Prvi kolokvij iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa
2015./16.

Zadatak 1. (5 bodova) *Polumjer sfere se povećava brzinom* $4mm/s$. *Koliko brzo se povećava volumen u trenutku kada je promjer* $80mm$?

Zadatak 2. (10 bodova) *Kamen je bačen u jezero te izazvao stvaranje kružnog vala koji se giba brzinom od* $60cm/s$. *Pronađite brzinu kojim se mijenja površina unutar kružnice vrha vala nakon* $3s$.*(Uzimamo da je u trenutku* 0 *vrh vala u središtu kružnog vala.)*

Zadatak 3. (10 bodova) *Odredite jednadžbu krivulje u Kartezijevim koordinatama i točke na krivulji u kojima su tangente paralelne s koordinatnim osima ako je krivulja u polarnim koordinatama zadana s* $r = 3\cos\varphi, \varphi \in \mathbb{R}$.

Zadatak 4. (10 bodova) *Visina trokuta povećava se brzinom* $1cm/min$, *dok se površina trokuta povećava brzinom* $2cm/min$. *Kojom brzinom se mijenja baza trokuta kada je visina* $10cm$, *a površina* $100cm^2$?

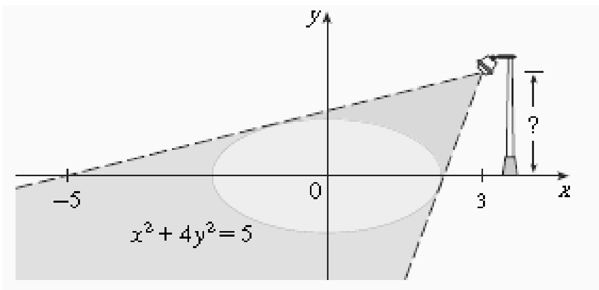
Zadatak 5. (15 bodova) *Posuda oblika polukugle polumjera* $R\,cm$ *puni se vodom konstantnom brzinom* $a\,\frac{L}{s}$. *Odredite brzinu kojom se podiže nivo vode kada je nivo* $h\,cm$ *i pokažite da je ona obrnuto proporcionalna površini gornjeg sloja tekućine.*

Zadatak 6. (15 bodova) *Dokažite da je zbroj duljina odsječaka na koordinatnim osima što ih odsijeca proizvoljna tangenta na krivulju* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ *jednak* c, *za* $c > 0$ *proizvoljan.*

Zadatak 7. (15 bodova) *Velika kazaljka sata duga je* $8cm$, *a mala* $4cm$. *Odredite brzinu kojom se mijenja udaljenost između vrhova kazaljki u* $13h$.

Zadatak 8. (20 bodova) *Iz spremnika oblika obrnutog stošca curi voda brzinom od* $10000cm^3/min$, *a u isto vrijeme ulijevamo vodu u spremnik konstantnom brzinom. Spremnik ima visinu* $6m$ *i promjer baze* $4m$. *Ako se nivo vode povećava brzinom* $20cm/min$ *kada je visina vode* $2m$, *odredite brzinu kojom se voda ulijeva u spremnik.*

Zadatak 9. (20 bodova) *Na slici 1. je prikazana ulična svjetiljka koja se nalazi tri jedinice desno od* y*-osi i sjena koju stvara eliptično područje* $x^2 + 4y^2 \leq 5$. *Ako je točka* $(-5, 0)$ *na rubu sjene, koliko visoko iznad* x*-osi se nalazi svjetiljka.*



Slika 1.

Zadatak 10. (20 bodova) *Ako se čestica mase* m *giba s vektorom položaja* $r(t)$, *njezin kutni moment je definiran s* $L(t) = m\,r(t) \times v(t)$, *a njezin moment uvijanja je definiran s* $\tau(t) = r(t) \times F(t)$. *Dokažite da* $\tau(t) = 0, \forall t$, *povlači da je* $L(t)$ *konstanta.*