mathrm{E}(X\,\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})) = \mathrm{E}\left((\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}))^2\right)$.

Problem IV.68 Pokažite da ako je $\mathrm{E}(X \mid Y) = Y$ i $\mathrm{E}(Y \mid X) = X$, onda je $X = Y$ g.s.

Problem IV.69 Pokažite da ako je $\mathrm{E}X^2 < \infty$, $Y = \mathrm{E}(X \mid \mathscr{G})$ i $\mathrm{E}X^2 = \mathrm{E}Y^2$, onda je $X = Y$ g.s.

Problem IV.70 Neka je $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, $P(\{-1\}) = P(\{0\}) = P(\{1\}) = 1/3$ i

$$\mathscr{G}_1 = \{\emptyset, \{-1\}, \{0, 1\}, \Omega\}, \qquad \mathscr{G}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{-1, 0\}, \Omega\}.$$

Za slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$ izračunajte $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}_1) \mid \mathscr{G}_2)$ i $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid \mathscr{G}_2) \mid \mathscr{G}_1)$.

Problem IV.71 Bacamo pravilnu kockicu, a zatim bacamo pravilan novčić onoliko puta koliki je broj pao na kockici. Odredite očekivanje i varijancu broja pisama.

V

Transformacije slučajnih varijabli i konvergencija

V.1. Funkcije izvodnice

Do sada smo vidjeli različite objekte koji jednoznačno karakteriziraju distribucije slučajnih varijabli, primjerice, funkcije distribucije, funkcije gustoće kod neprekidnih ili niz vjerojatnosti kod diskretnih slučajnih varijabli. Za neke probleme, ti objektni nisu uvijek pogodni. Primjerice, njima je teško eksplicitno opisati distribuciju zbroja slučajnih varijabli.

Osnovna ideja (integralnih) transformacija distribucija je alternativnim objektima jednoznačno karakterizirati distribuciju, a istovremeno doći do objekata koji će imati pogodna svojstva (primjerice, da se njima može jednostavno karakterizirati distribucija zbroja). Ovaj cilj ćemo u potpunosti ispuniti u sljedećem poglavlju, a u ovom ćemo promotriti funkcije izvodnice vjerojatnosti i momenata koje mogu biti korisne, ali nisu dovoljno općenite.

V.1.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti

Funkcije izvodnice vjerojatnosti definirane su samo za cjelobrojne slučajne varijable.

Definicija V.1.1 Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathrm{supp}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$. **Funkcija izvodnica vjerojatnosti** od X je funkcija G definirana s

$$G(z) = G_X(z) = \mathrm{E}\left(z^X\right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k). \tag{V.1.1}$$

Primijetimo da je $G(1) = 1$. Red u (V.1.1) je apsolutno konvergentan barem za $|z| \leq 1$ pa je G dobro definirana barem za $|z| \leq 1$. To znači i da za $|z| < 1$, red možemo derivirati proizvoljan broj puta i dobijemo

$$G^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)z^{k-n}P(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} n! z^{k-n} P(X=k). \tag{V.1.2}$$

Za $z = 0$ imamo

$$G^{(n)}(0) = n!P(X=n),$$

pa funkcija izvodnica vjerojatnosti jednoznačno određuje distribuciju slučajne varijable takve da je $\operatorname{supp}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$.

Dakle, funkcija izvodnica vjerojatnosti pruža još jednu karakterizaciju distribucije slučajne varijable. Sljedeće tvrdnje daje neke prednosti ovakve karakterizacije.

Propozicija V.1.1 Neka je X slučajna varijabla s konačnom varijancom takva da je $\operatorname{supp}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$. Tada je
(i) $\mathrm{E}X = G'(1)$,
(ii) $\operatorname{Var} X = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.

Dokaz. Prema (V.1.2)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) = G'(1), \\ \mathrm{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)P(X=k) = G''(1), \end{aligned}$$

iz čega slijede tvrdnje. Oba reda konvergiraju jer je varijanca konačna pa su G' i G'' neprekidne slijeva u $z=1$ (Abelov teorem), pri čemu gledamo limes slijeva u $z=1$. ■

Propozicija V.1.2 Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, $\operatorname{supp}(X_i) \subseteq \mathbb{N}_0$, onda je

$$G_{\sum_{i=1}^n X_i}(z) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(z).$$

Dokaz. Iz nezavisnosti slijedi

$$G_{\sum_{i=1}^n X_i}(z) = \mathrm{E}\left(z^{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^n z^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathrm{E}\left(z^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(z).$$

■

Zadatak V.1.1 Neka je $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Pokažite da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathrm{E}\left(X(X-1)\cdots(X-n+1)\right) = \lambda^n.$$

■

Zadatak V.1.2 Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i $X_i \sim \mathscr{P}(\lambda_i)$. Pokažite da je $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathscr{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$. ■

V.1.2 Funkcije izvodnice momenata

Definicija V.1.2 **Funkcija izvodnica momenata** slučajne varijable X je funkcija M definirana s

$$M(t) = M_X(t) = \mathrm{E}e^{tX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, dF_X(x), \quad t \in \mathbb{R},$$

kada to očekivanje postoji.

M je (dvostrana) Laplaceova transformacija distribucije od X, odnosno gustoće od X u neprekidnom slučaju (iako Laplaceovoj transformacija zapravo odgovara argument $-t$). Funkcija izvodnica momenata definirana je za proizvoljne slučajne varijable, ali eksponencijalni moment treba biti konačan barem za neke $t \in \mathbb{R}$. Za slučajne varijable X takve da je $\mathrm{supp}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$ je $M(t) = G(e^t)$, za funkciju izvodnicu vjerojatnosti G.

Razvijemo li e^{tX} u red, onda je

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \cdots$$

i stoga

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\mathrm{E}X^k}{k!},$$

što objašnjava naziv. Ako M postoji na otvorenom intervalu oko 0, onda možemo derivirati M i doći do

$$M^{(n)}(0) = \mathrm{E}X^n.$$

Ako funkcije izvodnice momenata postoje, onda one jednoznačno određuju distribuciju. Osim toga, za X i Y nezavisne je $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$. Problem funkcija izvodnica momenata je što ne moraju uvijek postojati što može ograničiti njihovu primjenu. Iz tog razloga se najčešće koriste karakteristične funkcije koje uvijek postoje, a imaju jednako dobra svojstva.

Napomena V.1.3 Ako za X postoji funkcija izvodnica momenata na nekoj okolini nule, onda je distribucija od X jedinstveno određena svojim momentima. Općenito, distribucija ne mora biti jedinstveno određena svojim momentima (poznato kao *problem momenata*).

V.2. Karakteristične funkcije

Karakteristične funkcije pružaju nam moćan analitički alat kojim možemo karakterizirati distribucije. Prednost karakterističnih funkcija jest što uvijek postoje i što se njima mogu jednostavno opisati distribucije zbroja slučajnih varijabli. Osim toga, važne su i za konvergenciju slučajnih varijabli.

V.2.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija V.2.1 **Karakteristična funkcija slučajne varijable** X (odnosno njezine distribucije) je funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana s

$$\varphi(t) = \varphi_X(t) = \mathrm{E}\, e^{itX} = \mathrm{E}\cos(tX) + i\,\mathrm{E}\sin(tX). \tag{V.2.1}$$

U (V.2.1) radi se o očekivanju slučajne varijable s kompleksnim vrijednostima, ali kao što vidimo iz definicije, nije potrebna nova teorija jer jednostavno uzimamo da je $\mathrm{E}Z = \mathrm{E}\,\mathrm{Re}(Z) + i\,\mathrm{E}\,\mathrm{Im}(Z)$. Očekivanje u (V.2.1) uvijek postoji jer je

$$\left|\mathrm{E}\, e^{itX}\right| \leq \mathrm{E}\left|e^{itX}\right| = \mathrm{E}\left(\sqrt{(\cos tX)^2 + (\sin tX)^2}\right) = 1. \tag{V.2.2}$$

Za diskretne slučajne varijable, karakterističnu funkciju možemo računati kao

$$\varphi(t) = \sum_{x \in \mathrm{supp}(X)} e^{itx} P(X = x),$$

a za neprekidne kao

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx.$$

Karakteristična funkcija je Fourierova transformacija distribucije od X, odnosno gustoće u neprekidnom slučaju.

Teorem V.2.1 Ako je φ karakteristična funkcija neke slučajne varijable X, onda vrijedi

(i) $\varphi(0) = 1$,
(ii) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$,
(iii) $|\varphi(t)| \leq 1$,
(iv) φ je uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$,
(v) za $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at).$$

Dokaz. (i) Očito.
(ii) $\varphi(-t) = \mathrm{E}\cos(-tX) + i\mathrm{E}\sin(-tX) = \mathrm{E}\cos(tX) - i\mathrm{E}\sin(tX) = \overline{\varphi(t)}$.
(iii) Slijedi iz (V.2.2).
(iv) Za proizvoljni $t \in \mathbb{R}$

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = \left|\mathrm{E}e^{i(t+h)X} - \mathrm{E}e^{itX}\right| = \left|\mathrm{E}e^{itX}\left(\mathrm{E}e^{ihX} - 1\right)\right| \leq \mathrm{E}\left|e^{ihX} - 1\right| \to 0,$$

kad $h \to 0$ po teoremu o dominiranoj konvergenciji. Gornja ograda ne ovisi o t pa je φ uniformno neprekidna.
(v) Slijedi iz $\mathrm{E}e^{it(aX+b)} = e^{itb}\mathrm{E}e^{i(at)X}$.

∎

Karakteristična funkcija zbroja nezavisnih slučajnih varijabli jest produkt karakterističnih funkcija.

Teorem V.2.2 Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, onda je

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t),$$

Posebno, ako su $X_1, \ldots, X_n$ n.j.d., onda je

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = (\varphi_{X_1}(t))^n.$$

Dokaz. Slijedi zbog nezavisnosti

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \mathrm{E}e^{it\sum_{i=1}^n X_i} = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{itX_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathrm{E}e^{itX_i} = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t).$$

∎

Zadatak V.2.1 Odredite karakteristične funkcije sljedećih distribucija

(a) Bernoullijeva distribucija,
(b) binomna distribucija,
(c) Poissonova distribucija,
(d) normalna distribucija,
(e) eksponencijalna distribucija,
(f) uniformna distribucija.
(g) dvostrane eksponencijalne distribucije (Laplaceove za $\mu = 0$ i $b = 1/\lambda$ – Zadatak IV.3.8)

∎

Zadatak V.2.2 Dokažite da za karakterističnu funkciju φ neke slučajne varijable X vrijedi
(a) $|\varphi(t+h)-\varphi(t)| \leq \sqrt{2(1-\operatorname{Re}\varphi(h))}$ za sve $t,h \in \mathbb{R}$,
(b) ako je za neki $h \neq 0$, $\varphi(h)=1$, onda je φ periodična funkcija s periodom h.

■

Zadatak V.2.3 Mogu li sljedeće funkcije biti karakteristične funkcije nekih distribucija?
(a) $\varphi(t) = e^{-i|t|}$,
(b) $\varphi(t) = \frac{1}{1-i|t|}$,
(c) $\varphi(t) = \cos t^2$.

■

V.2.2 Jedinstvenost i teorem inverzije

Karakteristična funkcija jednoznačno određuje distribuciju. Teorem inverzije pokazuje i više te daje način kako od karakteristične funkcije doći do distribucije.

