Pismeni ispit

11.9.2023.

Pravila

Ispit se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima.
Ispit nosi 100 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.
Sve tvrdnje je potrebno obrazložiti, inače neće biti bodovane. Ukoliko koristite tvrdnje pokazane na vježbama i/ili predavanjima, navesti na koje tvrdnje se pozivate.

Zadatak 1 (20 bodova). Neka je $V = \mathbb{R}^2$. Definiramo binarnu operaciju *zbrajanja*

$$x \boxplus y = (x_1 y_1, x_2 y_2 - 1), \quad \forall x = (x_1, x_2), \, y = (y_1, y_2) \in V$$

i operaciju množenja skalarima

$$\alpha \boxdot x = e^{\alpha} x, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \, \forall x = (x_1, x_2) \in V.$$

Provjerite je li skup V s ovako definiranim operacijama vektorski prostor. Ako nije, provjerite koja svojstva iz definicije vektorskog prostora ne vrijede.

Zadatak 2 (5 bodova). Provjerite je li skup $\{2t^3 - t^2 + 2t + 1, t^3 + 4t^2 + 2t - 2, t^3 - 2t^2 + t - 1\}$ linearno nezavisan u prostoru $\mathcal{P}_3$.

Zadatak 3 (15 bodova). Neka je $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ prostor svih realnih matrica reda 2. Pokažite da je skup $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \; A = A^T \text{ i } \operatorname{tr}(A) = 0\}$ potprostor od $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Odredite jednu bazu i dimenziju od W.

Zadatak 4 (20 bodova). Neka je linearan operator $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ zadan s

$$A(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2, x_1).$$

(a) Neka je e kanonska baza u $\mathbb{R}^2$, a f kanonska baza u $\mathbb{R}^3$. Odredite matrični zapis operatora A u paru kanonskih baza e i f. Neka je zadan vektor $x = (2, 0)$. Izračunajte $[Ax]^f$.

(b) Neka je

$$e' = \{e'_1, e'_2\}, \; e'_1 = (-1, 2), \, e'_2 = (-2, 7)$$

druga baza za $\mathbb{R}^2$, a

$$f' = \{f'_1, f'_2, f'_3\}, \; f'_1 = (1, 1, 1), \, f'_2 = (0, 0, 1), \, f'_3 = (0, 1, 1)$$

druga baza za $\mathbb{R}^3$. Odredite matrični zapis operatora A u paru baza e' i f'.

Zadatak 5 (20 bodova). Neka je $\lambda \neq 0$ proizvoljna svojstvena vrijednost linearnog operatora $A \in L(V)$, gdje je V konačnodimenzionalan unitaran prostor. Dokažite:

- (a) ako je A unitaran/ortogonalan operator, tada je $|\lambda| = 1$;
- (b) ako je A hermitski/simetričan operator, tada je $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zadatak 6 (20 bodova). Odredite koja je krivulja dana jednažbom

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 + 10x + 10y + 10 = 0.$$