PISMENI 1

18.06.2021.

Pravila

Pismeni ispit se piše 120 minuta te se predaje s papirom sa zadacima. Ispit nosi 100 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora. Sve tvrdnje je potrebno obrazloziti.

Zadatak 1 (20 bodova). Neka su u vektorskom prostoru V dani konačni skupovi $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$. Dokažite da je tada $[A] = [B]$ ako i samo ako je $a_i \in [B]$, za svaki $i = 1, \ldots, r$ i $b_j \in [A]$, za svaki $j = 1, \ldots, s$,

Zadatak 2 (20 bodova). Neka su M i L međusobno različiti potprostori vektorskog prostora V te neka vrijedi

$$\dim L = \dim M = 4, \ \dim V = 5.$$

Odredite koliko je tada $\dim(L \cap M)$.

Zadatak 3 (20 bodova). Provjerite je li operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definiran s

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$$

linearan? Ukoliko jeste, odredite bazu za sliku te bazu za jezgru operatora $\mathcal{A}$ te zatim odredite rang i defekt operatora $\mathcal{A}$.

Zadatak 4 (20 bodova). Dokažite da je preslikavanje definirano s

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^T A), \quad A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

skalarni produkt.

Zadatak 5 (20 bodova). U pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ odredite skup svih rješenja jednadžbe

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 4\sqrt{2}x_2 + 4 = 0.$$