Teorem V.2.3 — Teorem inverzije. Neka je X slučajna varijabla s karakterističnom funkcijom φ i funkcijom distribucije F. Za $a<b$ vrijedi

$$F(b)-F(a)+\frac{1}{2}(P(X=a)-P(X=b)) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt. \tag{V.2.3}$$

Dokaz. Uočimo da je

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right| = \left|\int_a^b e^{-ity}dy\right| \leq b-a, \tag{V.2.4}$$

pa možemo primijeniti Fubinijev teorem i dobiti

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{2it}dt\right)dF(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{T}\left(\frac{\sin t(x-a)}{t}-\frac{\sin t(x-b)}{t}\right)dt\right)dF(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(a,b,t,x,T)dF(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{E}H(a,b,t,X,T).
\end{aligned}$$

Stavimo li $S(T)=\int_0^T \sin t/t dt$, onda je

$$\int_0^T \frac{\sin(\alpha t)}{t}ds = \int_0^{\alpha T}\frac{\sin t}{t}dt = \operatorname{sign}(\alpha)S(|\alpha|T)$$

Može se pokazati da je $S(T) \leq \pi$ za sve $T > 0$ i $S(T) \to \pi/2$ kad $T \to \infty$ tako da je

$$\lim_{T\to\infty} H(a,b,t,x,T) = \lim_{T\to\infty} (\operatorname{sign}(x-a)S(|x-a|T) - \operatorname{sign}(x-b)S(|x-b|T))$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{za } x < a, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{za } x = a, \\ \pi, & \text{za } a < x < b, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{za } x = b, \\ 0, & \text{za } x > b. \end{cases}$$

Po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \mathrm{E} H(a,b,t,X,T) = \frac{1}{2}P(X=a) + P(a < X < b) + \frac{1}{2}P(X=b).$$

■

Integral u (V.2.3) za $T = \infty$ ne mora postojati, ali limes definiran u (V.2.3) uvijek postoji. Iz prethodnog posebno slijedi i da karakteristične funkcije jednoznačno određuju distribuciju.

Teorem V.2.4 — Teorem jedinstvenosti. Neka su X i Y slučajne varijable. Tada je $\varphi_X = \varphi_Y$ ako i samo ako je $X \stackrel{d}{=} Y$.

Uz dodatne pretpostavke na karakterističnu funkciju formula inverzija ima nešto jednostavniji oblik.

Teorem V.2.5 Ako je $\int |\varphi(t)| dt < \infty$, onda je X apsolutno neprekidna s ograničenom i neprekidnom funkcijom gustoće danom s

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt.$$

Dokaz. Kako je φ integrabilna, funkcija pod integralom u Teoremu V.2.3 je apsolutno integrabilna. Koristeći (V.2.4) imamo

$$\frac{1}{2}P(X=a) + P(a<X<b) + \frac{1}{2}P(X=b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt \leq \frac{b-a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|dt,$$

odakle vidimo da ako $b \to a$, mora biti posebno i $P(X=a) = 0$ za svaki $a \in \mathbb{R}$. Stoga je po teoremu inverzije

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b e^{-itx} dx \varphi(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt \right) dx = \int_a^b f(x)dx, \end{aligned}$$

pa je f funkcija gustoće. Iz definicije f slijedi da je neprekidna i ograničena. ■

Zadatak V.2.4 Pokažite da je φ_X realna funkcija ako i samo ako je X simetrična (X i $-X$ imaju istu distribuciju). ■

Zadatak V.2.5 Odredite karakterističnu funkciju
(a) gama distribucije,
(b) χ^2 distribucije,
(c) dvostrane eksponencijalne distribucije (Laplaceove za $\mu = 0$ i $b = 1/\lambda$ – Zadatak IV.3.8),
(d) Cauchyjeve distribucije.

■

Zadatak V.2.6 Odredite distribuciju zbroja $S = \sum_{k=1}^n X_k$ ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne i imaju
(a) Bernoullijevu distribuciju,
(b) Poissonovu distribuciju,
(c) normalnu distribuciju,
(d) eksponencijalnu distribuciju,
(e) gama distribuciju,
(f) χ^2 distribuciju,
(g) Cauchyjevu distribuciju.

■

V.2.3 Karakteristične funkcije i momenti

Glatkoća karakteristične funkcije u okolini nule povezana je s ponašanjem repova distribucije. Osim toga, iz karakteristične funkcije možemo doći do momenata distribucije. Prije nego što to pokažemo, dokazat ćemo jednu tehničku lema koja će se pokazati korisnom.

Lema V.2.6 Za $n \geq 0$ vrijedi

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \min \left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}.$$

Dokaz. Parcijalna integracija daje za $n \geq 0$

$$\int_0^x (x-s)^n e^{is} ds = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{i}{n+1} \int_0^x (x-s)^{n+1} e^{is} ds.$$

Za $n = 0$ imamo

$$\int_0^x e^{is} ds = x + i \int_0^x (x-s) e^{is} ds$$

iz čega slijedi

$$e^{ix} = 1 + ix + i^2 \int_0^x (x-s) e^{is} ds.$$

Za $n = 1$ imamo

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{2} + \frac{i^3}{2} \int_0^x (x-s)^2 e^{is} ds,$$

i indukcijom slijedi

$$e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} = \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^{is} ds.$$

Za prvu ocjenu, uočimo da je zbog $|e^{is}| \leq 1$

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{n!} \int_0^x |x-s|^n ds = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Za drugu ocjenu, parcijalnom integracijom dobijemo

$$\frac{i}{n} \int_0^x (x-s)^n e^{is} ds = -\frac{x^n}{n} + \int_0^x (x-s)^{n-1} e^{is} ds = -\int_0^x (x-s)^{n-1} ds + \int_0^x (x-s)^{n-1} e^{is} ds,$$

iz čega dobijemo

$$\frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^{is} ds = \frac{i^n}{(n-1)!} \int_0^x (x-s)^{n-1} (e^{is}-1) ds.$$

Kako je $|e^{is} - s| \leq 2$ slijedi

$$\left| \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^{is} ds \right| \leq \left| \frac{2}{(n-1)!} \int_0^x (x-s)^{n-1} ds \right| \leq \frac{2|x|^n}{n!},$$

što daje i drugu ocjenu. ∎

Teorem V.2.7 Neka je X slučajna varijabla s karakterističnom funkcijom φ i funkcijom distribucije F. Ako je $\mathrm{E}|X|^n < \infty$ za neki $n \in \mathbb{N}$, onda φ ima k-tu derivaciju za $k \leq n$ i vrijedi

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{E}X^k = \frac{1}{i^k} \varphi^{(k)}(0).$$

Osim toga, za $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathrm{E}X^k + o(t^n)$$

gdje je $o(t^n)$ funkcija takva da $\lim_{t\to 0} \frac{o(t^n)}{t^n} = 0$.

Dokaz. Za $k \leq n$ je $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF(x) < \infty$. Nadalje,

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{itx} \right| = \left| (ix)^k e^{itx} \right| = |x|^k$$

što opravdava ulazak derivacije pod integral (vidi primjerice [8, Korolar 10.2]) iz čega slijedi

$$\varphi^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF(x).$$

Druga jednakost slijedi iz prve za $t = 0$. Za treću, imamo primjenom Leme V.2.6

$$\left| \mathrm{E} e^{itX} - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E} \frac{(itX)^k}{k!} \right| \leq \mathrm{E} \left| e^{itX} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(itX)^k}{k!} \right| \leq \mathrm{E} \min \left\{ \frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|tX|^n}{n!} \right\}$$
$$= t^n \mathrm{E} \min \left\{ \frac{|t||X|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|X|^n}{n!} \right\}.$$

Kako je $\min\left\{ \frac{|t||X|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|X|^n}{n!} \right\} \leq 2|X|^n/n!$ i konvergira u 0 kad $t \to 0$, s desne strane imamo funkciju koja je $o(t^n)$. ∎

Istaknut ćemo jedan poseban slučaj prethodnog teorema koji će nam biti važan kasnije.

Korolar V.2.8 Ako je $\mathrm{E}X^2 < \infty$, onda je

$$\varphi_X(t) = 1 + it\,\mathrm{E}X - t^2\frac{\mathrm{E}X^2}{2} + o(t^2).$$

Primijetimo da prva ocjena u Lemi V.2.6 jednostavno slijedi iz Taylorovog razvoja funkcije e^{ix}. Ova ocjena je korisna za male x, dok je druga namijenjena za velike x. Tako smo u prethodnom korolaru tvrdnju dobili pretpostavljajući samo da je $\mathrm{E}X^2 < \infty$ umjesto $\mathrm{E}|X|^3 < \infty$.

Zadatak V.2.7 Pokažite da je za $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{E}X^n = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n \text{ neparan}, \\ (2l-1)!!, & \text{ako je } n = 2l \text{ paran}, \end{cases}$$

gdje je $(2l-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2l-3)(2l-1)$. ■

Zadatak V.2.8 Izračunajte očekivanje i varijancu $\Gamma(\alpha,\beta)$ i χ^2 distribucije. ■

V.2.4 Karakteristične funkcije slučajnih vektora

Definicija V.2.2 Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_d)$ slučajan vektor. **Karakteristična funkcija slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$** je funkcija $\varphi_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definirana s

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \varphi_{X_1,\ldots,X_d}(t_1,\ldots,t_d) = \mathrm{E}\,e^{i\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{X}} = \mathrm{E}\,e^{i(t_1X_1+\cdots+t_dX_d)}.$$

Može se pokazati da za karakteristične funkcije na $\mathbb{R}^d$ vrijedi analogni rezultati, teorem inverzije, posebno i sljedeći teorem jedinstvenosti.

Teorem V.2.9 — Teorem jedinstvenosti. Neka su $\boldsymbol{X}$ i $\boldsymbol{Y}$ slučajni vektori. Tada je $\varphi_{\boldsymbol{X}} = \varphi_{\boldsymbol{Y}}$ ako i samo ako je $\boldsymbol{X} \overset{d}{=} \boldsymbol{Y}$.

Primijetimo sljedeće jednakosti za posebne argumente $\boldsymbol{t}$:
- $\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \varphi_{\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{X}}(1)$,
- $\varphi_{\boldsymbol{X}}(t,t,\ldots,t) = \varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t)$,
- $\varphi_{\boldsymbol{X}}(t,0,\ldots,0) = \varphi_{X_1}(t)$.

Pomoću karakterističnih funkcija slučajnih vektora možemo karakterizirati nezavisnost.

Teorem V.2.10 Slučajne varijable $X_1,\ldots,X_n$ su nezavisne ako i samo ako

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t_k), \quad t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Ako su $X_1,\ldots,X_n$ nezavisne, onda je

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_d}(t_1,\ldots,t_d) = \mathrm{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{it_kX_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathrm{E}\,e^{it_kX_k} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t_k).$$

Obratno, ako to vrijedi, onda $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ima istu karakterističnu funkciju kao vektor $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ u kojem su $Y_i \stackrel{d}{=} X_i$, $i = 1, \ldots, n$, nezavisne. Prema teoremu jedinstvenosti, $\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{Y}$, pa su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne. ■

Zadatak V.2.9 Neka su X i Y nezavisne standardne normalne slučajne varijable. Pokažite da su $X + Y$ i $X - Y$ nezavisne. ■

Višedimenzionalnu normalnu distribuciju $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ definirali smo u Primjeru III.4.2 funkcijom gustoće. Kako je Σ pozitivno definitna, postoji regularna matrica C takva da je $CC^T = \Sigma$. Neka je $\boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, I)$ slučajni vektor. Prema Zadatku IV.1.23, slučajni vektor $\boldsymbol{\mu} + C\boldsymbol{Z}$ ima očekivanje $\boldsymbol{\mu}$ i matricu kovarijanci $CIC^T = \Sigma$. Osim toga, iz Zadatka IV.3.10 se može vidjeti da ima višedimenzionalnu normalnu distribuciju. Dakle, $\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + C\boldsymbol{Z}$. Time smo došli do još jedne karakterizacije višedimenzionalne normalne distribucije.

Zadatak V.2.10 Pokažite da je karakteristična funkcija slučajnog vektora $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ jednaka

$$\varphi(\boldsymbol{t}) = e^{-i\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\Sigma\boldsymbol{t}}.$$

■

Sada možemo pokazati i treću karakterizaciju višedimenzionalne normalne distribucije.

Zadatak V.2.11 Pokažite da je $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ ako i samo ako za svaki $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, slučajna varijabla $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{X}$ ima $\mathcal{N}(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{c}^T\Sigma\boldsymbol{c})$ distribuciju. ■

V.3. Konvergencija slučajnih varijabli

Kada govorimo o konvergenciji realnih brojeva, onda je uvijek jasno o kakvoj konvergenciji se radi jer su sve metrike na $\mathbb{R}$ ekvivalentne. Već smo vidjeli da odnosi među slučajnim varijablama mogu različito promatrati. Primjerice, $X = Y$ nije isto kao $X = Y$ g.s. ili $X \stackrel{d}{=} Y$. Slično vrijedi i za konvergenciju nizova slučajnih varijabli.

