Minimalni polinom

`radni nerecenzirani materijal za predavanja`

Definicija 2.75. Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Minimalni polinom matrice A je normirani polinom najmanjeg stupnja kojeg A poništava tj. normirani polinom μ_A za koji vrijedi:

i) $\mu_A \neq 0$,

ii) $\mu_A(A) = 0$,

iii) ako za polinom p vrijedi $p(A) = 0$ tada je

$$\mathrm{st}(p) \geq \mathrm{st}(\mu_A).$$

Općenito, za $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ je $\mathrm{st}(\mu_A) \leq n$.

Propozicija 2.76.[Još neka svojstva minimalnog polinoma]

a) Svaki polinom p stupnja većeg od stupnja minimalnog polinoma kojeg A poništi dijeljiv je s μ_A.

b) Nultočke svojstvenog polinoma su i nultočke minimalnog polinoma.
Ako A ima sve jednostruke svojstvene vrijednosti onda je

$$\mu_A = k_A,$$

s tim da moramo paziti da je μ_A normiran.

c) Slične matrice imaju isti minimalni polinom.

d) Ako je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, onda za svaki linearni operator $A \in L(V)$ postoji jedinstven minimalni polinom.

(**Dokaz.** Bez dokaza, dokaz se neće ispitivati na usmenom dijelu ispita.)

Napomena 2.77. Bitno je istaknuti da minimalni polinom realne matrice ima realne koeficijente i kad se A promatra u $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tj. kao specijalan slučaj kompleksne matrice.

Teorem 2.78. Ako je A *blok trokutasta matrica* s dijagonalnim blokovima $A_1, A_2, \ldots, A_s$ tada je svojstveni polinom od A jednak umnošku svojstvenih polinoma dijagonalnih blokova A_i:

$$k_A(\lambda) = k_{A_1}(\lambda) k_{A_2}(\lambda) \cdots k_{A_s}(\lambda).$$

Ako je A *blok dijagonalna matrica* s dijagonalnim blokovima $A_1, A_2, \ldots, A_s$ tada je minimalni polinom od A jednak najmanjem zajedničkom višekratniku minimalnih polinoma dijagonalnih blokova.
(**Dokaz.** Bez dokaza, kao što je rečeno, ovaj je teorem koristan u praksi.)

Jordanova forma matrice

Kao što smo vidjeli, neke se matrice ne mogu dijagonalizirati, ali se zato svaka matrica nad algebarski zatvorenim poljem može prikazati u tzv. Jordanovoj formi.

Jordanova forma matrice je blok dijagonalna matrica

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_k \end{bmatrix}$$

koja na dijagonali ima tzv. *osnovne Jordanove blokove (Jordanove klijetke)* što su matrice oblika

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

odnosno matrice koje na dijagonali imaju svojstvene vrijednosti polazne matrice, točno iznad glavne dijagonale su jedinice i sve ostalo su nule.

Jordanova forma matrice je usko vezana s pojmovima koje smo obradili prethodno, a vezani su uz spektar matrice te smo to ilustrirali sljedećim primjerom.

Primjer 2.79. Za danu matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

odredite svojstveni i minimalni polinom, svojstvene vrijednosti te algebarsku i geometrijsku kratnost svake od njih.

Rješenje. Na predavanju, kao i za sve preostale navedene primjere u nastavnim materijalima.
Napomenimo da smo pri rješavanju prethodnog primjera koristili Teorem 2.78. te smo zaključili da geometrijska kratnost neke svojstvene vrijednosti λ_i, pored toga što predstavlja broj linearno nezavisnih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ_i također predstavlja broj blokova u Jordanovoj formi matrice koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti λ_i; algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ_i govori koliko se puta ta svojstvena vrijednost pojavljuje na dijagonali matrice koja predstavlja Jordanovu formu.

