Linearni operatori.

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Napomena 2.49. Naučili smo ako je dan $A \in L(V,W)$ te baze e od V i f od W kako odrediti $[A]_e^f$.
Često se nameće potreba za obratnim postupkom: za danu matricu A trebamo naći linearan operator čiji će matrični zapis u nekom paru baza (ili u nekoj bazi, ako je matrica kvadratna) biti upravo A.
Evo kako to možemo učiniti. Neka je zadana matrica $A = [\alpha_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$.
Uzmimo dva vektorska prostora V i W nad $\mathbb{F}$ tako da je $\dim V = n$ i $\dim W = m$, zatim neke baze $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ u V i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ u W te uz pomoć propozicije 2.10. definirajmo $\tilde{A} \in L(V,W)$ formulom

$$\tilde{A}e_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Jasno je da vrijedi $[\tilde{A}]_e^f = A$.
Još uočimo: ako je polazna matrica A kvadratna onda se može uzeti $W = V$ i $f = e$.

Primjer 2.50. Neka je dana matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odredite $\tilde{A} \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
Primjer je detaljno riješen na predavanju.
Napomena 2.51. Na prethodni se način proizvoljan sustav linearnih jednadži $Ax = b$ može prevesti u sustav vektorskih jednadžbi

$$\tilde{A}x = \tilde{b},$$

gdje je vektor $\tilde{b} \in W$ takav da je

$$[\tilde{b}]^f = b.$$

Slične matrice

Definicija 2.52. Neka su $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je matrica B slična matrici A ako postoji regularna matrica $S \in GL(n, \mathbb{F})$ takva da je

$$B = S^{-1}AS.$$

Korolar 2.53. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Matrični prikazi operatora A u različitim bazama su slične matrice.

(**Dokaz.** Posljedica prethodne definicije i Korolara 2.45.)

Spektar

- za $A \in L(V)$ na nekom konačnodimenzionalnom prostoru V, cilj nam je naći takvu bazu prostora V u kojoj će matrica operatora A biti što jednostavnija
- najjednostavnije bi bilo ako bismo postigli da u nekoj bazi $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ prostora V operatoru A pripada dijagonalna matrica

$$[A]_a^a = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

- iz matričnog zapisa linearnog operatora odmah slijedi da je dijagonalan matrični zapis u bazi a ekvivalentan sustavu jednakosti:

$$Aa_1 = \alpha_1 a_1, \quad Aa_2 = \alpha_2 a_2, \quad \ldots, \quad Aa_n = \alpha_n a_n$$

Definicija 2.54. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Kaže se da je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je

$$Ax = \lambda_0 x.$$

Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se spektar (operatora A) i označava sa $\sigma(A)$.

- koriste se još termini karakteristična vrijednost i vlastita vrijednost, a u engleskom jeziku naziv eigenvalue

Napomena 2.55.

(a) vektor x iz prethodne definicije naziva se svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Treba primijetiti da svojstveni vektor nikako nije jedinstven: ako je x svojstveni vektor pridružen λ_0 onda je i αx svojstveni vektor pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti, i to za svaki skalar α iz $\mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$ (detaljno pokazano na

predavanju).
Štoviše, neka svojstvena vrijednost može imati i više linearno nezavisnih svojstvenih vektora; npr. za jedinični operator $I \in L(V)$ vrijedi

$$Ix = x = 1 \cdot x, \, \forall x \in V, \, x \neq 0,$$

tj. svaki $x \in V$, $x \neq 0$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 1.

(b) neka je
$$V_A(\lambda_0) = \{x \in V \ : \ Ax = \lambda_0 x\}.$$
Ovaj skup se naziva svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Uočimo da je $V_A(\lambda_0)$ zaista potprostor jer evidentno vrijedi

$$V_A(\lambda_0) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I) \leq V.$$

Primijetimo da je skup $V_A(\lambda) = \{x \in V \ : \ Ax = \lambda x\}$ uvijek, za svaki skalar λ, potprostor od V. Svojstvene vrijednosti su oni skalari λ_0 za koje je potprostor $V_A(\lambda_0)$ netrivijalan. Zaključujemo: svojstvena vrijednost operatora A je takav skalar λ_0 za koji je operator $A - \lambda_0 I$ singularan.

(c) ako je $\lambda_0 \in \sigma(A)$ onda se dimenzija svojstvenog potprostora $V_A(\lambda_0)$ naziva geometrijska kratnost (ili geometrijski multiplicitet) svojstvene vrijednosti λ_0 i označava se s $d(\lambda_0)$. Iz definicije je jasno da je

$$d(\lambda_0) \geq 1.$$

Primjer 2.56. Operator A simetrije ravnine M u odnosu na prvu koordinatnu os ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$; naime $Ae_1 = 1 \cdot e_1$ i $Ae_2 = -1 \cdot e_2$, gdje je $e = \{e_1, e_2\}$ kanonska baza. To su jedine dvije svojstvene vrijednosti ovog operatora. Primjer je detaljno riješen na predavanju.

Propozicija 2.57. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, neka je $A \in L(V)$, neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ međusobno različite svojstvene vrijednosti operatora A te neka su $x_1, \ldots, x_k$ svojstveni vektori pridruženi, redom, svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Tada je skup $\{x_1, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan.
(**Dokaz.** Uz obrazloženje, bez dokaza.)

Definicija 2.58. Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Polinom

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

naziva se svojstveni polinom matrice A.

Propozicija 2.59. Slične matrice imaju jednake svojstvene polinome.
(**Dokaz.** Na predavanju. Dokaz je za ocjenu dobar i više.)

Definicija 2.60. Neka je V konačnodimenzionalan prostor, neka je $A \in L(V)$ te neka je $[A]_e^e$ matrični zapis operatora A u nekoj bazi e prostora V. Svojstveni polinom operatora A, k_A, definira se kao svojstveni polinom matrice $[A]_e^e$:

$$k_A(\lambda) = k_{[A]_e^e}(\lambda).$$

Teorem 2.61. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $A \in L(V)$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako vrijedi

$$k_A(\lambda_0) = 0.$$

(**Dokaz.** Bez dokaza.)

Napomena 2.62.

- U osnovi, teorem 2.61. tvrdi da su svojstvene vrijednosti operatora upravo nultočke njegovog svojstvenog polinoma. Primijetimo, međutim, da je jedna od pretpostavki teorema $\lambda_0 \in \mathbb{F}$. To konkretno znači da su u realnim prostorima svojstvene vrijednosti samo realne nultočke svojstvenog polinoma.

- Ako je $\dim V = n$ i $A \in L(V)$ onda A ima najviše n svojstvenih vrijednosti. Ovo je neposredna posljedica tvrdnje teorema 2.61. jer polinom $n-$tog stupnja ima najviše n nultočaka.

- Sve do sada izbor polja u našim razmatranjima nije igrao nikakvu ulogu. Teorem 2.61. očito predstavlja mjesto na kojem se teorija počinje dijeliti na realnu i kompleksnu. S jedne strane, polje kompleksnih brojeva je algebarski zatvoreno, i zato svaki operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru ima svojstvenu vrijednost. Nasuprot tomu, polje $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno, tj. ima polinoma s realnim koeficijentima bez realnih nultočaka.

Definicija 2.63. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je

$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda), \quad p(\lambda_0) \neq 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Broj l zovemo algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$.

Teorem 2.64. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Tada je

$$d(\lambda_0) \leq l(\lambda_0).$$

(**Dokaz.** Bez dokaza, dakle, dokaz se neće ispitivati na usmenom dijelu ispita.)