V.3.1 Tipovi konvergencije

V.3.1.1 Konvergencija sigurno i gotovo sigurno

Neka su X_n, $n \in \mathbb{N}$ i X slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Kako se radi o funkcijama, možemo promatrati **konvergenciju po točkama** (sigurno ili svuda) $X_n \to X$ ako $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ za sve $\omega \in \Omega$. Ovakav tip konvergencije rijetko se koristi u vjerojatnosti jer eventualna nekonvergencija na zanemarivim skupovima obično nema nikakav značaj u vjerojatnosnom smislu.

Zato smo u Definiciji III.2.3 uveli pojam g.s. konvergencije. Podsjetimo se da X_n **konvergira g.s.** prema X ako je

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

Pišemo $X_n \stackrel{g.s.}{\to} X$ ili $X_n \to X$ g.s. Limes u ovakvoj konvergenciji je g.s. jedinstven (vidi Problem III.8). Sljedeća propozicija daje jedan način karakterizacije konvergencije g.s.

Propozicija V.3.1 $X_n \stackrel{g.s.}{\to} X$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Dokaz. Za $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| \geq \varepsilon\},$$
$$A(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k(\varepsilon),$$

tako da $\cup_{k=n}^{\infty} A_k(\varepsilon) \downarrow A(\varepsilon)$ pa je $P(A(\varepsilon)) = \lim_{n\to\infty} P\left(\cup_{k=n}^{\infty} A_k(\varepsilon)\right)$. Stavimo neka je

$$D = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \not\to X(\omega)\}$$

i uočimo da je

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k(1/m) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A(1/m).$$

Sada imamo

$$X_n \xrightarrow{g.s.} X \Leftrightarrow P(D) = 0 \Leftrightarrow P(A(\varepsilon)) = 0\ \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\cup_{k=n}^{\infty} A_k(\varepsilon)\right) = 0\ \forall \varepsilon > 0.$$

■

Kao posljedicu primijetimo da ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$, onda zbog

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\}\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(|X_k - X| \geq \varepsilon) \to 0, \text{ kad } n \to \infty, \tag{V.3.1}$$

slijedi da $X_n \xrightarrow{g.s.} X$.

V.3.1.2 Konvergencija po vjerojatnosti

Definicija V.3.1 Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ **konvergira po vjerojatnosti** prema X ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Pišemo $X_n \xrightarrow{P} X$.

Konvergencija g.s. zahtijeva da za skoro sve ω razlika $X_n(\omega) - X(\omega)$ postane i ostane mala. Konvergencija po vjerojatnosti je slabija i zahtijeva tek da vjerojatnost da razlika $X_n(\omega) - X(\omega)$ bude netrivijalna postane mala. Konvergencija po vjerojatnosti vezana je uz distribuciju slučajnih vektora (X_n, X). I limes po vjerojatnosti je jedinstven g.s. Zaista, ako $X_n \xrightarrow{P} X$ i $X_n \xrightarrow{P} Y$, onda je za svaki $\varepsilon > 0$ (vidi Problem III.10)

$$\begin{aligned} P(|X - Y| \geq \varepsilon) &= P(|X - X_n + X_n - Y| \geq \varepsilon) \\ &\leq P(|X - X_n| \geq \varepsilon/2) + P(|X_n - Y| \geq \varepsilon/2) \to 0, \text{ kad } n \to \infty, \end{aligned}$$

pa je $P(X = Y) = 1$.

V.3.1.3 Konvergencija u srednjem

Definicija V.3.2 Neka je $p \geq 1$, $\mathrm{E}|X_n|^p < \infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\mathrm{E}|X|^p < \infty$. Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ **konvergira u srednjem reda p** (ili u L^p) prema X ako je

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}|X_n - X|^p = 0.$$

Pišemo $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Konvergencija u srednjem je konvergencija po L^p normi u prostoru L^p svih slučajnih varijabli s konačnim momentom reda p jer ako $X_n \xrightarrow{L^p} X$ onda $\|X_n - X\|_p \to 0$. Ako $X_n \xrightarrow{L^p} X$ i $X_n \xrightarrow{L^p} Y$, onda iz Propozicije IV.1.14 slijedi

$$\mathrm{E}\,|X-Y|^p = \mathrm{E}\,|X-X_n+X_n-Y|^p \le 2^p\,\mathrm{E}\,|X-X_n| + 2^p\,\mathrm{E}\,|X_n-Y|^p \to 0, \ \text{ kad } n\to\infty,$$

pa je $X = Y$ g.s. Sljedeća propozicija pokazuje da u slučaju L^p konvergencije i momenti konvergiraju.

Propozicija V.3.2 Ako $X_n \xrightarrow{L^p} X$, onda

$$\mathrm{E}\,|X_n|^p \to \mathrm{E}\,|X|^p, \ \text{ kad } n\to\infty.$$

Dokaz. Iz nejednakosti Minkowskog imamo

$$\begin{aligned}\|X\|_p &= \|X - X_n + X_n\|_p \le \|X - X_n\|_p + \|X_n\|_p,\\ \|X_n\|_p &= \|X_n - X + X\|_p \le \|X - X_n\|_p + \|X\|_p,\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$|\|X_n\|_p - \|X\|_p| \le \|X_n - X\|_p \to 0, \ \text{ kad } n\to\infty.$$

■

V.3.1.4 Konvergencija po distribuciji

Definicija V.3.3 Kažemo da niz $(X_n, n\in\mathbb{N})$ **konvergira po distribuciji** prema X ako

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

za sve $x \in C(F_X)$ u kojima je F_X neprekidna. Pišemo $X_n \xrightarrow{d} X$. Često kažemo i da F_{X_n} konvergira po distribuciji prema F_X.

Ako $X_n \xrightarrow{d} X$ i $X_n \xrightarrow{d} Y$, onda za $x \in C(F_X)\cap C(F_Y)$ po nejednakosti trokuta imamo

$$\begin{aligned}|F_X(x) - F_Y(x)| &= |F_X(x) - F_{X_n}(x) + F_{X_n}(x) - F_Y(x)|\\ &\le |F_X(x) - F_{X_n}(x)| + |F_{X_n}(x) - F_Y(x)| \to 0, \ \text{ kad } n\to\infty.\end{aligned}$$

pa je $F_X(x) = F_Y(x)$ za svaki $x \in C(F_X)\cap C(F_Y)$. Kako je $(C(F_X)\cap C(F_Y))^c$ najviše prebrojiv, iz neprekidnosti zdesna slijedi da je $F_X(x) = F_Y(x)$ za svaki $x\in\mathbb{R}$, odnosno $X \stackrel{d}{=} Y$. Dakle, i za ovakav tip konvergencije limes je jedinstven u smislu jednakosti po distribuciji.

Konvergencija po distribuciji vezana je samo uz konvergenciju funkcija distribucije. Stoga ni slučajne varijable iz definicije ne moraju biti definirane na istom vjerojatnosnom prostoru. Osim toga, konvergencija po distribuciji ovisi samo o jednodimenzionalnim distribucijama. Zavisnost između X_n ne igra nikakvu ulogu u konvergenciji.

Može se činiti neobičnim što zahtijevamo da funkcije distribucije konvergiraju samo u točkama neprekidnosti limesa. Sljedeći primjer ilustrira zašto je tome tako.

■ **Primjer V.3.1** Neka je $X_n \sim \mathscr{U}(0,1/n)$. Za pretpostaviti je da $X_n \xrightarrow{d} X$, $X=0$, kad $n\to\infty$. Zaista, kad $n\to\infty$

$$F_{X_n}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ nx, & x\in[0,1/n),\\ 1, & x\geq 1/n,\end{cases} \to \begin{cases}0, & x\leq 0,\\ 1, & x>0,\end{cases},$$

pa $F_{X_n}(x)\to F_X(x)$ za $x\neq 0$. Kako $0\notin C(F_X)$, zaključujemo da $X_n \xrightarrow{d} X$. Kada bi zahtijevali da konvergencija vrijedi za svaki $x\in\mathbb{R}$, onda X_n ne bi konvergirao u 0 po distribuciji. Osim toga, ako je $X_n\sim\mathscr{U}(-1/n,0)$, onda bi $F_{X_n}(x)\to F_X(x)$ za sve $x\in\mathbb{R}$. Kad bi zahtijevali konvergenciju za svaki $x\in\mathbb{R}$, onda bi niz $\mathscr{U}(0,-1/n)$ konvergirao u 0, a $\mathscr{U}(0,1/n)$ ne bi, što nikako ne bi bila razumna posljedica definicije.

V.3.1.5 Konvergencija slučajnih vektora

Prethodni tipovi konvergencije logično se generaliziraju na slučajne vektore. Tako kažemo da niz slučajnih vektora $(\boldsymbol{X}_n, n\in\mathbb{N})$ konvergira slučajnom vektoru $\boldsymbol{X}$

- gotovo sigurno ako je $P(\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{X}_n(\omega)=\boldsymbol{X}(\omega))=1$,
- po vjerojatnosti ako je $\lim_{n\to\infty}P(\|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}\|\geq\varepsilon)=0$,
- u srednjem reda p ako je $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\,\|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}\|^p=0$,
- po distribuciji ako $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}_n}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ za sve $\boldsymbol{x}\in C(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}})$.

Pri tome je $\|\cdot\|$ Euklidska (ili neka druga) norma na $\mathbb{R}^d$.

V.3.2 Veze između tipova konvergencije

Krenut ćemo od glavnog rezultata koji daje sve implikacije među različitim tipovima konvergencije.

Teorem V.3.3 Za slučajne varijable X_n, $n\in\mathbb{N}$ i X vrijedi sljedeće
(i) $X_n \xrightarrow{g.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$,
(ii) $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$,
(iii) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$.

Dokaz. (i) Kako je $\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}\subseteq\cup_{k=n}^{\infty}\{|X_k-X|\geq\varepsilon\}$, tvrdnja slijedi iz Propozicije V.3.1.

(ii) Slijedi iz Markovljeve nejednakosti (Korolar IV.1.11) zbog

$$P(|X_n-X|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathrm{E}\,|X_n-X|^p}{\varepsilon^p}.$$

(iii) Neka je $x\in C(F_X)$ i $\varepsilon>0$. Imamo

$$\begin{aligned}F_X(x-\varepsilon)&=P(X\leq x-\varepsilon)=P(X\leq x-\varepsilon,X_n\leq x)+P(X\leq x-\varepsilon,X_n>x)\\&\leq P(X_n\leq x)+P(|X_n-X|\geq\varepsilon)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}F_{X_n}(x)&=P(X_n\leq x)=P(X_n\leq x,X\leq x+\varepsilon)+P(X_n\leq x,X>x+\varepsilon)\\&\leq P(X\leq x+\varepsilon)+P(|X_n-X|\geq\varepsilon),\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$F_X(x-\varepsilon)-P(|X_n-X|\geq\varepsilon)\leq F_{X_n}(x)\leq F_X(x+\varepsilon)+P(|X_n-X|\geq\varepsilon).$$

Pustimo li $n \to \infty$ i iskoristimo konvergenciju po vjerojatnosti, dobijemo

$$F_X(x-\varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon),$$

pustimo li $\varepsilon \to 0$, budući da je $x \in C(F)$ slijedi da je $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$. Kako je $x \in C(F_X)$ proizvoljan, slijedi $X_n \xrightarrow{d} X$.

■

U prethodnom teoremu, općenito ne vrijede obratne implikacije.

Zadatak V.3.1 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $P(X_n = 0) = n^{-\alpha}$ i $P(X_n = n) = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, te $X = 0$. Pokažite da

(a) $X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{g.s.} X$,
(b) $X_n \xrightarrow{P} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X$,
(c) $X_n \xrightarrow{L^p} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{g.s.} X$,
(d) $X_n \xrightarrow{g.s.} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Zadatak V.3.2 Neka je X Bernoullijeva s parametrom $1/2$ i stavimo

$$X_n = \begin{cases} X, & n \text{ paran}, \\ 1-X, & n \text{ neparan}. \end{cases}$$

Pokažite da $X_n \xrightarrow{d} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.

V.3.2.1 Obrati

Obratne implikacije vrijede u nekim slučajevima koje ćemo navesti kroz niz rezultata.

Propozicija V.3.4 Ako $X_n \xrightarrow{P} X$, onda postoji podniz $(X_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ takav da $X_{n_k} \xrightarrow{g.s.} X$ kad $k \to \infty$.