Također, ako je

$$\begin{aligned} k_A(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{l_k}, \quad l_1+\cdots+l_k=n,\ \mathrm{st}(k_A)=n \\ \mu_A(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}, \quad m_1\le l_1,\ldots,m_k\le l_k \end{aligned}$$

vrijedi da je matrica A dijagonalizibilna ako i samo ako je $m_1=\cdots=m_k=1$, gdje m_i predstavljaju dimenziju najveće Jordanove klijetke za svojstvenu vrijednost λ_i.

Dakle, iz Jordanove forme matrice možemo pročitati i svojstveni i minimalni polinom.

Teorem 2.80. Ako matrica $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ ima k linearno nezavisnih svojstvenih vektora, tada je ona slična matrici koja ima Jordanovu formu sa k osnovnih Jordanovih blokova, tj. postoji matrica $M\in GL(n,\mathbb{F})$ takva da je

$$M^{-1}AM=J=\begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_k \end{bmatrix}.$$

Unitarni prostori.

Definicija 3.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalarni produkt na V je preslikavanje

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

koje ima sljedeća svojstva:

U1) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in V$;

U2) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

U3) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \quad \forall x_1, x_2, y \in V$;

U4) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in V$;

U5) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \forall x, y \in V$.

Napomena 3.2.

(a) Očito, svojstva U3) i U4) iz definicije skalarnog produkta povlače

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle &= \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle, \\ &\qquad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}, \forall x_1, x_2, y \in V \end{aligned}$$

te se lako vidi da vrijedi i

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x_i, y \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall x_i, y \in V.$$

Zato se kaže da je skalarni produkt linearan u prvom argumentu.

(b) Svojstva U3) i U4), a također i prethodna opaska, reflektiraju se i na drugi argument preko svojstva U5). Očito vrijedi

$$\langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle x, y_2 \rangle, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}, \ \forall x, y_1, y_2 \in V,$$

i

$$\left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \langle x, y_i \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall x, y_i \in V.$$

Kako skalari s drugog argumenta izlaze kompleksno konjugirani, kaže se da je skalarni produkt antilinearan u drugom argumentu. Naravno, ako je prostor V realan, skalarni produkt je linearan u obje varijable.

(c) $\langle x, 0 \rangle = \langle x, y - y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in V$. Jasno je da vrijedi i $\langle 0, y \rangle = 0, \forall y \in V$.

(d) Uočimo da i u kompleksnom slučaju, premda su vrijednosti skalarnog produkta općenito kompleksni brojevi, uvjet U1) iz definicije zahtijeva da produkt $\langle x, x\rangle$ bude realan, čak nenegativan, za sve vektore x.

Definicija 3.3. Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zove se unitaran prostor.

Primjer 3.4.

a) U $\mathbb{R}^n$ (standardni) skalarni produkt je definiran s

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Uz ovako zadan skalarni produkt $\mathbb{R}^n$ je unitaran prostor.

b) U $\mathbb{C}^n$ (standardni) skalarni produkt je definiran s

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

c) U $\mathbb{R}^2$ je sa

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = 3x_1y_1 + 4x_2y_2$$

definiran skalarni produkt. Provjerili na predavanju.

d) U $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ (standardni) skalarni produkt je definiran s

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^* A),$$

pri čemu je matrica B^* hermitski adjungirana matrici B. Za realne matrice hermitsko adjungiranje svodi na transponiranje.

Teorem 3.5. (Cauchy-Schwarz-Buniakowski nejednakost) Neka je V unitaran prostor. Tada je

$$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

za sve x, y iz V. Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.
(**Dokaz.** Bez dokaza, poopćenje tvrdnje koju ste iskazali na LA1.)

Definicija 3.6. Neka je V unitaran prostor. Norma na V je funkcija

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

definirana s

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Definicija 3.7. Neka je V unitaran prostor. Kažemo da je vektor $x \in V$ normiran ako je $\|x\| = 1$.

Propozicija 3.8. Norma na unitarnom prostoru V ima sljedeća svojstva:

(N1) $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in V;$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in V;$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$

(**Dokaz.** Na predavanju (N1)-(N3). Za ocjene 3 i više.)