Pravila

Pismeni ispit se piše 120 minuta te se predaje s papirom sa zadacima. Ispit nosi 100 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora. Sve tvrdnje je potrebno obrazloziti.

Zadatak 1 (20 bodova). Neka je dan skup $M = \{p \in \mathcal{P}_4 : p'(0) = p(1),\ p''(0) = 2p(-1)\}$. Provjerite je li M vektorski potprostor od $\mathcal{P}_4$. Ukoliko je, odredite mu jednu bazu i dimenziju.

Zadatak 2 (20 bodova). (a) Neka su v_1 i v_2 svojstveni vektori pridruženi međusobno različitim svojstvenim vrijednostima operatora A. Pokažite da $v_1 + v_2$ ne može biti svojstveni vektor za A. Postoje li skalari α_1 i α_2 takvi da je $\alpha v_1 + \alpha v_2$ svojstveni vektor za A?

(b) Odredite svojstvene vrijednosti i pridružene svojstvene vektore matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zatim, dijagonalizirajte danu matricu.

Zadatak 3 (20 bodova). Neka je e kanonska baza u $\mathbb{R}^2$, a $e' = \{e'_1, e'_2\}$, $e'_1 = (2, -1)$, $e'_2 = (-1, 1)$ druga baza za $\mathbb{R}^2$. Neka je operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan s

$$A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

te neka je $x = (1, 1)$. Izračunaj $[Ax]^e$ i $[Ax]^{e'}$.

Zadatak 4 (20 bodova). Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan unitaran prostor i $H \in L(V)$ hermitski operator. Dokažite da je tada

$$\langle Hx, x \rangle \in \mathbb{R},$$

za svaki $x \in V$.

Zadatak 5 (20 bodova). U pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ odredite skup svih rješenja jednadžbe

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 4\sqrt{2}x_2 + 4 = 0.$$