Dokaz. Po pretpostavci $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$ za svaki $\varepsilon > 0$. Možemo odabrati podniz n_k, $k \in \mathbb{N}$ tako da je

$$P(|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{2^k}) < \frac{1}{2^k}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je za k dovoljno velik $1/2^k < \varepsilon$ pa je

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty.$$

Iz Propozicije V.3.1 i (V.3.1) slijedi da $X_{n_k} \xrightarrow{g.s.} X$ kad $k \to \infty$. ■

Propozicija V.3.1 i (V.3.1) pokazuju da ako niz vjerojatnosti $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ konvergira u nulu dovoljno brzo, onda vrijedi i konvergencija g.s. Što se tiče konvergencije po vjerojatnosti i u srednjem, imamo sljedeće.

Propozicija V.3.5 Ako $X_n \xrightarrow{P} X$ i za $(X_n, n \in \mathbb{N})$ vrijedi

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}\left(|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n|>M\}}\right) = 0,$$

onda $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Dokaz. Neka je $(X_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ podniz koji konvergira g.s. Korištenjem Fatouove leme (Teorem IV.1.5) imamo

$$\mathrm{E}|X| = \mathrm{E}\left(\liminf_{k\to\infty} |X_{n_k}|\right) \le \liminf_{k\to\infty} \mathrm{E}|X_{n_k}| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}|X_n| < \infty,$$

jer možemo uzeti M dovoljno velik tako da je $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}\left(|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n>M\}}\right) \le 1$ pa je $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}|X_n| \le M+1 < \infty$. Nadalje, za proizvoljan $\varepsilon > 0$ je

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|X_n - X| &= \mathrm{E}\left(|X_n - X| \mathbf{1}_{\{|X_n-X|\le\varepsilon\}}\right) + \mathrm{E}\left(|X_n - X| \mathbf{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}\right) \\ &\le \varepsilon + \mathrm{E}\left(|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}\right) + \mathrm{E}\left(|X| \mathbf{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}\right).\end{aligned}$$

Zbog $P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ vrijedi da $\mathrm{E}\left(|X| \mathbf{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}\right) \to 0$ kad $n \to \infty$. Isto se može zaključiti i za drugi član zbog pretpostavke. Konačno slijedi da $\mathrm{E}|X_n - X| \to 0$. ■

Uvjet iz prethodne propozicije naziva se **uniformna integrabilnost**. Analogna tvrdnja vrijedi i za L^p konvergenciju za $p > 1$. Dovoljni uvjeti za uniformnu integrabilnost mogu se vidjeti u Problemu V.22.

Propozicija V.3.6 Ako $X_n \xrightarrow{d} c \in \mathbb{R}$, onda $X_n \xrightarrow{P} c$.

Dokaz. Za $\varepsilon > 0$ imamo

$$\begin{aligned}P(|X_n - c| \ge \varepsilon) &= 1 - P(c - \varepsilon < X_n < c + \varepsilon) = 1 - P(X_n < c + \varepsilon) + F_{X_n}(c - \varepsilon) \\ &\le 1 - P(X_n \le c + \varepsilon/2) + F_{X_n}(c - \varepsilon) \to 0 \ \text{ kad } n \to \infty,\end{aligned}$$

jer $F_{X_n}(c - \varepsilon) \to 0$ i $F_{X_n}(c + \varepsilon/2) \to 1$ s obzirom da je $C(F_X) = \mathbb{R} \setminus \{c\}$. ■

Zadatak V.3.3 Neka su $X, X_1, X_2, \ldots$ diskretne slučajne varijable takve da je $\mathrm{supp}(X_n) \subseteq \mathbb{N}_0$ i $\mathrm{supp}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$. Pokažite da $X_n \xrightarrow{d} X$ ako i samo ako $P(X_n = k) \to P(X = k)$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. ■

Zadatak V.3.4 — Schefféova lema. Neka su $X, X_1, X_2, \ldots$ neprekidne slučajne varijable s gustoćama $f, f_1, f_2, \ldots$. Pokažite da ako $f_n \to f$ po točkama, onda $X_n \xrightarrow{d} X$. ■

Zadatak V.3.5 Neka su X_n, $n \in \mathbb{N}$ n.j.d. s gustoćom

$$f_n(x) = (1 - \cos(2\pi n x)) \mathbf{1}_{(0,1)}(x).$$

Pokažite da $X_n \xrightarrow{d} X$, $X \sim \mathscr{U}(0,1)$, ali (f_n) ne konvergira. ■

Zadatak V.3.6 Neka je $P(X_n = 1 - 1/n) = P(X_n = 1 + 1/n) = 1/2$ i $X = 1$. Pokažite da $X_n \xrightarrow{d} X$, ali odgovarajuće diskretne funkcije gustoće ne konvergiraju. ■

Zadatak V.3.7 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s funkcijama gustoće

$$f_{X_n}(x) = \frac{n}{\sqrt{2}} e^{-\frac{n}{\sqrt{2}}x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Ispitajte sve tipove konvergencija ovog niza (u srednjem samo reda 2). ■

V.3.3 Konvergencija po distribuciji i karakteristične funkcije

Svoju korisnost karakteristične funkcije pokazuju i kada se radi o konvergenciji po distribuciji. Prije nego što to pokažemo, iskazat ćemo alternativnu karakterizaciju konvergencije po distribuciji.

Teorem V.3.7 $X_n \xrightarrow{d} X$ ako i samo ako za svaku neprekidnu ograničenu funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\, h(X_n) = \mathrm{E}\, h(X).$$

Dokaz se može vidjeti primjerice u [8, Teorem 13.13] ili [3, Teorem 3.2.3]. Svojstvo iz prethodnog teorema poznato je i kao **slaba konvergencija** (često se koristi oznaka $\Rightarrow$). Za slučajne varijable (i slučajne vektore) slaba konvergencija ekvivalentna je konvergenciji po distribuciji. Prednost ovakve karakterizacije je što se ona lako generalizira na općenitije slučajne elemente, primjerice slučajne procese. Slaba konvergencija standardno se koristi i u teoriji mjere. Može se pokazati da slaba konvergencija ima cijeli niz alternativnih karakterizacija (tzv. Portmanteau teorem, [8, Teorem 13.12], [3, Teorem 3.2.5]).

Sljedeći teorem objašnjava zašto su karakteristične funkcije snažan alat u proučavanju konvergencije po distribuciji.

Teorem V.3.8 — Teorem neprekidnosti. Neka su X_n, $n \in \mathbb{N}$, slučajne varijable s karakterističnim funkcijama φ_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Ako za neku slučajnu varijablu X vrijedi $X_n \xrightarrow{d} X$, onda $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Ako $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$ i funkcija φ je neprekidna u 0, onda je φ karakteristična funkcija neke slučajne varijable X i $X_n \xrightarrow{d} X$.

Dokaz. Dio (i) odmah slijedi iz Teorema V.3.7 jer je $h(x) = e^{itx}$ neprekidna i ograničena funkcija. Za drugu tvrdnju vidjeti primjerice [8, Teorem 13.18], [3, Teorem 3.3.6]). ■

Teorem je poznat i kao Lévyjev teorem neprekidnosti. Neprekidnost ovdje stoji u smislu da je transformacija neprekidna na konvergenciju po distribuciji. Ako u tvrdnji (ii) dodatno pretpostavimo da je φ karakteristična funkcija, onda imamo sljedeći korolar.

Korolar V.3.9 Neka su $X, X_1, X_2, \ldots$ slučajne varijable s karakterističnim funkcijama $\varphi_X, \varphi_{X_1}, \varphi_{X_2}, \ldots$. Tada $X_n \xrightarrow{d} X$ ako i samo ako $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$.

Ako karakteristične funkcije konvergiraju prema nekoj funkciji φ kao u Teoremu V.3.8 (ii), ona ne mora biti karakteristična funkcija neke slučajne varijable. Primjerice, ako je $X_n \sim \mathscr{N}(0,n)$, onda

$$\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{nt^2}{2}} \to \mathbf{1}_{\{0\}}(t),$$

što nije karakteristična funkcija jer nije neprekidna u 0. Osim toga, $P(X_n \le x) \to 0.5$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa X_n ne konvergira po distribuciji u neku slučajnu varijablu (s vrijednostima u $\mathbb{R}$). To pokazuje da je u Teoremu V.3.8 (ii) nužno pretpostaviti da je limes zaista karakteristična funkcija. Srećom, dovoljan uvjet je samo da limes bude neprekidna funkcija u 0.

Zadatak V.3.8 Neka je $X_n \sim \mathscr{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ i $\mu_n \to \mu$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$. Pokažite da onda $X_n \xrightarrow{d} X$, $X \sim \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$. ■

Zadatak V.3.9 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz takav da je $P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = 1/2$. Odredite limes po distribuciji od $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$. ■

Zadatak V.3.10 Neka X_n ima diskretnu uniformnu distribuciju na skupu $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$. Pokažite da $X_n \xrightarrow{d} X$ za $X \sim \mathscr{U}(0,1)$. ■

Zadatak V.3.11 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz, $X_n \sim \mathscr{U}(0,a)$ i $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Odredite limes po distribuciji od $n(a - Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. ■

V.3.4 Konvergencije funkcija slučajnih varijabli

Ako niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira prema X u nekom smislu, postavlja se pitanje hoće li za neku funkciju g i niz $(g(X_n), n \in \mathbb{N})$ konvergirati i hoće li limes biti $g(X)$.

Teorem V.3.10 — Teorem o neprekidnom preslikavanju. Neka su $(X_n, n \in \mathbb{N})$ i X slučajne varijable i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi

(i) $X_n \xrightarrow{g.s.} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{g.s.} g(X)$,

(ii) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$,

(iii) $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.

Dokaz. (i) Slijedi jer je $\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} g(X_n(\omega)) = g(X(\omega))\}$.

(ii) Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ neka je $y_n = P(|g(X_n) - g(X)| \ge \varepsilon)$. Neka je $(y_{n(k)}, k \in \mathbb{N})$ podniz od (y_n). Po pretpostavci $X_{n(k)} \xrightarrow{P} X$ kad $k \to \infty$ pa prema Propoziciji V.3.4 postoji $(X_{n(k_m)}, m \in \mathbb{N})$ podniz od $(X_{n(k)}, k \in \mathbb{N})$ takav da $X_{n(k_m)} \xrightarrow{g.s.} X$. Po (i), onda $g(X_{n(k_m)}) \xrightarrow{g.s.} g(X)$ pa onda i $g(X_{n(k_m)}) \xrightarrow{P} g(X)$ te $y_{n(k_m)} \to 0$. Pokazali smo da proizvoljan podniz od (y_n) ima daljnji podniz koji konvergira u 0, pa onda i (y_n) konvergira u 0 (vidi Problem V.24).

(iii) Ako je h neprekidna i ograničena, onda je i $h \circ g$ neprekidna i ograničena. Prema Teoremu V.3.7 tada $\mathrm{E}h(g(X_n)) \to \mathrm{E}h(g(X))$. Kako to vrijedi za proizvoljnu neprekidnu ograničenu h, onda $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$ opet prema Teoremu V.3.7. ■

Napomena V.3.11 Nije teško pokazati da je u prethodnom teoremu dovoljno pretpostaviti da je g izmjeriva i $P(X \notin C(g)) = 0$.

Sljedeće pitanje koje promatramo vezano je uz dva niza slučajnih varijabli. Je li, primjerice, limes zbroja zbroj limesa?

Propozicija V.3.12 Ako $X_n \to X$ i $Y_n \to Y$ g.s./po vjerojatnosti/u srednjem reda p, onda $X_n + Y_n \to X + Y$ g.s./po vjerojatnosti/u srednjem reda p.

Dokaz. Za konvergenciju g.s. slijedi jer za $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \to X(\omega)\}$, $\Omega_2 = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) \to Y(\omega)\}$, vrijedi $X_n(\omega) + Y_n(\omega) \to X(\omega) + Y(\omega)$.

Za konvergenciju po vjerojatnosti treba uočiti da je

$$\{|X_n + Y_n - (X+Y)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|X_n - X| \geq \varepsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \varepsilon/2\}.$$

a za konvergenciju u srednjem iz Propozicije IV.1.14 slijedi

$$\mathrm{E}\,|X_n + Y_n - (X+Y)|^p \leq 2^p\,\mathrm{E}\,|X_n - X|^p + 2^p\,\mathrm{E}\,|Y_n - Y|^p.$$

■

Za konvergenciju po distribuciji limes zbroja ne mora biti zbroj limesa.

