Unitarni, normirani i metrički prostori

Napomena 3.9. Svaka realna funkcija na vektorskom prostoru sa svojstvima iz propozicije 3.8., iskazane i dokazane na prethodnom predavanju, naziva se norma.

Napomena 3.10. Za $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ imamo sljedeće norme:

- $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$
- $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$, $1 \leq p < \infty$.

Primjer 3.11. Za vektor $x = (-1, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$ odredite $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ i $\|x\|_\infty$.
(**Rješenje.** Na predavanju.)

Definicija 3.12. Neka je V vektorski prostor. Metrika na V je bilo koja funkcija $d : V \times V \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

(M1) $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in V$;

(M2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(M3) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in V$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in V$.

Specijalno, za $V = \mathbb{R}^n$ i euklidsku normu $\|\cdot\|$ na V preslikavanje $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirano formulom

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

zove se EUKLIDSKA metrika ili EUKLIDSKA udaljenost na $\mathbb{R}^n$.

Ortogonalnost

Definicija 3.13. Neka je V unitaran prostor. Kažemo da su vektori x, y iz V međusobno okomiti ili ortogonalni (oznaka: $x \perp y$) ako je

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Konačan skup vektora $\{e_1, \dots, e_k\}$ je ortogonalan ako je $e_i \perp e_j, \forall i \neq j$. Skup $\{e_1, \dots, e_k\}$ je ortonormiran ako je ortogonalan i ako je $\|e_i\| = 1, \forall i = 1, \dots, k$.

Primjer 3.14. Na $\mathbb{R}^2$ je skup $\{e_1, e_2\}$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ ortonormiran.

(**Rješenje.** Na predavanju.)

Napomena 3.15. Činjenicu da je skup $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortonormiran možemo elegantno zapisati kao

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

pri čemu je δ_{ij} Kroneckerov simbol.

Propozicija 3.16. Neka je V unitaran prostor. Svaki ortogonalan skup $\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq V$, $k \in \mathbb{N}$, čiji su svi članovi netrivijalni vektori je linearno nezavisan. Posebno, svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan.
(**Dokaz.** Na predavanju. Dokaz je za ocjene 3 i više.)

Definicija 3.17. Ortonormiran skup $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ u unitarnom prostoru V je ortonormirana baza ako je taj skup ujedno i baza za V.

Napomena 3.18. Neka je skup $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza unitarnog prostora V. Svaki vektor iz $x \in V$ prema FRLA ima jedinstven prikaz u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

No sada, za razliku od obične baze u nekom običnom vektorskom prostoru, ortonormirana baza "dopušta" da koeficijente vektora x jednostavno i prirodno odredimo: skalarnim množenjem prethodne jednakosti s e_j odmah dobivamo

$$\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$$

za sve $j = 1, 2, \dots, n$. Vrijedi, dakle,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Teorem 3.19. (Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije) Neka je dan linearno nezavisan skup $\{x_1, \ldots, x_k\}, k \in \mathbb{N}$, u unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormiran skup $\{e_1, \ldots, e_k\}$ u V takav da je

$$[\{e_1, \ldots, e_j\}] = [\{x_1, \ldots, x_j\}], \quad \forall j = 1, \ldots, k.$$

(**Teorem je dan bez dokaza**; dokaz ste radili na kolegiju LA I; dakle dokaz se neće tražiti na usmenom dijelu ispita.
Ilustraciju na primjerima pogledati na vježbama.)

Korolar 3.20. Svaki konačnodimenzionalan unitaran prostor $V \neq \{0\}$ ima ortonormiranu bazu.
(**Dokaz.** Na predavanju. Dokaz je za ocjene 4 i 5.)

Definicija 3.21. Neka je V unitaran prostor i M potprostor od V. Ortogonalni komplement potprostora M je

$$M^\perp = \{x \in V \ : \ \langle x, v \rangle = 0, \ \forall v \in M\}.$$

Primjetimo da je $0 \in M^\perp$ pa je skup $M^\perp$ uvijek neprazan.

Primjer 3.22. Ako je V unitaran prostor, vrijedi $V^\perp = \{0\}$ te $\{0\}^\perp = V$.

Propozicija 3.23. Neka je V unitaran prostor i M potprostor od V. Ortogonalni komplement potprostora M je također potprostor od V.
(**Dokaz.** Na predavanju. Za sve ocjene.)

Napomena 3.24. [Tko želi znati više]

Ako je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i M potprostor od V može se pokazati da je tada $M^\perp$ (jedan) direktan komplement od M u V. Iz definicije ortogonalnog komplementa, zbog uvjeta okomitosti slijedi da je za $M \leq V$ njegov direktni komplement $M^\perp \leq V$ jednoznačno određen te umjesto klasične oznake za direktni komplement, da naglasimo jedinstvenost često pišemo

$$V = M \oplus M^\perp.$$

Očito vrijedi

$$(M^\perp)^\perp = M.$$

Linearni operatori na unitarnim prostorima

Definicija 3.25. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Operator $A^* \in L(V)$ sa svojstvom

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \quad \forall x, y \in V,$$

zove se hermitski adjungiran operator operatoru A. Ponekad se takav operator kraće naziva samo adjungiran operator.

Napomena 3.26. Može se pokazati da je operator A^* iz prethodne definicije, za dani operator A, jedinstven. Tvrdnje vezane uz ove operatore korištene dodatno na vježbama (a koje nismo obradili na predavanju) neće se ispitivati na usmenom dijelu ispita.

Definicija 3.27. Neka je $A \in L(V)$. A je normalan operator ako komutira sa svojim adjungiranim operatorom, tj. ako vrijedi

$$AA^* = A^*A.$$

Definicija 3.28. Neka su V i W unitarni prostori takvi da je $\dim V = \dim W$. Kažemo da je $A \in L(V, W)$ unitaran operator ako vrijedi

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Dakle, unitarni operatori čuvaju skalarni produkt.

Propozicija 3.29. Svaki operator $A \in L(V, W)$ sa svojstvom

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in V,$$

je injektivan.
(**Dokaz.** Na predavanju. Dokaz je za ocjene 4 i 5.)

Napomena 3.30.

(a) Ako je $A \in L(V, W)$ unitaran operator, on zadovoljava uvjet iz prethodne propozicije pa slijedi da je injektivan, a zbog uvjeta $\dim V = \dim W$ on je i bijektivan, dakle postoji A^{-1}.

(b) Ako $A \in L(V, W)$ zadovoljava uvjet iz prethodne propozicije onda je $d(A) = 0$ te prema teoremu o rangu i defektu zaključujemo da je $\dim V \leq \dim W$. Ako je $\dim V = \dim W$ takav operator $A \in L(V, W)$ koji zadovoljava uvjet iz prethodne propozicije je unitaran, a ako je $\dim V < \dim W$ operator A nazivamo izometrija.

Primjer 3.31. Pokažite da su sljedeći operatori unitarni:

a) Jedinični operator $I \in L(V, W)$ uz uvjet $\dim V = \dim W$.

b) Operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ definiran s $Ax = A(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$, za svaki $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(**Rješenje.** Na predavanju.)