Zadatak V.3.12 Neka je $X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y_n = -X_n$ te $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ nezavisne. Pokažite da $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} Y$, ali $X_n + Y_n$ ne konvergira po distribuciji prema $X + Y$. ■

Uz pretpostavku nezavisnosti, aditivnost vrijedi i za limes po distribuciji.

Propozicija V.3.13 Ako $X_n \xrightarrow{d} X$ i $Y_n \xrightarrow{d} Y$, X_n i Y_n su nezavisne za svaki n i X i Y su nezavisne, onda $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$.

Dokaz. Slijedi iz teorema neprekidnosti korištenjem nezavisnosti

$$\varphi_{X_n+Y_n}(t) = \varphi_{X_n}(t)\varphi_{Y_n}(t) \to \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

■

Nezavisnosti kao pretpostavku možemo maknuti ako je jedan od limesa konstanta. Tvrdnja se u tom slučaju lako proširi i na produkte i kvocijente nizova.

Teorem V.3.14 — Slutsky teorem. Ako $X_n \xrightarrow{d} X$ i $Y_n \xrightarrow{P} c$, $c \in \mathbb{R}$, onda vrijedi

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$,
(ii) $X_n - Y_n \xrightarrow{d} X - c$,
(iii) $X_n Y_n \xrightarrow{d} Xc$,
(iv) $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c$, ako je $c \neq 0$.

Dokaz. (i) Postupamo slično kao u dokazu Teorema V.3.3. Za $x \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ takve da je $x - c, x - c - \varepsilon, x - c + \varepsilon \in C(F_X)$ imamo

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(x - c - \varepsilon) &= P(X_n \leq x - c - \varepsilon) \\
&= P(X_n \leq x - c - \varepsilon, |Y_n - c| < \varepsilon) + P(X_n \leq x - c - \varepsilon, |Y_n - c| \geq \varepsilon) \\
&\leq P(X_n \leq x - c - \varepsilon, Y_n < c + \varepsilon) + P(|Y_n - c| \geq \varepsilon) \\
&\leq P(X_n + Y_n \leq x) + P(|Y_n - c| \geq \varepsilon)
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}F_{X_n+Y_n}(x) &= P(X_n+Y_n \le x)\\ &= P(X_n+Y_n \le x, |Y_n-c|<\varepsilon) + P(X_n+Y_n \le x, |Y_n-c| \ge \varepsilon)\\ &\le P(X_n+Y_n \le x, Y_n > c-\varepsilon) + P(|Y_n-c| \ge \varepsilon)\\ &\le P(X_n \le x-c+\varepsilon) + P(|Y_n-c| \ge \varepsilon),\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$F_{X_n}(x-c-\varepsilon) - P(|Y_n-c| \ge \varepsilon) \le F_{X_n+Y_n}(x) \le F_{X_n}(x-c+\varepsilon) + P(|Y_n-c| \ge \varepsilon).$$

Pustimo li $n \to \infty$ i iskoristimo konvergenciju $Y_n \xrightarrow{P} c$, dobijemo

$$F_X(x-c-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \le F_X(x-c+\varepsilon).$$

Pustimo li $\varepsilon \to 0$, budući da je $x-c \in C(F)$ slijedi da je $\lim_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) = F_X(x-c) = F_{X+c}(x)$.

(ii) Slijedi iz (i).

(iii) Zapišemo li $X_nY_n = X_n(Y_n-c)+cX_n$, onda je prema (i) dovoljno pokazati da $X_n(Y_n-c) \xrightarrow{P} 0$ jer očito $cX_n \xrightarrow{d} cX$. Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ i $x > 0$ onda iz

$$\begin{aligned}P(|X_n(Y_n-c)| \ge \varepsilon) &= P(|X_n(Y_n-c)| \ge \varepsilon, |X_n| \le x) + P(|X_n(Y_n-c)| \ge \varepsilon, |X_n| > x)\\ &\le P(|(Y_n-c)| \ge \varepsilon/x) + P(|X_n| > x),\end{aligned}$$

imamo

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n(Y_n-c)| \ge \varepsilon) \le P(|X| > x).$$

Pustimo li $x \to \infty$, slijedi tvrdnja.

(iv) Slijedi iz (iii).

■

Zadatak V.3.13 — Cramér-Woldovo sredstvo. Neka su $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots$ d-dimenzionalni slučajni vektori. Pokažite da $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{X}$ ako i samo ako $\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{t}^T\boldsymbol{X}$ za sve $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$. ■

Zadatak V.3.14 Neka je $X_n = n$ i $Y_n = -n$. Pokažite da $X_n + Y_n$ konvergira po svim tipovima konvergencije, ali (X_n) i (Y_n) ne konvergiraju. ■

Zadatak V.3.15 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takav da X_n ima uniformnu distribuciju na skupu $(0, \frac{1}{n^2}) \cup (1, 1+\frac{1}{n})$. Ispitajte sve tipove konvergencija ovog niza prema 0 i 1 (u srednjem samo reda 2). ■

Zadatak V.3.16 Neka je $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ i X_n, $n \in \mathbb{N}$ nezavisne slučajne varijable i nezavisne od X, takve da je $P(X_n = 1) = 1 - 1/n$ i $P(X_n = n) = 1/n$. Stavimo $Y_n = X_nX$. Pokažite da

(a) $Y_n \xrightarrow{d} X$,
(b) $\mathrm{E}Y_n \to 0$,
(c) $\mathrm{Var}\, Y_n \to \infty$.

■

Zadaci za vježbu

Problem V.1 — *. Neka su $N, X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, $\mathrm{supp}(Z) \subseteq \mathbb{N}_0$, $\mathrm{supp}(X_i) \subseteq \mathbb{N}_0$ i $X_1, \ldots, X_n$ jednako distribuirane. Pokažite da je

$$G_{\sum_{i=1}^{N} X_i}(z) = G_N\left(G_{X_1}(z)\right).$$

Problem V.2 Baca se pravilan novčić. Svaki put kada padne pismo se baca pravilna kockica. Kada padne glava stanemo s igrom. Nađite funkciju izvodnicu zbroja svih brojeva koji su pali na kockici. Odredite vjerojatnosti da zbroj bude 0, 1 i 2.

Problem V.3 Nađite očekivani broj bacanja simetrične kockice do pojave dvije šestice uzastopno.

Problem V.4 Bacamo 3 pravilne kockice. Izračunajte vjerojatnost da zbroj brojeva koji su pali bude jednak 9.

Problem V.5 Neka je $n \in \mathbb{N}$ i X broj nezavisnih ponavljanja Bernoullijevog pokusa s vjerojatnošću uspjeha p do n-tog uspjeha. Odredite funkciju izvodnicu od X.

Problem V.6 — *. Mellinova transformacija slučajne varijable $X > 0$ može se definirati kao

$$\mathfrak{M}(t) = \mathfrak{M}_X(t) = \mathrm{E}(X^t),$$

za $t \in \mathbb{R}$ za koje očekivanje postoji.

(i) Pokažite da za nezavisne $X, Y > 0$ vrijedi $\mathfrak{M}_{X \cdot Y}(t) = \mathfrak{M}_X(t)\mathfrak{M}_Y(t)$.

(ii) Odredite Mellinovu transformaciju uniformne distribucije.

Problem V.7 Pokažite da ako su X i Y nezavisne i jednako distribuirane, tada $X - Y$ ima simetričnu distribuciju.

Problem V.8 Neka je (X, Y) slučajni vektor s gustoćom

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(1 + xy|x^2 - y^2|)\mathbf{1}_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y).$$

(a) Odredite marginalne distribucije i pokažite da su X i Y zavisne.

(b) Odredite distribuciju od $X + Y$.

(c) Pokažite da je $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$ i obrazložite rezultat.

Problem V.9 Pokažite da karakteristična funkcija $\mathscr{E}(\lambda)$ distribucije nije integrabilna. Komentirajte u kontekstu Teorema V.2.5.

Problem V.10 Neka je X slučajna varijabla s karakterističnom funkcijom $\varphi_X(t) = (\cos t)^3$. Izračunajte karakterističnu funkciju od $Y = X^3 - 3X^2 + 1$.

Problem V.11 Neka su $X_1, \ldots, X_n$ n.j.d. s $\mathscr{U}(-1,1)$ distribucijom. Pokažite da $Y = X_1 + \cdots + X_n$ ima funkciju gustoće

$$f_Y(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos(tx)dt.$$

Problem V.12 Odredite distribuciju slučajne varijable X s karakterističnom funkcijom

$$\varphi_X(t) = \frac{1 + e^{it} + 2e^{2it}}{4}.$$

Problem V.13 Pokažite da ako je φ karakteristična funkcija, onda je i $|\varphi(t)|^2$ karakteristična funkcija.

Problem V.14 Neka su X, Y i Z nezavisne s distribucijama zadanim s

$$P(X = k) = \frac{1}{2^k},\ k \in \mathbb{N},$$
$$P(Y = k) = \frac{2}{3^k},\ k \in \mathbb{N},$$
$$P(Z = k) = \frac{4}{5^k},\ k \in \mathbb{N}.$$

Odredite distribuciju od $X + Y + Z$.

Problem V.15 Izračunajte $\mathrm{E}X^n$, $n \in \mathbb{N}$ ako je $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$.

Problem V.16 Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable s karakterističnim funkcijama

$$\varphi_X(t) = e^{2e^{it}-2},$$
$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{4^{10}}(3e^{it} + 1)^{10}.$$

Odredite $P(X + Y = 2)$, $P(XY = 0)$ i $\mathrm{E}(XY)$.

Problem V.17 Ako je (X,Y) slučajni vektor s karakterističnom funkcijom $\varphi(t_1,t_2)$ i $\mathrm{E}X^2 < \infty$, $\mathrm{E}Y^2 < \infty$, pokažite da je

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(0,0)\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(0,0) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t_1 \partial t_2}(0,0).$$

Problem V.18 Koristeći karakteristične funkcije pokažite da je korelacija dvodimenzionalnog slučajnog vektora opisanog u Zadatku III.4.4 jednaka ρ.

Problem V.19 Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne standardne normalne, odredite distribuciju od

$$Y = \sqrt{\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}}(X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n).$$

Problem V.20 Neka su X i Y nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s parametrom $1/2$ i stavimo $X_n = Y$. Pokažite da $X_n \xrightarrow{d} X$ ali ne i po vjerojatnosti.

Problem V.21 Pokažite da ako $X_n \xrightarrow{P} X$ i $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je monoton niz, onda $X_n \xrightarrow{g.s.} X$.

Problem V.22 — *. Pokažite da je svaki od sljedećih uvjeta dovoljan za uniformnu integrabilnost niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$.

(a) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $|X_n| \leq |Y|$ pri čemu je $\mathrm{E}|Y| < \infty$.

(b) Za neki $\delta > 0$ je $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}|X_n|^{1+\delta} < \infty$.

Problem V.23 Pokažite da za $p \geq q \geq 1$, $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^q} X$.

Problem V.24 Pokažite da ako za niz realnih brojeva (y_n) svaki podniz $(y_{n(k)}, k \in \mathbb{N})$ ima daljnji podniz $(y_{n(k_m)}, m \in \mathbb{N})$ takav da $y_{n(k_m)} \to y$, onda $y_n \to y$.

Problem V.25 — *. Pokažite da je s

$$d(X,Y) = \mathrm{E}\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right)$$

definirana metrika na prostoru slučajnih varijabli (pri čemu identificiramo slučajne varijable koje su jednake g.s.) i da konvergencija u toj metrici odgovara konvergenciji po vjerojatnosti.

Problem V.26 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s funkcijama gustoće

$$f_{X_n}(x) = \frac{n}{2}\mathbf{1}_{(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})}(x).$$

Ispitajte sve tipove konvergencija ovog niza prema $X = 1$ (u srednjem samo reda 2).

Problem V.27 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s funkcijama gustoće

$$f_{X_n}(x) = nx^{n-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x).$$

Ispitajte sve tipove konvergencija ovog niza prema $X = 1$ (u srednjem samo reda 2).

Problem V.28 Neka X_n ima geometrijsku distribuciju s parametrom $p_n = 1/n$. Odredite limes po distribuciji od X_n/n.

Problem V.29 — Poissonova aproksimacija binomne. Neka je $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ i $p_n n \to \lambda > 0$. Pokažite da $X_n \xrightarrow{d} X$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Problem V.30 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz i $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Dokažite sljedeće tvrdnje.

(a) Ako je $F_{X_1}(x) = (1-x^{-\alpha})\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$, $\alpha > 0$, onda $Y_n/n^{1/\alpha} \xrightarrow{d} Y$ gdje Y ima **Fréchetovu distribuciju** zadanu funkcijom distribucije

$$F_Y(y) = e^{-y^{-\alpha}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y).$$

(b) Ako je $F_{X_1}(x) = (1-|x|^\beta)\mathbf{1}_{(-1,0)}(x) + \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, $\beta > 0$, onda $n^{1/\beta}Y_n \xrightarrow{d} Y$ gdje Y ima **Weibullovu distribuciju** zadanu funkcijom distribucije

$$F_Y(y) = 1-(1-e^{-|y|^\beta})\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(y).$$

(c) Ako je $F_{X_1}(x) = (1-e^{-x})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, onda $Y_n - \log n \xrightarrow{d} Y$ gdje Y ima **Gumbelovu distribuciju** zadanu funkcijom distribucije

$$F_Y(y) = e^{-e^{-y}}.$$

Ove tri distribucije su i jedine distribucije koje se mogu pojaviti kao limes normiranog i centriranog niza maksimuma n.j.d. niza, a općenita tvrdnja poznata je kao Fisher–Tippett–Gnedenko teorem.

Problem V.31 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz i $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Za distribucije iz prethodnog zadatka pokažite

(a) ako je X_1 Frechetova, onda je $Y_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X_1$,

(b) ako je X_1 Weibullova, onda je $Y_n \stackrel{d}{=} n^{-1/\beta} X_1$,

(c) ako je X_1 Frechetova, onda je $Y_n \stackrel{d}{=} X_1 + \ln n$.

Problem V.32 Neka X_n ima gustoću

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ispitajte konvergenciju od X_n po vjerojatnosti, u srednjem i po distribuciji. Ispitajte konvergenciju g.s. ako je

(a) $X_n = X_1/n$,

(b) $(X_n, n \in \mathbb{N})$ su nezavisne.

Problem V.33 Neka su $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. s diskretnom uniformnom distribucijom na $\{0, 1, \ldots, 9\}$ i $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k/10^k$. Odredite limes po distribuciji od $(X_n, n \in \mathbb{N})$.

Problem V.34 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$ i $P(X_n = 1) = 1/n$.

(a) Pokažite da (X_n) konvergira u 0 po vjerojatnosti ali ne i g.s.

(b) Neka je $Y_k = X_{k^2}$ podniz. Pokažite da Y_k konvergira g.s. u 0 kad $k \to \infty$. Obrazložite kako je to u skladu s odnosom između konvergencije po vjerojatnosti i g.s.

VI

Granični rezultati

VI.1. Zakoni velikih brojeva

Zakoni velikih brojeva govore o asimptotskom ponašanju sume odnosno prosjeka niza nezavisnih slučajnih varijabli. S obzirom na tip konvergencije, razlikujemo slabe i jake zakon velikih brojeva.

VI.1.1 Slabi zakoni velikih brojeva

Slabi zakoni velikih brojeva govore o konvergenciji po vjerojatnosti. Za niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ s

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

ćemo označavati parcijalne sume, a s $\overline{X}_n = S_n/n$ aritmetičku sredinu.

Dokazi zakona velikih brojeva imaju dugu povijest. U svom najpoznatijem obliku pretpostavka je da je niz n.j.d. s konačnim očekivanjem. Ovaj oblik poznat je i kao Hinčinov slabi zakon velikih brojeva.

Teorem VI.1.1 — Slabi zakon velikih brojeva (Hinčin). Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz, $\mathrm{E}|X_1| < \infty$ i $\mathrm{E}X_1 = \mu$. Tada

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Dokaz. Prema Teoremu V.2.7 imamo

$$\varphi_{X_1}(t) = 1 + i\mu t + o(t),$$

gdje je $o(t)$ funkcija takva da $o(t)/t \to 0$ kad $t \to 0$. Sada slijedi

$$\varphi_{S_n/n}(t) = \left(1 + i\mu\frac{t}{n} + o(t/n)\right)^n \to e^{i\mu t}$$

kad $n \to \infty$, pri čemu smo iskoristili tvrdnju Problema VI.1. Kako je limes karakteristična funkcija konstante, po teoremu neprekidnosti slijedi da $S_n/n \xrightarrow{d} \mu$, a kako je μ konstanta onda i $S_n/n \xrightarrow{P} \mu$. ■

Sljedeći oblik slabog zakona velikih brojeva poznat je i kao Čebiševljev. U njemu zahtijevamo da su varijance konačne i uniformno ograničene, ali slučajne varijable ne moraju biti jednako distribuirane, pa čak ni nezavisne nego samo nekorelirane.

Teorem VI.1.2 — Slabi zakon velikih brojeva (Čebišev). Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nekoreliranih slučajnih varijabli takvih da za neki $C > 0$ vrijedi $\mathrm{E}X_n = \mu$ i $\mathrm{Var}X_n \leq C$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Dokaz. Kako je $\mathrm{E}(S_n/n) = \mu$, imamo

$$\mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)^2 = \mathrm{Var}\,(S_n/n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}X_i \leq \frac{C}{n} \to 0,$$

kad $n \to \infty$. Stoga, $S_n/n \xrightarrow{L^2} \mu$ pa i $S_n/n \xrightarrow{P} \mu$. ■

Može se pokazati da konačnost prvog momenta nije nužan uvjet za slabi zakon velikih brojeva. Naravno, u takvoj situaciji treba redefinirati smisao limesa. Sljedeći rezultat pripisuje se hrvatsko-američkom matematičaru Vilimu (Williamu) Felleru [4].

Teorem VI.1.3 — Slabi zakon velikih brojeva (Feller). Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz takav da

$$xP(|X_1| > x) \to 0, \qquad \text{kad } x \to \infty. \tag{VI.1.1}$$

Tada

$$\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}(X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1| \leq n\}}) \xrightarrow{P} 0.$$

Uvjet (VI.1.1) je nužan za postojanje niza konstanti (a_n) takvih da $S_n/n - a_n \xrightarrow{P} 0$.

■ **Primjer VI.1.1** U Zadatku IV.1.13 vidjeli smo slučajnu varijablu X za koju je $\mathrm{E}X = \infty$, ali $xP(X > x) \to 0$ pa je Fellerov teorem primjenjiv.

Primijetimo isto tako da iz Zadatka IV.1.9 slijedi za $p = 1 - \varepsilon$ da je $\mathrm{E}X^{1-\varepsilon} = \int_0^\infty (1-\varepsilon)x^{-1-\varepsilon} xP(X > x)dx$. Ako $xP(X > x) \to 0$, onda je $\mathrm{E}X^{1-\varepsilon} < \infty$ za svaki $\varepsilon > 0$ pa Fellerov uvjet (VI.1.1) nije puno slabiji od konačnosti prvog momenta.

■ **Primjer VI.1.2** Promotrimo igru u kojoj se novčić baca sve dok ne padne pismo, a ako pismo padne u k-tom bacanju, onda osvajamo 2^k. Ako je X dobitak, onda je

$$P(X = 2^k) = 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Koliko bi platili da igramo takvu igru? Fer cijena bi bila očekivani dobitak, ali je

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k P(X = 2^k) = \infty,$$

a sigurno ne bismo platili beskonačno novaca da bi igrali ovakvu igru. Problem je poznat kao St. Petersburg paradoks.

Jedno rješenje dao je Feller. Ako promotrimo niz nezavisnih ovakvih igara $(X_n, n \in \mathbb{N})$, onda bi S_n bio dobitak u n igara. Feller je pokazao da

$$\frac{S_n}{n \log_2 n} \xrightarrow{P} 1,$$

što je jedan oblik slabog zakona velikih brojeva, ali uz nešto drugačiju normalizaciju. Feller je predložio da se cijena određuje na osnovu broja igara koje ćemo odigrati. Primjerice, za $n = 1024$ igre, fer cijena bi bila $\log_2 1024 = 10$ po igri.

Zadatak VI.1.1 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz i X_1 ima Cauchyjevu distribuciju. Pokažite da ne vrijedi slabi zakon velikih brojeva. ■

Zadatak VI.1.2 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz takav da je $f_{X_1}(x) = 1/(x \log x)^2 \mathbf{1}_{(2,\infty)}(x)$. Pokažite da vrijedi slabi zakon velikih brojeva. ■

Zadatak VI.1.3 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s konačnim varijancama i $\mathrm{E}X_n = \mu$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pokažite da su sljedeći uvjeti dovoljni za slabi zakon velikih brojeva:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \operatorname{Var} X_k = 0$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Var} X_n = 0$.

■

Zadatak VI.1.4 Vrijedi li slabi zakon velikih brojeva za niz nezavisnih slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$, pri čemu je

(a) $X_n \sim \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{1}{2n\log n} & 1 - \frac{1}{n\log n} & \frac{1}{2n\log n} \end{pmatrix}$,

(b) $X_n \sim \begin{pmatrix} -3^{-n} & 3^{-n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

■

Zadatak VI.1.5 Neka su X_n, $n \in \mathbb{N}$, nezavisne $X_n \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Pokažite da

(a) $e^{-\overline{X}_n} \xrightarrow{P} e^{-\lambda}$.

(b) $\overline{X}_n e^{-\overline{X}_n} \xrightarrow{P} \lambda e^{-\lambda}$.

■

Zadatak VI.1.6 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz, $X_1 \sim \mathscr{U}(0,1)$ i $Y_n = \min_{1 \le k \le n} X_k$. Pokažite da

$$Y_n \xrightarrow{P} 0.$$

■

VI.1.2 Borel-Cantellijeve leme

Neka je $(A_n, n \in \mathbb{N})$ niz događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. **Limes superior** tog niza je događaj

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n} A_k,$$

a **limes inferior**

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n} A_k.$$

Primijetimo da ako je $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$, onda je $\omega \in \bigcup_{k=n} A_k$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. To znači da je $\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, $\omega \in A_2 \cup A_3 \cup \cdots$ itd. Koliko god daleko otišli u nizu skupova $A_1, A_3, \ldots$, ω će biti barem u jednom od preostalih skupova, a to znači da će ω biti u beskonačno mnogo skupova A_n, $n \in \mathbb{N}$ (ali moguće je da u beskonačno mnogo njih i ne bude).

S druge strane, ako je $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$, onda je ω u barem jednom od skupova $\bigcap_{k=n} A_k$, $n \in \mathbb{N}$. To znači da je $\omega \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ ili $\omega \in A_2 \cap A_3 \cap \cdots$ itd. Dakle, ω će biti u svim skupovima A_n, $n \in \mathbb{N}$ osim u eventualno konačno mnogo njih.

Time smo pokazali da je

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ za beskonačno mnogo } n\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ za sve } n \text{ osim eventualno konačno mnogo njih}\},$$

odnosno, $\limsup_{n\to\infty} A_n$ se dogodi ako i samo ako se dogodi beskonačno mnogo događaja A_n, a $\liminf_{n\to\infty} A_n$ se dogodi ako i samo ako se dogode svi događaji A_n osim eventualno konačno mnogo njih. U vjerojatnosti se često piše i $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(A_n \text{ b.č.})$, što stoji za beskonačno često.

Zadatak VI.1.7 Odredite $\limsup_{n\to\infty} A_n$ i $\liminf_{n\to\infty} A_n$ ako je
(i) $A_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$,
(ii) $A_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, 1 - \frac{(-1)^n}{n}\right]$.

Zadatak VI.1.8 Pokažite da je

$$\mathbf{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n},$$
$$\mathbf{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} 1_{A_n}.$$

Teorem VI.1.4 — (Prva) Borel-Cantellijeva lema. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, onda je

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(A_n \text{ b.č.}) = 0.$$

Dokaz. Familija $\{\bigcup_{k=n} A_k, n \in \mathbb{N}\}$ je padajuća pa je

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0.$$

∎

Ova tvrdnja je zapravo nešto što smo već pokazali u Propoziciji V.3.1, odnosno dovoljnom uvjetu (V.3.1). S tim u vezi imamo i sljedeći zadatak.

Zadatak VI.1.9 Pokažite da $X_n \xrightarrow{g.s.} X$ ako i samo ako $P(|X_n - X| \ge \varepsilon \text{ b.č.}) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$.

Dakle, ako $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, onda se g.s. neće dogoditi beskonačno mnogo A_n, odnosno g.s. će se dogoditi samo konačno mnogo događaja A_n. Obrat općenito ne vrijedi, ali vrijedi uz pretpostavku nezavisnosti.

Teorem VI.1.5 — Druga Borel-Cantellijeva lema. Ako su A_n, $n \in \mathbb{N}$, nezavisni događaji i $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, onda je

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(A_n \text{ b.č.}) = 1.$$

Dokaz. Kako je $1 - x \leq e^{-x}$ za $x \geq 0$, zbog nezavisnosti imamo

$$P\left(\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right)^c\right) = P\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{m} P(A_k^c) = \prod_{k=n}^{m}(1 - P(A_k)) \leq e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} \to 0,$$

kad $m \to \infty$. Sada slijedi

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} P\left(\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right)^c\right) = 1.$$

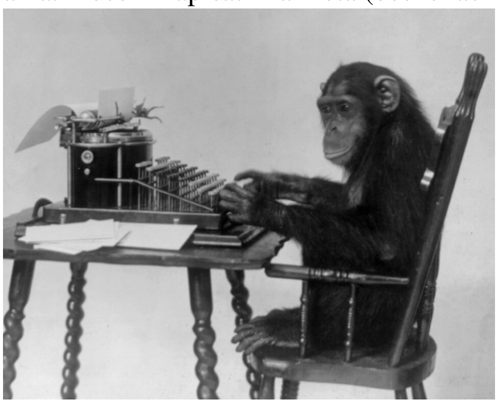
■

Prethodna dva teorema zajedno su poznata i kao Borelov zakon 0-1 za niz nezavisnih događaja jer $P(A_n$ b.č.) može imati ili vjerojatnost nula ili jedan.

Zadatak VI.1.10
(a) Hoće li pismo pasti beskonačno puta u bacanju pravilnog novčića unedogled?
(b) Hoće li glava pasti beskonačno puta u bacanju nepravilnog novčića unedogled?
(c) Hoće li dva pisma zaredom pasti beskonačno puta u bacanju novčića unedogled?
(d) Hoće li 1000 pisama zaredom pasti beskonačno puta u bacanju novčića unedogled?

■

■ **Primjer VI.1.3** Besmrtni majmun sjedi i tipka po tipkovnici slučajno udarajući po tipkama. Hoće li napisati Hamleta (beskonačno puta)?



VI.1.3 Jaki zakon velikih brojeva

Za razliku od slabog zakona koji govori o konvergenciji prosjeka po vjerojatnosti, jaki zakon govori o konvergenciji g.s.

Teorem VI.1.6 — Jaki zakon velikih brojeva. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz, $\mathrm{E}\,|X_1| < \infty$

i $\mathrm{E}X_1 = \mu$. Tada

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{g.s.} \mu.$$

Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju pod pretpostavkom da je $\mathrm{E}X_1^4 < \infty$, a potpuni dokaz može se vidjeti u [8, Teorem 12.15] ili [3, Teorem 2.4.1].

Možemo pretpostaviti da je $\mu = 0$, inače možemo promatrati $X_n' = X_n - \mu$. Sada je

$$\mathrm{E}S_n^4 = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^4 = \sum_{1 \le i,j,k,l \le n} \mathrm{E}(X_i X_j X_k X_l).$$

Zbog nezavisnosti članovi oblika $\mathrm{E}(X_i X_j X_k X_l)$, $\mathrm{E}(X_i^2 X_j X_k)$ i $\mathrm{E}(X_i^3 X_j)$ su jednaki nula. Jedini članovi koji nisu nula su oblika $\mathrm{E}X_i^4$ kojih ima n, te $\mathrm{E}X_i^2 X_j^2 = (\mathrm{E}X_i^2)^2$ kojih ima $\frac{n(n-1)}{2} 6 = 3n(n-1)$. Dakle,

$$\mathrm{E}S_n^4 = n\mathrm{E}X_1^4 + 3(n^2 - n)(\mathrm{E}X_1^2)^2 \le Cn^2$$

za neku konstantu $C > 0$ i iz Markovljeve nejednakosti (Korolar IV.1.11) imamo

$$P(|S_n/n| \ge \varepsilon) \le \frac{\mathrm{E}S_n^4}{n^4 \varepsilon^4} \le \frac{C}{n^2 \varepsilon^4},$$

pa je po Borel-Cantellievoj lemi $P(|S_n/n| \ge \varepsilon \text{ b.č.}) = 0$. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan slijedi da $S_n/n \xrightarrow{g.s.} 0$. ■

■ **Primjer VI.1.4** Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz i X_1 ima funkciju distribucije F. U statistici, $X_1, \ldots, X_n$ se naziva jednostavan slučajni uzorak iz funkcije distribucije F. Procjenitelj funkcije distribucije $F(x)$ u točki $x \in \mathbb{R}$ je empirijska funkcija distribucije

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k \le x\}}.$$

Prema jakom zakonu velikih brojeva, $\widehat{F}_n(x) \xrightarrow{g.s.} \mathrm{E}\mathbf{1}_{\{X_1 \le x\}} = F(x)$, pa je $\widehat{F}_n(x)$ konzistentan procjenitelj za $F(x)$. Može se pokazati da vrijedi i više, konvergencija je uniformna po $x \in \mathbb{R}$ što je tvrdnja Glivenko-Cantelli teorema.

Zadatak VI.1.11 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz, $X_n \sim \mathscr{U}(0,1)$. Pokažite da $\prod_{i=1}^n X_i^{1/n}$ konvergira g.s. i odredite limes. ■

Zadatak VI.1.12 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz s očekivanjem μ i varijancom σ^2. Pokažite da

$$\frac{X_1 + \cdots X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2} \xrightarrow{g.s.} \frac{\mu}{\mu^2 + \sigma^2}.$$

■

Zadatak VI.1.13 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz s očekivanjem μ i varijancom σ^2.

Pokažite da je varijanca uzorka

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

jako konzistentan procjenitelj za σ^2, odnosno $S_n^2 \stackrel{g.s.}{\to} \sigma^2$. Je li $\sqrt{S_n^2}$ jako konzistentan procjenitelj za σ? ■

Zadatak VI.1.14 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli. Pokažite da

(i) $X_n \stackrel{g.s.}{\to} 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \stackrel{g.s.}{\to} 0$,

(ii) $X_n \stackrel{L^p}{\to} 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \stackrel{L^p}{\to} 0$,

(iii) $X_n \stackrel{P}{\to} 0 \not\Rightarrow \frac{S_n}{n} \stackrel{P}{\to} 0$.

■

Zadatak VI.1.15 Štap duljine jedan slomimo na slučajnom mjestu, stoga ostatak dolazi iz $\mathscr{U}(0,1)$ distribucije. Ostatak opet lomimo na isti način, i tako dalje. Neka je X_n duljina štapa koji ostane nakon n lomljenja. Odredite g.s. limes od $\log X_n/n$. ■

VI.2. Centralni granični teoremi

Naziv centralni granični teoremi dolazi od činjenice da su ovi rezultati od centralne važnosti u teoriji vjerojatnosti. Zakoni velikih brojeva govore kada $S_n/n - \mu$ konvergira prema 0 po vjerojatnosti i g.s., a onda i po distribuciji. Pitanje koje se postavlja jest možemo li uz neku drugu normalizaciju dobiti limes po distribuciji koji bi bio netrivijalan.

VI.2.1 Nizovi nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli

Kao i u prethodnom, za niz $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ označavamo $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ i $\overline{X}_n = S_n/n$.

Teorem VI.2.1 — Centralni granični teorem. Neka je $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz takav da je $\mathrm{E}X_1^2 < \infty$, $\mathrm{E}X_1 = \mu$ i $\mathrm{Var}\,X_1 = \sigma^2$. Tada

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Dokaz. Neka je $Y_n = (X_n - \mu)/\sigma$ tako da je $(Y_n,\, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz takav da je $\mathrm{E}Y_1 = 0$, $\mathrm{Var}\,Y_1 = 1$ i

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n Y_k.$$

Prema Korolaru V.2.8 imamo da je

$$\varphi_{Y_1}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

pa je prema Problemu VI.1

$$\varphi_{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \left(\varphi_{Y_1}(t/\sqrt{n})\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2/n)\right)^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Tvrdnja sada slijedi iz teorema neprekidnosti. ∎

Kako je $\mathrm{E}\,S_n = n\mu$ i $\mathrm{Var}\,S_n = n\,\mathrm{Var}\,X_1 = n\sigma^2$, tvrdnju teorema možemo zapisati i kao

$$\frac{S_n - \mathrm{E}\,S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S_n}} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1),$$

odnosno, standardizirane parcijalne sume asimptotski imaju standardnu normalnu distribuciju. Osim toga je

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{n\left(\frac{1}{n}S_n - \mu\right)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}_n - \mathrm{E}\overline{X}_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,\overline{X}_n}},$$

jer je $\mathrm{E}\overline{X}_n = \mu$ i $\mathrm{Var}\,\overline{X}_n = \frac{1}{n^2}n\,\mathrm{Var}\,X_1 = \frac{\sigma^2}{n}$. Tako centralni granični teorem govori da standardizirani prosjek asimptotski ima standardnu normalnu distribuciju. Možemo reći i da se distribucija prosjeka $\overline{X}$ može aproksimirati $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ distribucijom, odnosno distribucija parcijalne sume S_n se može aproksimirati $\mathcal{N}\left(\mu n, \sigma^2 n\right)$ distribucijom.

Prvi oblik centralnog graničnog teorema potječe od de Moivrea i Laplacea i govori o aproksimaciji binomne distribucije normalnom.

Zadatak VI.2.1 Pokažite da ako je $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, onda

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

■

Zadatak VI.2.2 Ako u (europskom) ruletu igramo na boju s ulozima 1, aproksimirajte vjerojatnost da nismo na gubitku nakon 400 igara. ■

Zadatak VI.2.3 Koristeći centralni granični teorem aproksimirajte najuži interval u kojem će broj pisama u 10000 bacanja pravilnog novčića biti s vjerojatnošću 0.95. ■

Zadatak VI.2.4 Koristeći centralni granični teorem, aproksimirajte vjerojatnost da je broj pisama u 16 bacanja pravilnog novčića jednak 8 tako da tu vjerojatnost promatrate kao vjerojatnost da je broj pisama u intervalu $[7.5, 8.5]$. Usporedite s egzaktnom vrijednošću. ■

Zadatak VI.2.5 Prosjak dobije novčić od prolaznika s vjerojatnošću 0.05. Koristeći centralni granični teorem, odgovorite koliko najmanje prolaznika treba proći ulicom da bi prosjak skupio barem 150 novčića s vjerojatnošću barem 0.95? ■

Zadatak VI.2.6 Ako je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz, $\mathrm{E}X_1 = 0$, $\mathrm{E}X_1^2 = \sigma^2 < \infty$, pokažite da

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n X_k^2}} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

■

VI.2.2 Nizovi nezavisnih slučajnih varijabli

Sljedeći teorem generalizira centralni granični teorem na nizove koji su nezavisni, ali ne moraju biti jednako distribuirani. Prvi dokaz dao je Jarl Lindeberg, dok je Feller pokazao da je Lindebergov uvjet i nužan (uz dodatnu pretpostavku).

Teorem VI.2.2 — Lindeberg-Fellerov centralni granični teorem. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s konačnim varijancama, $\mathrm{E}\, X_n = \mu_n$, $\mathrm{Var}\, X_n = \sigma_n^2$ i označimo $s_n^2 = \mathrm{Var}\, S_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathrm{E}\left((X_k - \mu_k)^2 \mathbf{1}_{\{|X_k-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}\right) = 0, \tag{VI.2.1}$$

onda

$$\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{s_n} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Dokaz se može vidjeti u [8, Teorem 14.3]. Uvjet (VI.2.1) poznat je i kao **Lindebergov uvjet**. Riječima, Lindebergov uvjet pretpostavlja da je za svaki k većina vjerojatnosne mase od X_k koncentrirana u intervalu oko μ_k i da je taj interval mali u usporedbi s s_n.

Pretpostavimo da vrijedi Lindebergov uvjet. Tada

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_k^2}{s_n^2} &= \frac{1}{s_n^2}\mathrm{E}\,(X_k-\mu_k)^2 = \frac{1}{s_n^2}\mathrm{E}\left((X_k-\mu_k)^2\mathbf{1}_{\{|X_k-\mu_k|\le\varepsilon s_n\}}\right) + \frac{1}{s_n^2}\mathrm{E}\left((X_k-\mu_k)^2\mathbf{1}_{\{|X_k-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}\right)\\ &\le \varepsilon^2 + \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{E}\left((X_k-\mu_k)^2\mathbf{1}_{\{|X_k-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}\right) \to \varepsilon^2,\end{aligned}$$

kad $n \to \infty$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \le \varepsilon^2.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, slijedi da

$$\max_{1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \to 0,$$

odnosno, Lindebergov uvjet povlači da varijanca niti jedne slučajne varijable ne dominira ukupnu varijancu. Osim toga, iz Čebiševljeve nejednakosti slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} P\left(|X_k - \mu_k| > \varepsilon s_n\right) \le \lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = 0.$$

Kažemo da su slučajne varijable X_k **uniformno asimptotski zanemarive**, što bi značilo da svaki član sume u maloj mjeri doprinosi sumi, ali ne dominira u ukupnoj sumi. Takvi uvjeti tipični su za centralne granične teoreme. Mogli bi reći da zbroj velikog broja malih, nezavisnih efekata asimptotski ima normalnu distribuciju.

Zadatak VI.2.7 Pokažite da centralni granični teorem slijedi iz Lindeberg-Fellerovog teorema. ■

Zadatak VI.2.8 — Ljapunovljev centralni granični teorem. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je za neki $\delta > 0$, $\mathrm{E}|X_n|^{2+\delta} < \infty$ za sve $n \in \mathbb{N}$ te označimo $\mathrm{E}X_n = \mu_n$, $\mathrm{Var}X_n = \sigma_n^2$ i $s_n^2 = \mathrm{Var}S_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Pokažite da ako vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathrm{E}|X_k - \mu_k|^{2+\delta} = 0,$$

onda

$$\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{s_n} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

■

Zadatak VI.2.9 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d niz neprekidnih slučajnih varijabli i R_n rang od X_n u nizu $X_1, \ldots, X_n$, odnosno

$$R_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j \geq X_n\}}.$$

(vidi Zadatak IV.2.6). Pokažite da broj rekorda asimptotski ima normalnu distribuciju. ■

Zadatak VI.2.10 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ i $P(X_n = -\sqrt{n}) = P(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{2n^2}$. Pokažite da vrijedi centralni granični teorem. ■

VI.2.3 Generalizacije i dalje

Osnova uvjeta graničnih teorema s normalnom distribucijom u limesu jest da pojedinačni efekti ne smiju biti veliki (konačna varijanca) i efekti ne smiju biti zavisni (nezavisnost). Što kada to nije slučaj?

Ako je varijanca beskonačna i dalje je moguće imati granični teorem, no distribucija u limesu ne mora biti normalna. Općenito, ako za n.j.d. niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ i neke nizove (a_n) i (b_n) vrijedi da $(S_n - a_n)/b_n$ konvergira po distribuciji nekoj slučajnoj varijabli Y, onda Z ima **stabilnu distribuciju**. Kažemo da je distribucija od Y stabilna ako za svaki n postoje brojevi a_n i b_n takvi da za n.j.d. niz $Y_1, \ldots, Y_n$ jednako distribuiranih kao Y vrijedi

$$\frac{Y_1 + \ldots Y_n - a_n}{b_n} \stackrel{d}{=} Y.$$

Normalna i Cauchyjeva distribucija su primjeri stabilnih distribucija.

Stvari postaju značajno kompleksnije ako uklonimo pretpostavku nezavisnosti. U tom slučaju nužno je pretpostaviti nešto o strukturi zavisnosti, a različite strukture mogu voditi različitim graničnim teoremima. U ovim slučajevima uvijek se razmatra konvergencija procesa parcijalnih suma kako bi se dobila informacija o strukturi zavisnosti u limesu.

Zadaci za vježbu

Problem VI.1 — *. Pokažite da ako za niz $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$, $a_n \to a$, onda $(1 + a_n/n)^n \to e^a$.

Problem VI.2 Vrijedi li slabi zakon velikih brojeva za niz nezavisnih slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$, pri čemu je

(a) $X_n \sim \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n \\ 2^{-2n-1} & 1-2^{-2n} & 2^{-2n-1} \end{pmatrix}$,

(b) $X_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{n} & 1-\frac{2}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$,

Problem VI.3 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, $X_n \sim \mathscr{E}(\sqrt{n})$. Vrijedi li za ovaj niz slabi zakon velikih brojeva?

Problem VI.4 Pokažite da za niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom $P(X_n = -n^\alpha) = P(X_n = n^\alpha) = 1/2$ vrijedi slabi zakon velikih brojeva ako je $\alpha < 1/2$.

Problem VI.5 U n kutija nezavisno se ubacuje n kuglica tako da je svaka kutija jednako vjerojatna. Neka je N_n broj praznih kutija nakon ubačenih n kuglica.

(i) Izračunajte $\mathrm{E}\,N_n$ i $\mathrm{Var}\,N_n$.

(ii) Odredite limes po vjerojatnosti od N_n/n kad $n \to \infty$.

Problem VI.6 — Numerička integracija. Neka je $g : [0,1] \to [0,1]$ neprekidna funkcija. Za n nezavisno generiranih točaka iz uniformne distribucije na $[0,1] \times [0,1]$, neka je U_n broj točaka koje su ispod grafa funkcije. Pokažite da

$$\frac{U_n}{n} \overset{g.s.}{\to} \int_0^1 g(x)dx.$$

Problem VI.7 Pokažite da za svaki niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ postoji niz (a_n) takav da je $X_n/a_n \overset{g.s.}{\to} 0$.

Problem VI.8 — *. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz i $X_1 \sim \mathscr{E}(1)$. Pokažite da $\max\{X_1, \dots, X_n\}/\log n \overset{g.s.}{\to} 1$.

Problem VI.9 — *. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli tako da je

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{1}{2n\log n} & 1-\frac{1}{n\log n} & \frac{1}{2n\log n} \end{pmatrix}.$$

Pokažite da $S_n/n \xrightarrow{P} 0$, ali ne vrijedi da $S_n/n \xrightarrow{g.s.} 0$.

Problem VI.10 Neka je $X_n \sim \chi^2(n)$. Pokažite da X_n/n konvergira u 1 u srednjem (reda 2) i po vjerojatnosti.

Problem VI.11 Iz kutije u kojoj se nalazi 300 bijelih i 200 crnih kuglica slučajno se izvlači 150 kuglica s vraćanjem. Koristeći centralni granični teorem aproksimirajte vjerojatnost da je broj izvučenih bijelih kuglica između 78 i 108. Usporedite s egzaktnom vjerojatnošću.

Problem VI.12 Koristeći centralni granični teorem, aproksimirajte vjerojatnost da među 1000 novorođenčadi bude barem 490 dječaka, ako je jednako vjerojatno da je novorođenče dječak ili djevojčica.

Problem VI.13 Pravilnu kockicu bacamo 4500 puta. Koristeći centralni granični teorem, odredite najuži interval u kojemu je s vjerojatnošću barem 0.9 relativna frekvencija šestica.

Problem VI.14 Ispit ima 40 pitanja s četiri ponuđena odgovora od koji je jedan točan. Za točan odgovor osvaja se 15 bodova, a za netočan se gubi 5 bodova. Kolika je vjerojatnost da slučajno zaokružujući imamo barem 120 bodova? Izračunajte isto ako nema negativnih bodova. Koristite centralni granični teorem.

Problem VI.15 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz takav da je $\mathrm{E}X_1 = 20$ i $\mathrm{Var}X_1 = 4$. Aproksimirajte $P(19.9 < \overline{X}_{1000} < 20.1)$ koristeći centralni granični teorem.

Problem VI.16 Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ n.j.d. niz takav da je $X_1 \sim \mathscr{E}(1)$. Aprokismirajte vjerojatnosti $P(S_{100} \geq 110)$ i $P(1.1 < \overline{X}_{100} < 1.2)$.

Problem VI.17 Proizvod ima grešku samo prve vrste s vjerojatnošću 0.01, grešku samo druge vrste s vjerojatnošću 0.02, a obje greške s vjerojatnošću 0.01. Odgovorite korištenjem centralnog graničnog teorema.

(a) Aproksimirajte vjerojatnost da će od 1000 proizvoda barem 25 biti neispravno.
(b) Koliko treba biti veliko skladište da bi moglo primiti sve neispravne proizvode na 1000 proizvoda s vjerojatnošću 0.98?
(c) Koliko proizvoda treba proizvesti da bi s vjerojatnošću barem 0.99 bilo barem 1000 ispravnih.

Problem VI.18 Broj pješaka koji prelaze pješački prijelaz tijekom jedne minute ima $\mathscr{P}(8)$ distribuciju i broj pješaka je nezavisan po minutama. Odgovorite korištenjem centralnog graničnog teorema.

(a) Ako tijekom jednog sata prijeđe barem 450 pješaka postavit će se semafor. Kolika je vjerojatnost da će semafor biti postavljen?
(b) Koliko vremena treba proći da bi s vjerojatnošću 0.95 barem 500 pješaka prešlo prijelaz?

Problem VI.19 Brojevi se generiraju nezavisno iz $\mathscr{U}(0,1)$ distribucije. Odgovorite korištenjem centralnog graničnog teorema.

(a) Kolika je vjerojatnost da je produkt 30 brojeva između e^{-10} i e^{-20}?
(b) Koliko brojeva treba generirati da bi produkt s vjerojatnošću 0.99 bio manji od e^{-50}?

Problem VI.20 Neka je S_n broj bacanja pravilne kockice dok ne šestica ne padne n puta. Odgovorite korištenjem centralnog graničnog teorema.

(a) Ako je šestica pala 100 puta, kolika je vjerojatnost da je broj bacanja manji od 450?
(b) Koliki treba biti n da bi broj bacanja bio barem 300 s vjerojatnošću 0.95?

Problem VI.21 Pokažite da ako $X_n \sim \chi^2(n)$, $n \in \mathbb{N}$, onda

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Problem VI.22 Koristeći centralni granični teorem pokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Problem VI.23 Cijena dionice se mijenja tako da svake minute (nezavisno od prethodnog kretanja) može narasti za 0.05 s vjerojatnošću 0.5, pasti za 0.05 s vjerojatnošću 0.3 ili ostati ista s vjerojatnošću 0.2. Odgovorite koristeći centralni granični teorem.
(a) Kolika je vjerojatnost da za tri sata cijena naraste za više od 2.76?
(b) U financijama, za dani $p \in (0,1)$, VaR (value at risk) je iznos $x > 0$ takav da postoji vjerojatnost $1-p$ da će se dogoditi pad vrijednosti za $-x$ ili veći pad u nekom vremenskom periodu. Izračunajte VaR za vjerojatnost $p = 0.95$ i vremenski period od 30 minuta.

Literatura

[1] Leo Breiman. „Probability”. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA* (1968.) (citirano na stranici 6).

[2] Donald L Cohn. *Measure theory*. Birkhäuser, 1980. (citirano na stranici 7).

[3] Rick Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge University Press, 2012. (citirano na stranicama 37, 118, 133).

[4] William Feller. *Probability Theory and its Applications, volume II*. John Wiley & Sons, 1971. (citirano na stranici 129).

[5] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. Sv. 40. John Wiley & Sons, 1999. (citirano na stranicama 11, 37).

[6] Dragan Jukić. *Uvod u teoriju mjere i integracije. Prvi dio*. Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2008. (citirano na stranicama 10, 20).

[7] A N Kolomogorov. *Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung*. 1933. (citirano na stranici 2).

[8] Nikola Sarapa. *Teorija vjerojatnosti*. Školska knjiga, 1987. (citirano na stranicama 18, 37, 49, 58, 70, 95, 109, 118, 133, 137).